УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫМ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ

В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1,], О. М. Бабешко[2,***]**

[1] Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия
[2] Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
**e-mail: babeshko41@mail.ru*
***e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*
****e-mail: babeshko49@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.03.2022 г.
После доработки 18.05.2022 г.
Принята к публикации 18.05.2022 г.

В работе впервые строится точное решение контактной задачи, поставленной на поверхности многослойной среды в четверти плоскости. Это достигается в результате применения нового универсального метода моделирования, разработанного с целью исследования и решения граничных задач для уравнений в частных производных. В данной работе метод применяется к двумерным интегральным уравнениям Винера–Хопфа в четверти плоскости, возникающим в смешанных задачах механики деформируемого твердого тела, в контактных задачах. Особенностью смешанных задач для слоистых сред является наличие мероморфных функций в преобразованиях Фурье ядер интегральных уравнений. Это обстоятельство позволяет построить точное решение смешанной задачи в четверть плоскости.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, жесткий штамп, интегральное уравнение Винера–Хопфа

DOI: 10.31857/S0032823522050046

1. Введение. Одним из основоположников теории контактных задач является член-корреспондент АН СССР Л.А. Галин [1–4], которому в текущем году исполняется 110 лет. Он одним из первых обнаружил, что теория сингулярных интегральных уравнений может найти важное применение в смешанных, контактных, задачах теории упругости, и успешно это реализовал в своих выдающихся работах. В зоне контакта задавались условия скольжения, трения, сцепления, вязкоупругого, пластического поведения. Анализируя современные исследования ученых в области контактных задач, можно видеть, что импульс, данный публикациями Л.А. Галина, получивший современное добавление, в соответствии с запросами новых технологий, остается и преумножается в прекрасных работах не только его учеников [5], но и ученых разных стран, высоко ценящих его вклад. Так, в работе [6] исследуется вопрос роли трения в проблеме разрушения материала. В работе [7] исследуется частичное скольжение в зоне контакта, в работе [8] изучается контактная задача в условиях поверхностной упругости, в работе [9] изучается для жестких параболических штампов контакт с градуированной поверхностью полупространства. В работе [10] исследуется двумерный контакт с трением функционально градиентных материалов, в [11] исследуется упругопластический контакт, в [12] решается ряд линейных контактных задач механики, в [13] изучаются контактные задачи с Кулоновским трением, в [14] изучается нелинейным подходом класс динамических контактных задач в условиях вязкоупругости. Список можно продолжить. Исследования проводятся чаще всего, численными методами, которые, далеко не всегда, способны улавливать различные тонкие свойства решений, вскрывающиеся лишь при значительном приближении к точным решениям. Примером может служить изучение методом контактных задач взаимодействия сближающихся литосферных плит. Выполнявшиеся исследования численными методами не позволили обнаружить новый тип землетрясений, выявленный точным решением смешанной задачи [15]. Решению новых задач, в частности, граничных для дифференциальных уравнений и двумерных уравнений Винера–Хопфа способствует совершенствование математического аппарата, объединение чисто теоретических топологических методов с прикладной математикой [16].

Наличие мероморфной функции в преобразовании Фурье ядра интегрального уравнения Винера–Хопфа, как и в случае дифференциальных уравнений [16], позволило найти фрагменты дифференциальных уравнений в представлении интегральных уравнений Винера–Хопфа. Это позволило найти способ сведения двумерного интегрального уравнения к одномерным.

Его применение позволяет свести интегральные уравнения в этой области к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, имеющих обратную бесконечную матрицу. Этот тип интегральных уравнений не доступен для численного решения, в связи с неограниченностью области задания уравнения, и ранее не был исследован аналитически.

Точное решение двумерного уравнения Винера–Хопфа в четверть плоскости открывает возможность построения высокоточных решений контактных задач в ограниченных областях, подобно тому, как это делалось в одномерном случае. Интегральные уравнения Винера–Хопфа имеют широкое применение в различных областях для материалов сложной реологии, в том числе, в теории прочности, дифракции, дефектоскопии, трибологии.

