

---

---

УДК 532.511+ 532.516.5

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА ИЗ ЕМКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА СЦЕПЛЕНИЯ СО СТЕНКОЙ

© 2022 г. Т. Р. Аманбаев<sup>1,2,\*</sup>, С. Д. Энтони<sup>3,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

<sup>2</sup> Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

<sup>3</sup> Школа химической и технологической инженерии, Университет Лидса,

LS2 9JT, Лидс, Великобритания

\*e-mail: tulegen\_amanbaev@mail.ru

\*\*e-mail: s.j.antony@leeds.ac.uk

Поступила в редакцию 08.11.2021 г.

После доработки 26.05.2022 г.

Принята к публикации 10.06.2022 г.

В рамках подхода, основанного на уравнении вязкой жидкости как непрерывной среды (НС), изучен процесс истечения сыпучей среды под действием силы тяжести из объема между двумя пластинами, наклоненными друг к другу под некоторым углом. На границе с твердой стенкой принимается условие частичного скольжения (или сцепления), описываемое с помощью некоторого коэффициента, который меняется от 0 до 1. В двумерной постановке найдено распределение скорости движения среды внутри емкости. Проанализировано влияние изменения коэффициента скольжения на характер течения сыпучей среды. Проведено сравнение подхода НС, и подхода, основанного на описании гранулированной среды как дискретных слоев (ДС). Приведены формулы для скорости и расхода сыпучего тела на выходе из емкости. Проанализированы зависимости указанных параметров от коэффициента внутреннего трения и угла раствора между пластинами.

*Ключевые слова:* сыпучая среда, емкость, сила тяжести, истечение, коэффициент скольжения, расход

DOI: 10.31857/S0032823522050022

**1. Введение.** В настоящее время в порошковой технологии нашли широкое применение аппараты дозирования, сушки, смешения и т.п. гранулированных сред [1–3]. Для дальнейшего усовершенствования этих устройств необходимо создание математических моделей процессов, происходящих в них [4, 5]. Для описания течения сыпучей среды используются различные подходы, основными из которых являются дискретный и непрерывный подходы. В дискретном подходе изучается поведение каждой индивидуальной частицы сыпучей среды в отдельности. Здесь воспользуемся непрерывным подходом, где гранулированная среда рассматривается как непрерывная (сплошная) среда. Обычно движение плотного слоя сыпучей среды условно разделяют на два режима: квазистатический, соответствующий малым скоростям сдвига, который описывается в рамках теории предельного равновесия [6], и инерционный, отвечающий большим скоростям сдвига [7]. При инерционном режиме движения внутренние напряжения в среде возникают вследствие переноса импульса гранулами, аналогично тому, как это происходит при хаотическом движении молекул в жидкости. Описание этого режима течения основывается, как правило, на законах сохранения

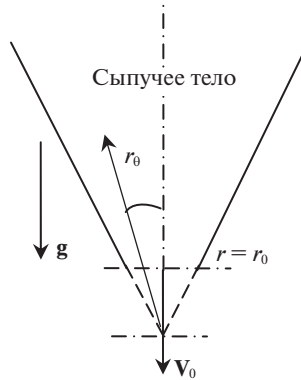


Рис. 1. Схема истечения сыпучего тела из емкости.

массы и импульса. Существуют также методы описания движения сыпучей среды, основанные на ее дискретном представлении [8–11].

**2. Постановка и решение задачи в рамках подхода НС.** Рассмотрим процесс истечения несвязной (эффект когезии не учитывается) гранулированной среды под действием силы тяжести из объема между наклоненными друг к другу под некоторым углом двух плоскостей через нижнее выпускное отверстие (рис. 1). При этом допустим, что высота сыпучего тела намного больше, а частицы намного меньше размеров выпускного отверстия. Для описания этого процесса воспользуемся уравнениями движения НС как вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье–Стокса), записанными в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  (ось  $z$  направлена перпендикулярно к плоскости рис. 1). Рассмотрим стационарный процесс движения НС вдоль радиальной координаты. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0, \quad \rho = \text{const}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = 0, \quad v_r = v(r, \theta), \quad (2.1)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $v_\theta, v_z, v_r$  – компоненты вектора скорости по цилиндрическим координатам. Тогда уравнения сохранения импульсов (в проекциях на оси координат) и уравнение несжимаемости НС в рамках предположений (2.1) примут форму

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} \right) + F_r \quad (2.2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left( \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + F_\theta \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (2.4)$$

$$F_r = -g \cos \theta, \quad F_\theta = g \sin \theta$$

Здесь  $p, \eta$  – давление и “кинематическая вязкость” (которая в ходе дальнейших преобразований выпадает из уравнений) среды,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $F_r, F_\theta$  – компоненты вектора силы тяжести по координатам  $r, \theta$  соответственно. Уравнения (2.2),

(2.3) это уравнения сохранения импульса, уравнение (2.4) – уравнение несжимаемости. Из (2.4) сразу следует

$$v = \frac{\psi(\theta)}{r}, \quad (2.5)$$

где  $\psi(\theta)$  – неизвестная функция. Далее пренебрежем нелинейным членом в левой части уравнения (2.2), считая, что в основной зоне емкости скорость течения достаточно мала. Кроме того, исключим давление из уравнений. Для этого уравнение (2.2) продифференцируем по  $\theta$ , а уравнение (2.3) после умножения обеих его частей на  $r$  – по  $r$ , и вычтем полученные уравнения друг из друга. В результате придем к уравнению, где отсутствуют давление и сила тяжести (считается, что  $\eta \neq 0$ )

$$\eta \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) = 0$$

Приравнявая нулю выражение внутри круглых скобок, и учитывая соотношение (2.5) получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции  $\psi$

$$\frac{d^3 \psi}{d\theta^3} + 4 \frac{d\psi}{d\theta} = 0 \quad (2.6)$$

Общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$\psi = C_1 + C_2 \cos 2\theta + C_3 \sin 2\theta,$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – постоянные интегрирования. Из соображений симметричности движения среды относительно плоскости  $\theta = 0$  сразу вытекает, что постоянная  $C_3$  должна быть равна нулю:  $C_3 = 0$ . Остальные неизвестные постоянные определяются из граничных условий на стенках и условия постоянства расхода среды.

Учитывая то обстоятельство, что скорость на стенке не может быть больше (из-за трения) скорости на плоскости симметрии, граничное условие на стенках емкости поставим в форме

$$v \left( r, \pm \frac{\alpha}{2} \right) = \Lambda v(r, 0), \quad (2.7)$$

где  $\alpha$  – угол раствора между плоскостями. Граничные условия (2.7) учитывают эффект частичного сцепления сыпучей среды с поверхностью стенок, где  $\Lambda$  есть коэффициент скольжения, зависящий от физико-механических свойств поверхности стенок (шероховатости и др.) и гранулированного материала. Очевидно,  $0 \leq \Lambda \leq 1$ , при этом, если  $\Lambda = 1$ , то имеет место полное скольжение (скорость на стенке совпадает со скоростью на плоскости симметрии), а в случае  $\Lambda = 0$  реализуется полное сцепление (прилипание). Отметим, что величина  $v(r, 0)$  в правой части (2.7) представляет собой скорость среды на плоскости симметрии на расстоянии  $r$  от вершины угла. Так что коэффициент  $\Lambda$  показывает, насколько меньше скорость на стенке по сравнению со скоростью на плоскости симметрии.

Следует заметить, что граничное условие на твердой стенке, устанавливающее эффект сцепления, может быть задан и по-другому [4]. Анализ показал, что при задании граничного условия как в [4] решение поставленной задачи при определенных углах раствора становится бесконечным. Кроме того, коэффициент, введенный в [4], и характеризующий эффект частичного скольжения, меняется от нуля до бесконечности, что создает некоторые неудобства по определению значений данного коэффициента. В связи с этим принятие в настоящей работе условия на границе в виде (2.7) с коэффициентом скольжения, меняющимся от нуля до единицы, можно считать вполне це-

лесообразным. К тому же так введенный коэффициент легко измерить экспериментально. Обычно для жидкости на твердой границе ставится условие прилипания (полного сцепления), а в случае сыпучей среды граничное условие допускает скольжение с некоторой скоростью, характеризуемой свойствами контактирующих материалов.

Очевидно, через любое сечение  $r = \text{const}$  проходит (в 1 с) одинаковое количество сыпучего материала (полный расход)  $Q_-$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ )

$$Q_- = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v(r, \theta) r d\theta = \text{const} < 0 \tag{2.8}$$

Используя граничное условие на одной из стенок, например, при  $\theta = \alpha/2$ , (второе условие при этом выполняется автоматически из-за симметричности движения) и условие (2.8) находим функцию  $\psi$ , подставляя которую в (2.5) получим распределение скорости внутри рассматриваемого объема

$$v(r, \theta) = -\frac{Q}{Ar} \left[ 1 - (1 - \Lambda) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \tag{2.9}$$

$$A = \alpha - (1 - \Lambda) \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad -\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}, \quad Q = -Q_- > 0, \quad \alpha \neq 0$$

В частном случае  $\Lambda = 1$  имеем  $A = \alpha$ . Анализ показал, что при приближении  $\alpha$  к нулю величина  $A$  также стремится к нулю (возникающая при этом неопределенность типа  $0/0$  во втором слагаемом в выражении для  $A$  легко раскрывается разложением в ряд тригонометрических функций). Очевидно, при  $\alpha \neq 0$  параметр  $A$  всегда меньше  $\alpha$ . Для малых углов раствора с точностью до второго порядка малости по  $\alpha$  имеет место следующее асимптотическое представление:

$$A \cong \left( \frac{2 + \Lambda}{3} \right) \alpha \tag{2.10}$$

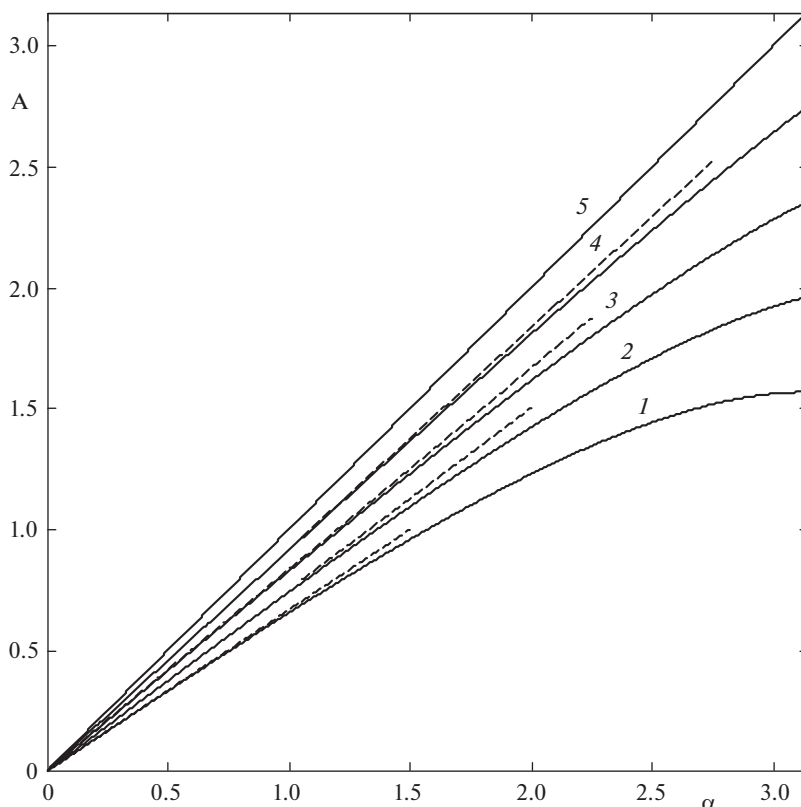
При крайнем значении  $\Lambda = 1$  асимптотическая формула (2.10) дает  $A = \alpha$ , что совпадает с вышеприведенной основной формулой для  $A$  (с учетом условия  $\Lambda = 1$ ). Более подробная картина поведения зависимости  $A$  от  $\alpha$  при разных коэффициентах скольжения  $\Lambda$  показана на рис. 2, где видно, что с ростом  $\alpha$  и  $\Lambda$  величина  $A$  также увеличивается. Причем асимптотическая формула (2.10) довольно хорошо описывает зависимость  $A(\alpha)$  для не очень больших  $\alpha$ .

На плоскости симметрии ( $\theta = 0$ ) из (2.9) следует

$$v(r) = -\frac{Q}{Ar} \equiv v_s(r), \tag{2.11}$$

так что скорость на линии симметрии зависит от координаты  $r$ , угла раствора  $\alpha$ , коэффициента скольжения  $\Lambda$  и расхода  $Q$ . Из (2.11) следует, что в случае одного и того же расхода усиление эффекта сцепления (соответствует уменьшению коэффициента  $\Lambda$ , и как следствие согласно рис. 2, уменьшению  $A$ ) приводит к увеличению (по модулю) скорости  $v_s$ . С учетом формулы (2.11) решение (2.9) примет вид

$$v(r, \theta) = v_s(r) \left[ 1 - (1 - \Lambda) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \tag{2.12}$$



**Рис. 2.** Зависимость параметра  $A$  от  $\alpha$  (рад) при разных значениях коэффициента скольжения: 1 –  $\Lambda = 0$ , 2 –  $\Lambda = 0.25$ , 3 –  $\Lambda = 0.5$ , 4 –  $\Lambda = 0.75$ , 5 –  $\Lambda = 1$ . Штриховые линии – асимптотическая формула (2.10).

**3. Анализ влияния коэффициента скольжения.** Проанализируем некоторые частные случаи, соответствующие характерным значениям коэффициента скольжения. В случае полного сцепления  $\Lambda = 0$  (т.е. при отсутствии скольжения) из (2.12) вытекает

$$v(r, \theta) = v_s^{(0)}(r) \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right]; \quad v_s^{(0)}(r) = -\frac{Q}{r} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}$$

Из решения (2.9) видно, что в случае полного скольжения ( $\Lambda = 1$ ) скорость среды не зависит от угловой координаты  $\theta$  и имеет равномерное распределение для любого  $r$

$$v(r) = -\frac{Q}{\alpha r} \equiv v^{(1)}(r)$$

При этом очевидно, что в данном случае (т.е. когда  $\Lambda = 1$ )  $v^{(1)} = v_s$ . В этом случае скорость имеет потенциал  $\Phi = -(Q/\alpha) \ln r$ , соответствующий находящемуся на вершине угла плоскому стоку интенсивности  $Q$ , в то время как движение среды в общем случае, описываемое уравнением (2.9) не является потенциальным. Таким образом, наличие сцепления со стенкой нарушает свойство потенциальности течения сыпучей среды.

Интересно сравнить распределения скоростей среды при наличии ( $\Lambda < 1$ ) и отсутствии ( $\Lambda = 1$ ) сцепления со стенкой. С этой целью рассмотрим отношение  $v/v^{(1)}$

$$\frac{v}{v^{(1)}} = \frac{v_s}{v^{(1)}} \left[ 1 - (1 - \Lambda) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right]$$

Видно, что данное соотношение характеризуется величиной  $\kappa = v_s/v^{(1)}$ , поэтому имеет смысл подробно проанализировать зависимость  $\kappa$  от определяющих параметров  $\alpha$  и  $\Lambda$ . Отношение характерных скоростей  $\kappa$  при одном и том же расходе  $Q$  запишется в форме

$$\kappa = \frac{v_s}{v^{(1)}} = \frac{\alpha}{A} = \left[ 1 - (1 - \Lambda) \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha(1 - \cos \alpha)} \right]^{-1} \quad (3.1)$$

Формула (3.1) показывает, насколько скорость на линии симметрии при наличии сцепления со стенкой  $v_s$  отличается от скорости при полном скольжении среды  $v^{(1)}$ . Поскольку величина  $A$  всегда меньше или равна  $\alpha$  (см. выше), то имеет место соотношение  $\kappa \geq 1$  (или  $v_s \geq v^{(1)}$ ). В предельном случае полного сцепления ( $\Lambda = 0$ ) имеем

$$\kappa = \left[ 1 - \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha(1 - \cos \alpha)} \right]^{-1} = \frac{\alpha(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}$$

В этом случае  $\kappa$  принимает свое максимальное значение. Очевидно, при  $\Lambda = 1$  величина  $\kappa = 1$ . Разлагая тригонометрические функции в формуле (3.1) в ряды, и пренебрегая в этих рядах членами выше пятого порядка малости, получим приближенное выражение, пригодное для расчета величины  $\kappa$  при малых углах раствора  $\alpha \ll 1$

$$\kappa = \frac{3}{2 + \Lambda} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2 + \Lambda} \right) \alpha^2 \right], \quad \gamma = 1 - \frac{1}{5} (1 - \Lambda) \quad (3.2)$$

Из (3.2) вытекает соотношение для случая, когда  $\alpha \rightarrow 0$

$$\kappa = \frac{3}{2 + \Lambda}$$

Отсюда, в частности, следует, что при движении сыпучей среды между параллельными плоскостями скорость на плоскости симметрии в крайних ситуациях полного сцепления и полного скольжения различается в 1.5 раза (в предположении одинакового расхода).

Эпюры безразмерной скорости  $v/v_s$  при  $\alpha = \pi/3$  и различных значениях коэффициента скольжения  $\Lambda$  представлены на рис. 3. Видно, что с ростом  $\Lambda$  профиль скорости среды стремится к равномерному распределению. Следует иметь в виду, что профили скорости на рис. 3 соответствуют разным расходам, поскольку в данном случае величина  $v_s$  фиксирована, и поэтому при изменении  $\Lambda$  меняется также и  $Q$  (от которых зависит  $v_s$ ).

На рис. 4 показан график зависимости  $\kappa$  от  $\alpha$ , откуда видно, что при увеличении угла раствора  $\alpha$  величина  $\kappa$  растет, тогда как с увеличением коэффициента  $\Lambda$  оно, наоборот, уменьшается. Необходимо подчеркнуть, что при значениях  $\Lambda$ , близких к единице, а также при не очень больших углах раствора  $\alpha$  указанное отношение скоростей меняется достаточно слабо. Следует иметь в виду, что значение величины  $\kappa$ , соответ-

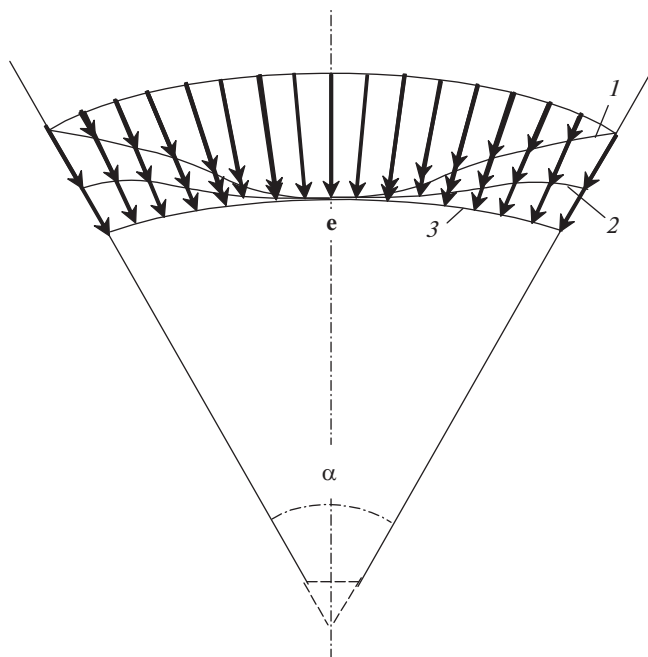


Рис. 3. Эпюры безразмерной скорости  $v/v_s$  в случае  $\alpha = \pi/3$  при разных коэффициентах скольжения. Профили: 1 –  $\Lambda = 0$ , 2 –  $\Lambda = 0.5$ , 3 –  $\Lambda = 1$ ,  $e$  – единичный вектор.

ствующее нулевому углу раствора достигается в пределе при  $\alpha \rightarrow 0$ . Заметим, что приближенная формула (3.2) хорошо аппроксимирует исходную зависимость.

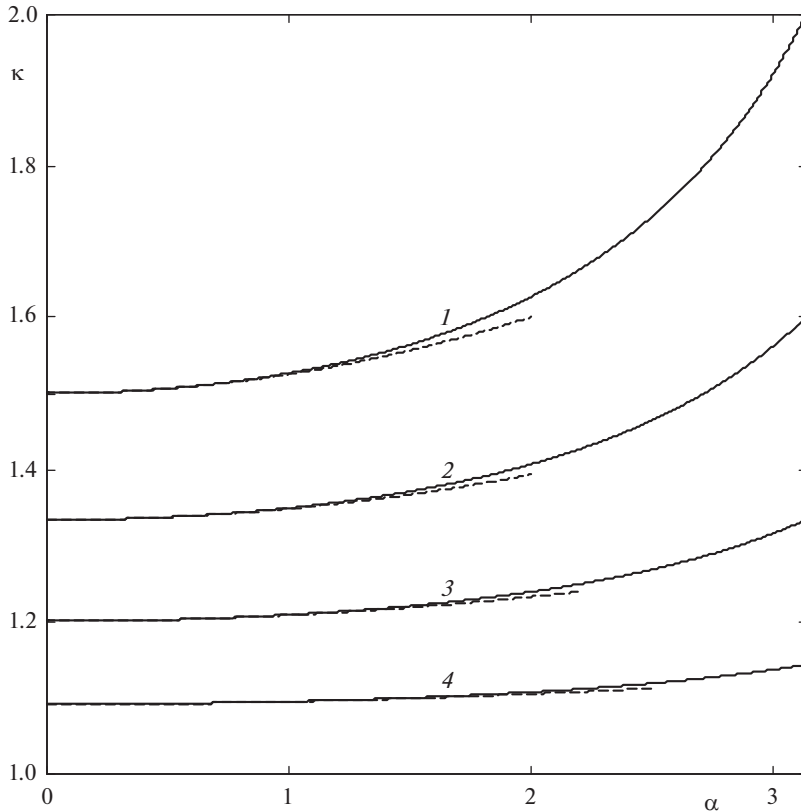
Особенности взаимосвязи между скоростями  $v_s$  и  $v^{(1)}$  наглядно демонстрирует диаграмма, приведенная на рис. 5, где эпюры скоростей построены для угла раствора  $\alpha = \pi/3$ . Поскольку расход сыпучей среды один и тот же, то площади, охваченные профилями скоростей  $v$  и  $v^{(1)}$  должны быть одинаковыми.

**4. Средняя скорость истечения.** Также можно определить среднюю скорость на расстоянии  $r$  от вершины угла

$$v_a(r) = \frac{1}{\alpha r} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v(r, \theta) r d\theta = -\frac{Q}{\alpha r} \quad (4.1)$$

Интересно, что как видно из (4.1), при заданном  $Q$  средняя скорость не зависит от  $\Lambda$  и для одного и того же расхода  $Q$  совпадает со скоростью среды при полном скольжении. Причем она обладает таким же потенциалом  $\Phi = -(Q/\alpha) \ln r$ , соответствующим находящемуся на вершине угла  $\alpha$  плоскому стоку интенсивности  $Q$ , в то время как движение среды в общем случае, описываемое уравнением (2.9), как отмечено выше, не является потенциальным. Таким образом, в соотношениях  $v_s/v^{(1)}$  и  $v/v^{(1)}$  скорость  $v^{(1)}$  вполне можно заменить на  $v_a$ .

Введем некоторую характерную скорость  $V$  по формуле  $V = Q/\alpha$ , которую можно трактовать как среднюю скорость истечения сыпучего тела через выпускное отверстие



**Рис. 4.** Зависимость  $\kappa = v_s/v^{(1)}$  от  $\alpha$  (рад) при разных значениях коэффициента скольжения: 1 –  $\Lambda = 0$ , 2 –  $\Lambda = 0.25$ , 3 –  $\Lambda = 0.5$ , 4 –  $\Lambda = 0.75$ . Штриховые линии – расчеты по приближенной формуле (3.2).

шириной  $a$ , поскольку величина  $aV$  дает расход среды. Тогда используя формулу для  $V$  решение (2.9) можно переписать в другой форме

$$v(r, \theta) = -\frac{aV}{Ar} \left[ 1 - (1 - \Lambda) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \tag{4.2}$$

Для сравнения запишем выражение для скорости среды на линии симметрии ( $\theta = 0$ )

$$v_s(r) = -\frac{aV}{Ar} \tag{4.3}$$

и для средней скорости (совпадающей со скоростью при полном скольжении)

$$v_a(r) = v^{(1)}(r) = -\frac{aV}{\alpha r} \tag{4.4}$$

Формулы (4.2)–(4.4) позволяют рассчитать распределение скорости среды внутри емкости через характерную скорость на выходе  $V$ . Указанные формулы физически правильно описывают поведение зависимостей скоростей  $v$ ,  $v_s$ ,  $v_a$  от ширины выходной щели  $a$ : они с увеличением  $a$  растут.



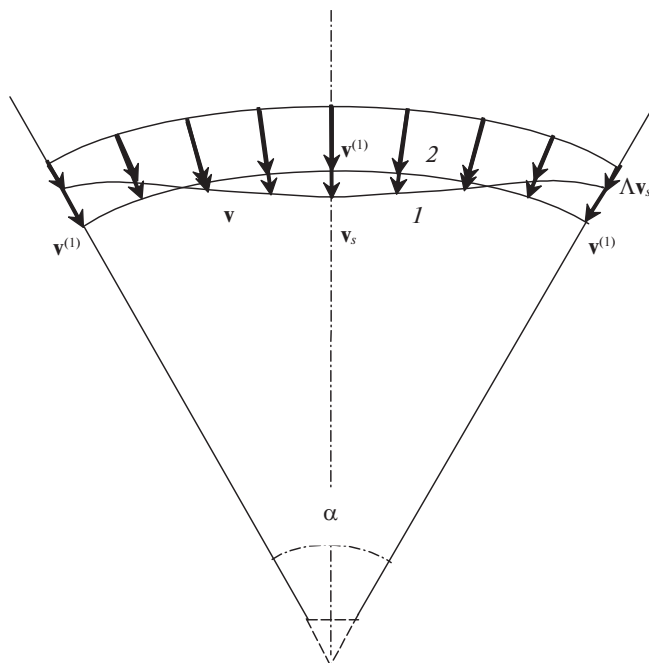


Рис. 5. Эпюры скорости в случаях частичного  $\mathbf{v}$  и полного  $\mathbf{v}^{(1)}$  скольжения при одинаковом расходе сыпучего материала (для  $\alpha = \pi/3$ ). Профили:  $1 - \Lambda = 0.25$ ,  $2 - \Lambda = 1$ .

Для сравнения далее рассмотрим другой подход для моделирования истечения сыпучего груза из емкости, основанный на представлении гранулированной среды как дискретных слоев (ДС).

**5. Моделирование истечения сыпучего тела с использованием ДС.** Для приближенного описания сформулированной выше задачи об истечении сыпучего тела из бункера может быть использована точка зрения Лагранжа к изучению движения среды. Пусть среда истекает с интенсивностью  $Q > 0$  и пусть эффект сцепления сыпучего тела со стенкой отсутствует ( $\Lambda = 1$ ). В начальный момент времени  $t = t_0$  выбираем любой элементарный объем среды высотой  $h$  (рис. 6), которую назовем “крупной частицей” или элементарным “дискретным слоем” (ДС) [12]. В качестве лагранжевой координаты примем начальную координату центра ДС, так что

$$\begin{cases} t = t_0 : x = \xi \\ t > t_0 : x = L(\xi, t), \end{cases}$$

где  $x$  – эйлерова координата центра ДС (координата  $x$  начинается от плоскости выпускного отверстия). Необходимо найти закон движения ДС

$$x = L(\xi, t)$$

За время  $t - t_0$  первоначальный слой высотой  $h$  перейдет в новое положение с высотой  $h_1$ . Для несжимаемой среды площадь элементарного слоя будет постоянной. Учитывая это условие вместе с геометрическими размерами емкости можно получить сле-

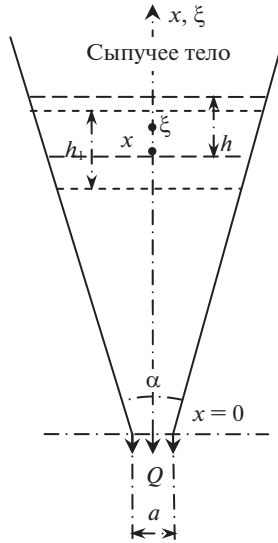


Рис. 6. Схема деформации ДС.

дующие соотношения для разработки расчетных схем с целью последующего анализа истечения сыпучей среды из бункера

$$x = \frac{h}{h_1} \left( \xi + \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$h_1 = (h_{11} - h_{12}) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \tag{5.1}$$

$$h_{11} = \sqrt{\left[ \left( \xi + \frac{h}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{a}{2} \right]^2 - (t - t_0) Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$h_{12} = \sqrt{\left[ \left( \xi - \frac{h}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{a}{2} \right]^2 - (t - t_0) Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Скорость дискретного элемента выражается как

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{hQ}{h_1 h_{11} h_{12}} \left( \xi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{a}{2} \right) \tag{5.2}$$

Из формул (5.1) и (5.2) устремляя  $h$  к нулю  $h \rightarrow 0$  можно получить закон движения среды (после раскрытия неопределенности  $h/h_1$ )

$$x = \left[ -\frac{a}{2} + \sqrt{\left( \frac{a}{2} + \xi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 - Q(t - t_0) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right] \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \tag{5.3}$$

а также скорость движения выбранной точки с координатой  $\xi$  в зависимости от времени

$$u = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\sqrt{\left( \frac{a}{2} + \xi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 - Q(t - t_0) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \tag{5.4}$$

Из (5.3) следует выражение для времени, в течение которого частица с начальной координатой  $\xi$  достигнет выпускного отверстия ( $x = 0$ )

$$t_{\xi} = \frac{1}{Q} \xi \left( a + \xi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

Видно, что зависимость характерного времени  $t_{\xi}$  от начальной координаты частицы  $\xi$  подчиняется квадратичному закону. Причем величина  $t_{\xi}$  обратно пропорциональна расходу  $Q$ , что согласуется с физическими соображениями: чем больше расход среды, тем меньше время истечения.

Комбинируя формулы (5.3) и (5.4) получаем распределение скорости среды вдоль оси  $x$

$$u = - \frac{Q}{a + 2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad (5.5)$$

Далее для удобства переходим к координате  $y$  (вместо  $x$ ), начало которой откладывается, аналогично  $r$ , от линии пересечения рассматриваемых плоскостей

$$x = y - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

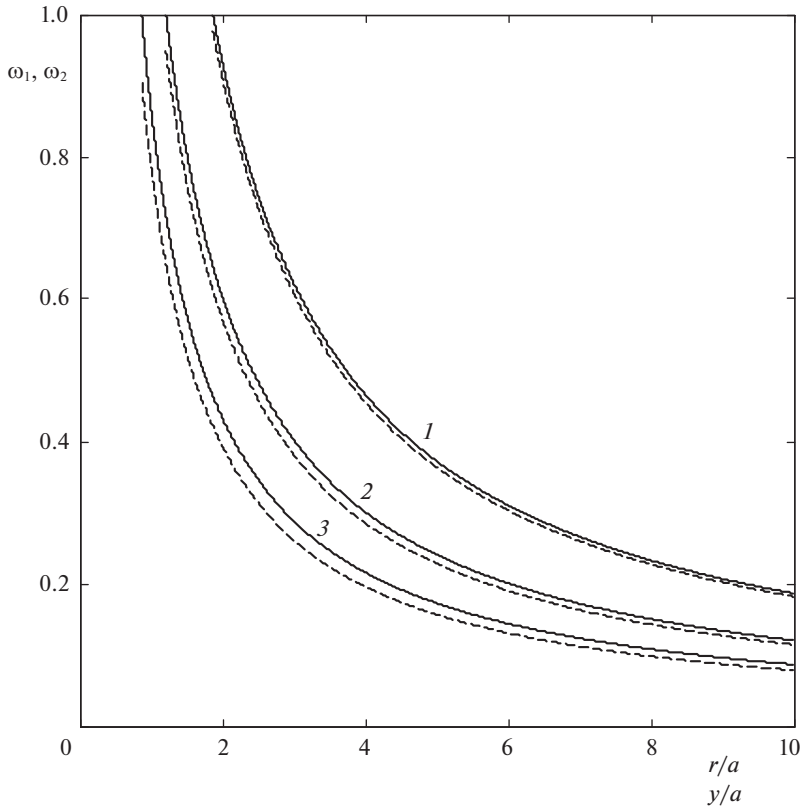
Тогда (5.5) переписывается в виде

$$u = - \frac{Q}{2y} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad y \geq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (5.6)$$

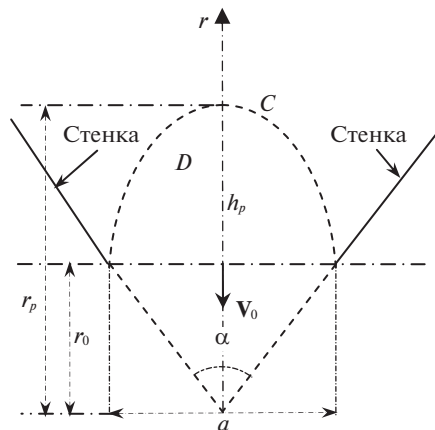
Здесь расход  $Q$  аналогично предыдущему разделу можно представить в виде  $Q = aV$ . Напомним, что в подходе ДС используется только закон сохранения массы без привлечения закона сохранения импульсов (в этом заключается простота подхода ДС).

На рис. 7 проводится сравнение безразмерных скоростей, вычисленных по разным формулам (2.17) и (5.6), соответствующим разным подходам описания истечения сыпучей среды. Видно, что оба рассмотренных здесь подхода дают значения скорости, незначительно отличающиеся друг от друга, хотя с увеличением угла раствора различие между ними растёт.

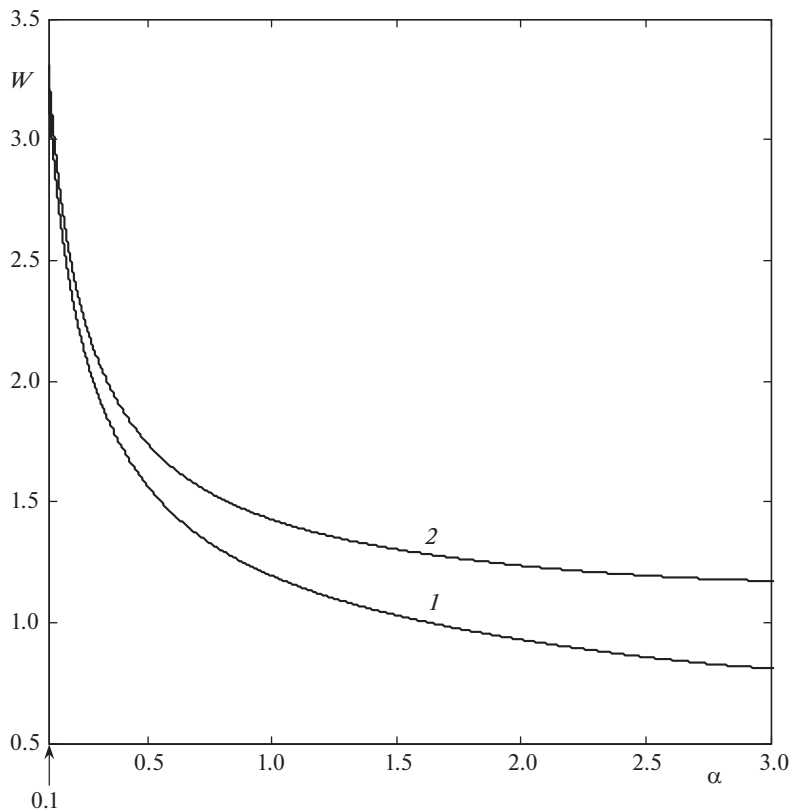
**6. Расчет скорости и расхода сыпучего тела на выходе из емкости.** Таким образом, как следует из предыдущих разделов, распределение скорости внутри емкости зависит от расхода  $Q$  сыпучего материала через нижнее выпускное отверстие. В связи с этим для полного описания приведенных выше моделей, необходимо указать способ определения расхода. Для расчета расхода разработаны различные подходы [13–17]. Далее укажем на один из способов определения установившейся скорости гранулированного потока  $V_0$  и расхода  $Q$  на выходе из емкости. Для этого воспользуемся структурно-механической моделью истечения сыпучей среды, изложенной в [17]. Здесь остановимся на ключевых моментах данной модели. Вкратце, траектории зерен внутри бункера разделены на разные зоны. В данном случае цель состоит в том, чтобы сосредоточить внимание на скорости потока зерна на выходе из бункера. Поэтому здесь рассматривается описание зоны выходного потока  $D$ , ограниченной параболой (рис. 8). В этой зоне гранулированные частицы сталкиваются с другими частицами непрерывно в хаотическом движении [16–18]. Следовательно, сыпучая среда в этой зоне находится в свободнодисперсном состоянии и, согласно [7, 18] ее движение описывается уравнениями непрерывной среды. С помощью круга Мора можно показать, что для несвязного сыпучего тела граница между динамическим сводом  $C$  и зоной обрушения  $D$



**Рис. 7.** Распределения безразмерной скорости в радиальном направлении при разных значениях угла раствора: 1 –  $\alpha = \pi/6$ , 2 –  $\alpha = \pi/4$ , 3 –  $\alpha = \pi/3$ . Сплошные кривые – средняя скорость в рамках модели НС  $\omega_1 = -v_a/V$  (зависит от  $r/a$ ), штриховые кривые – скорость в рамках подхода ДС  $\omega_2 = -u/V$  (зависит от  $y/a$ ).



**Рис. 8.** Диаграмма истечения сыпучего тела в зоне выхода (согласно [17]).



**Рис. 9.** Зависимость безразмерной скорости на выходе  $W$  от угла раствора  $\alpha$  (рад) при разных значениях угла внутреннего трения сыпучей среды  $\varphi$ : 1 –  $\varphi = 15^\circ$  (песок и др.), 2 –  $\varphi = 50^\circ$  (цемент и др.).

представляет собой параболу [19] (рис. 8), высота которой  $h_p$  зависит от параметров внутреннего трения среды и определяется по формуле

$$h_p = \frac{a}{4} \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a}{4} \left( f + \sqrt{1 + f^2} \right); \quad f = \operatorname{tg} \varphi$$

Здесь  $f$ ,  $\varphi$  – коэффициент и угол внутреннего трения в сыпучей среде.

Используя на линии симметрии уравнение Бернулли в [17] получены следующие формулы для скорости истечения на линии симметрии и расхода среды на выходе

$$V_0 = \left[ \frac{2g(r_p - r_0)}{1 + \zeta - (r_0/r_p)^2} \right]^{1/2} = \left( \frac{2gh_p}{1 + \zeta - B} \right)^{1/2} = \left( \frac{agK}{1 + \zeta - B} \right)^{1/2} \quad (6.1)$$

$$Q = \frac{2}{3} a^{3/2} \left( \frac{gK}{1 + \zeta} \right)^{1/2} \frac{1 - 8\beta^{3/2}}{1 - 4\beta} \quad (6.2)$$

$$\beta = \frac{\lambda \lambda - 1}{2\lambda + 1}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 + f^2}}{f} \geq 1, \quad B = \left( 1 + K \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} \leq 1, \quad K = \frac{1}{2} \left( f + \sqrt{1 + f^2} \right),$$

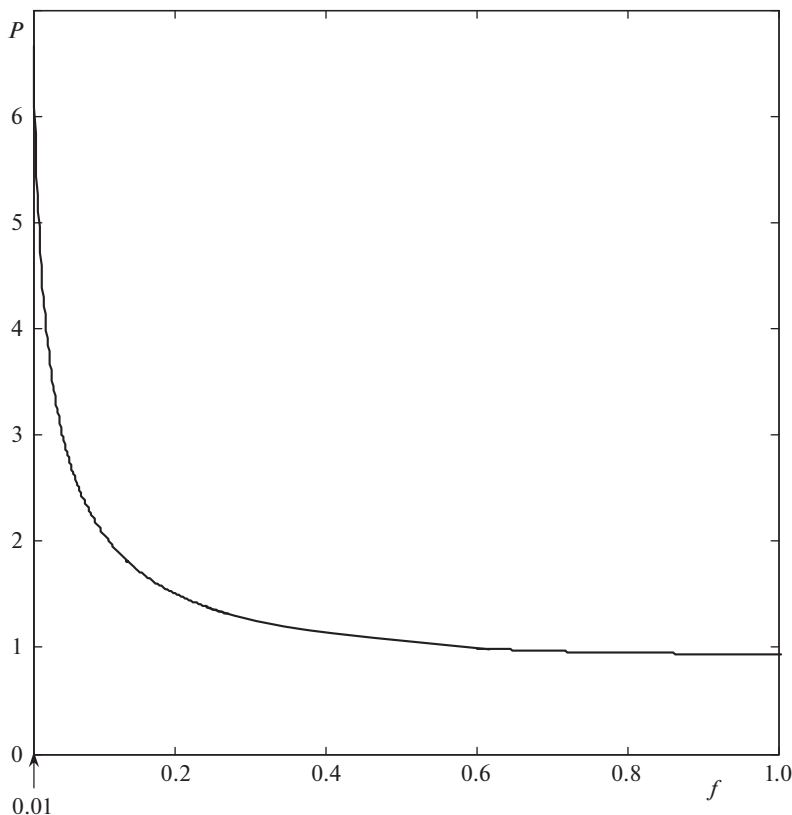


Рис. 10. Зависимость безразмерного расхода  $P$  от коэффициента внутреннего трения сыпучего тела  $f$ .

где нижние индексы  $p$  и  $0$  отвечают точкам на вершине параболы и на выходе соответственно;  $V_0$  – скорость на линии симметрии на выходе;  $\zeta$  – коэффициент местных потерь Дарси–Вейсбаха, характеризующий потери механической энергии потока сыпучей среды при столкновениях частиц между собой [20, 21]. Анализ показал, что для достаточно малых по сравнению с размерами выпускного отверстия частиц коэффициентом местных потерь механической энергии в формулах (6.1), (6.2) можно пренебречь ( $\zeta \ll 1$ ). Параметры  $V_0$  и  $Q$  удобно записать в безразмерных формах

$$W = V_0/(ag)^{1/2}, \quad P = Q/(a^{3/2}g^{1/2})$$

На рис. 9 показана зависимость безразмерной скорости истечения среды на линии симметрии  $W$  от угла раствора  $\alpha$  при разных углах внутреннего трения сыпучего тела  $\varphi$ , соответствующих некоторым характерным сыпучим средам (песок, цемент и др.). С увеличением  $\alpha$  безразмерная скорость  $W$  сначала резко падает, затем меняется достаточно плавно. Причем различие скоростей истечения разных сред с ростом  $\alpha$  постепенно увеличивается. Зависимость безразмерного расхода от коэффициента внутреннего трения  $f$  представлена на рис. 10. Видно, что безразмерный расход  $P$  с ростом  $f$  быстро уменьшается.

Таким образом, зная расход сыпучей среды из емкости нетрудно рассчитать распределение скорости внутри объема сыпучего тела (в частности, в зависимости от коэф-

фициента скольжения, коэффициента внутреннего трения сыпучей среды и т.п.) по формулам из предыдущих разделов.

**Заключение.** В рамках модели непрерывной среды изучено распределение скорости сыпучего тела при истечении из емкости с учетом эффекта сцепления со стенками. Проанализировано влияние коэффициента скольжения, характеризующего степень сцепления со стенкой, на течение гранулированной среды. Проведено сравнение скорости движения сыпучей среды при разных подходах, а именно, в рамках непрерывной среды и дискретных слоев, которое показало, что оба эти подхода дают примерно одинаковые результаты. Данное обстоятельство позволяет утверждать, что для описания характеристик течения сыпучей среды в емкости наряду с моделью, основанной на подходе непрерывной среды, вполне можно использовать в пределах допустимой погрешности простую геометрическую модель, базирующуюся на представлении сыпучей среды как дискретных слоев.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макаров Ю.И.* Аппараты для смешения сыпучих материалов. М.: Машиностроение, 1973. 216 с.
2. *Росляк А.Т., Бирюков Ю.А., Пачин В.Н.* Пневматические методы и аппараты порошковой технологии. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1990. 272 с.
3. *Першина С.В., Катыльмов А.В., Однолько В.Г., Першин В.Ф.* Весовое дозирование зернистых материалов. М.: Машиностроение, 2009. 164 с.
4. *Шваб А.В., Марценко А.А., Марценко М.С.* Моделирование гидродинамики высококонцентрированной гранулированной среды в смесительном бункере // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика, механика. 2013. № 4. С. 126–132.
5. *Шваб А.В., Марценко М.С., Рыжих Ю.Н.* Моделирование гидродинамики и процесса усреднения высококонцентрированной гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии // Инж.-физ. ж. 2011. Т. 84. № 4. С. 676–682.
6. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
7. Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений / Под ред. *Ишлинского А.Ю.* М.: Мир, 1985. 280 с.
8. *Клишин С.В., Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф.* Численное моделирование выпуска раздробленного материала методами дискретных элементов и клеточных автоматов // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли. 2013. С. 208–215.
9. *Krugger-Emden H., Simsek E., Rickelt S. et al.* Review and extension of normal force models of the Discrete Element Method // Powder Technol. 2007. V. 171. № 3. P. 157–173.
10. *Losert W., Bocquet L., Lubensky T.C., Gollub J.P.* Particle dynamics in sheared granular matter // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. № 7. P. 1428–1431.
11. *Ojha R.P., Lemieux P.-A., Dixon P.K. et al.* Statistical mechanics of a gas-fluidized particle // Nature. 2004. V. 427. P. 521–523.
12. *Antony S.J., Arowosola B., Richter L., Amanbayev T., Barakat T.* Flow behavior of grains through the dosing station of spacecraft under low-gravity environments // J. Aerospace Engng. 2017. V. 30. № 6. 04017078.
13. *Катыльмов А.В., Лукьянов П.И.* Теоретическое определение расхода сыпучего материала при свободном истечении из отверстия // Теор. основы химич. технол. 1976. Т. 10. № 1. С. 162–164.
14. *Генералов М.Б.* Истечение сыпучих материалов из аппаратов // Теор. основы химич. технол. 1985. Т. 19. № 1. С. 53–58.
15. *Лукьянов П.И.* Аппараты с движущимся зернистым слоем. М.: Машиностроение, 1974. 184 с.
16. *Богомяжких В.А., Несмиян А.Ю.* Функционирование бункеров максимального расхода в условиях сводообразующего истечения зерновых материалов. Зерноград: Азово-Черном. инж. ин-т ФГБОУ ВПО ДГАУ, 2015. 179 с.

17. Кирия Р.В. Описание процесса истечения сыпучего груза из бункера с помощью структурно-механических моделей // Системные технол. 2009. № 3 (62). С. 3–19.
18. Кирия Р.В. Кинетический подход к выводу уравнений движения сыпучих сред // Вестн. Днепропетр. гос. унив. Сер. Механика. 1999. № 2. С. 143–150.
19. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов. М.: Машиностроение, 1964. 251 с.
20. Штеренлихт Д.В. Гидравлика. М.: Энергоатомиздат, 1984. 639 с.
21. Кирия Р.В. О коэффициенте внутренних потерь при движении сыпучей среды по элементам перегрузочных узлов ленточных конвейеров // Геотехн. мех. 2003. № 41. С. 159–167.

### Modeling of Particulate Solids Expiration from a Container Taking into Account the Effect of Adhesion to the Wall

T. R. Amanbaev<sup>a,b,#</sup> and S. J. Antony<sup>c,##</sup>

<sup>a</sup> Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

<sup>b</sup> Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

<sup>c</sup> School of Chemical and Process Engineering, University of Leeds, Leeds, LS2 9JT, UK

<sup>#</sup>e-mail: tulegen\_amanbaev@mail.ru

<sup>##</sup>e-mail: s.j.antony@leeds.ac.uk

Within the framework of the approach based on the equation of a viscous fluid as a continuous medium (CM), the process of outflow of a granular medium under the action of gravity from a volume between two plates inclined to each other at a certain angle has been studied. On the boundary with a solid wall, the condition of partial slip (or adhesion) is accepted, which is described by a certain coefficient that varies from 0 to 1. In a two-dimensional setting, the distribution of the velocity of the medium inside the container is found. The influence of a change in the slip coefficient on the nature of the flow of a granular medium is analyzed. The CM approach is compared with the approach based on the description of a granular medium as discrete layers (DL). Formulas for the speed and flow rate of a granular body at the outlet of the tank are given. The dependences of these parameters on the coefficient of internal friction and the opening angle between the plates are analyzed.

*Keywords:* granular medium, container, gravity, outflow, slip coefficient, flow rate

### REFERENCES

1. Makarov Y.I. Apparatus for Mixing Bulk Materials. Moscow: Mashinostroenie, 1973. 216 p. (in Russian)
2. Roslyak A.T., Biriukov Y.A., Pachin V.N. Pneumatic Methods and Apparatus for Powder Technology. Tomsk: TSU Publ., 1990. 272 p. (in Russian)
3. Pershina S.V., Katalymov A.V., Odnol'ko V.G., Pershin V.F. Weight Batching of Granular Materials. Moscow: Mashinostroenie, 2009. 164 p. (in Russian)
4. Shvab A.V., Martsenko A.A., Martsenko M.S. Simulation of the hydrodynamics of a highly concentrated granular medium in a mixing bin // Tomsk Univ. Bull. Ser. Math., Mech., 2013, no. 4, pp. 126–132. (in Russian)
5. Shvab A.V., Martsenko M.S., Ryzhikh Y.N. Modeling the hydrodynamics and the process of averaging a highly concentrated granulated medium in powder technology apparatuses // J. Eng. Phys. Thermophys., 2011, vol. 84, art. no. 730. <https://doi.org/10.1007/s10891-011-0528-2>
6. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D.D. The Mathematical Theory of Plasticity Moscow: Fizmatlit, 2003. 704 p. (in Russian)
7. The Mechanics of Granular Media. The Theory of Rapid Movements / Ed. by Ishlinskii A. Yu. Moscow: Mir, 1985. 280 p. (in Russian)
8. Klishin S.V., Lavrikov S.B., Revuzhenko A.F. Numerical modeling of the release of crushed material by the methods of discrete elements and cellular automata // Geodynamics and stress state of the Earth's interior, 2013, pp. 208–215. (in Russian)



9. *Krugger-Emden H., Simsek E., Rickelt S. et al.* Review and extension of normal force models of the Discrete Element Method // *Powder Technol.*, 2007, vol. 171, no. 3, pp. 157–173.
10. *Losert W., Bocquet L., Lubensky T.C., Gollub J.P.* Particle dynamics in sheared granular matter // *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 7, pp. 1428–1431.
11. *Ojha R.P., Lemieux P.-A., Dixon P.K. et al.* Statistical mechanics of a gas-fluidized particle // *Nature*, 2004, vol. 427, pp. 521–523.
12. *Antony S.J., Arowosola B., Richter L., Amanbayev T., Barakat T.* Flow behavior of grains through the dosing station of spacecraft under low-gravity environments // *J. Aerospace Engng.*, 2017, vol. 30, no. 6, 04017078.
13. *Katalymov A.V., Luk'ianov P.I.* Theoretical determination of the flow rate of bulk material with free flow from the hole // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 1976, vol. 10, no. 1, pp. 162–164.
14. *Generalov M.B.* The outflow of bulk materials from the apparatus // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 1985, vol. 19, no. 1, pp. 53–58.
15. *Luk'ianov P.I.* *Moving Granular Bed Machines.* Moscow: Mashinostroenie, 1974. 184 p. (in Russian)
16. *Bogomyagkih V.A., Nesmian A.Yu.* *Functioning of Bunkers of Maximum Flow in Conditions of a Vault-Forming Outflow of Grain Materials.* Zernograd: Azov-Chernomorsk Engng. Inst. Publ., 2015. 179 p. (in Russian)
17. *Kiryay R.V.* Description of the process of expiration of bulk cargo from the bunker using structural and mechanical models // *Syst. Technol.*, 2009, no. 3(62), pp. 3–19. (in Russian)
18. *Kiryay R.V.* Kinetic approach to the derivation of equations of motion of bulk media. // *Dnepropetrovsk Univ. Bull. Ser. Mech.*, 1999, no. 2, pp. 143–150. (in Russian)
19. *Zenkov R.L.* *Bulk Cargo Mechanics.* Moscow: Mashinostroenie, 1964. 251 p. (in Russian)
20. *Shterenliht D.V.* *Hydraulics.* Moscow: Energoatomizdat, 1984. 639 p. (in Russian)
21. *Kiryay R.V.* On the coefficient of internal losses during the movement of a granular medium along the elements of the transfer units of the belt conveyor. // *Geotechn. Mech.*, 2003, no. 41, pp. 159–167. (in Russian)