2. Определяющие уравнения. Интегральное уравнение контактной задачи для изотропной слоистой среды в четверти плоскости в декартовой системе координат имеет вид [17, 18].

$$\int_0^\infty\int_0^\infty k(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\varphi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1,x_2);\quad 0\le x_1,\quad x_2\le\infty$$

$$k(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}K(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\langle\alpha\mathbf{x}\rangle}d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2)\equiv K(u)=\frac{R(u)}{P(u)};\quad u=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \tag{2.1}$$

$$K(u)=\frac{R(u)}{P(u)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(u)}{P_n(u)};\quad R_n(u)=\left(u^2-z_n^2\right),\quad P_n(u)=\left(u^2-\xi_n^2\right)$$

$$K(u)=\frac{1}{u}(1+o(1)),\quad u\to\pm\infty$$

Здесь γ_1, γ_2 – контуры, лежащие на вещественной оси и отклоняющиеся от нее в динамических задачах гармонической во времени вибрации лишь обходя вещественные полюса, по малым полуокружностям, если они возникают [18].

В работе авторов [19], наверно впервые, исследовалось интегральное уравнение (2.1), которое методом факторизации было сведено к решению системы интегральных уравнений. Функции $R(u)$, $P(u)$ являются четными целыми функциями, представимыми бесконечными произведениями. Предполагается, что функции $R(u)$ и $P(u)$ являются целыми функциями первого порядка и конечного типа, то есть трансцендентными, в частности, полиномами. В принятых обозначениях целая функции $R(u)$ обращается в нуль на множествах значений и $u_n = \pm z_n$. Разрешая эти соотношения относительно переменных α_s, $s = 1,2$, имеем нули в форме $\alpha_{11m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - z_m^2}$, $\alpha_{21m\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - z_m^2}$. Соответственно, целая функция $P(u)$ имеет нули на множествах на $u_n = \pm\zeta_n$, $\alpha_{12r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_2^2 - \xi_r^2}$, $\alpha_{22r\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - \xi_r^2}$. Все нули, предполагаемые однократными, имеют точки сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях, содержащих мнимые полуоси комплексной плоскости. Для нулей приняты обозначения: плюс — принадлежность верхней полуплоскости комплексной плоскости, минус — нижней. Примеры подобных интегральных уравнений возникают в смешанных граничных задачах механики сплошных сред для слоистых областей конечной толщины [17, 18]. Например, для статических задач в случае слоя с закрепленной нижней границей или слоя, лежащего на жестком основании без трения, имеем $K_1(u)$ и $K_2(u)$ соответственно

$$K_1(u) = -\frac{2(3-4\nu)\,\mathrm{sh}\,2u - 4u}{u\left[2(3-4\nu)\,\mathrm{ch}\,2u + 4u^2 + 1 + (1-\nu)^2\right]}, \quad K_2(u) = -\frac{\mathrm{ch}\,2u - 1}{u[\mathrm{sh}\,2u + 2u]}$$

В динамическом случае для этих задач имеем

$$K_1(u) = \frac{\chi_2^2\left(\sigma_1\,\mathrm{sh}\,2\sigma_1\,\mathrm{ch}\,2\sigma_2 - \sigma_2^{-1}u^2\,\mathrm{sh}\,2\sigma_2\,\mathrm{ch}\,2\sigma_1\right)}{2\Delta_1(u)}$$

$$\Delta_1(u) = u^2\left(2u^2 - \chi_2^2\right) - \left(2u^4 - u^2\chi_2^2 + 0.25\chi_2^4\right)\mathrm{ch}\,2\sigma_1\,\mathrm{ch}\,2\sigma_2 +$$

$$+\,\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}u^2\left[2u^4 - u^2\left(2\chi_2^2 + \chi_1^2\right) + \chi_1^2\chi_2^2 + 0.25\chi_2^4\right]\mathrm{sh}\,2\sigma_1\,\mathrm{sh}\,2\sigma_2$$

$$K_2(u) = \frac{\chi_2^2\sigma_1\,\mathrm{sh}\,\sigma_1\,\mathrm{sh}\,\sigma_2}{2\Delta(u)}, \quad \Delta_2(u) = \left(u^2 - 0.5\chi_2^2\right)^2\sigma_1\sigma_2\,\mathrm{ch}\,\sigma_1\,\mathrm{sh}\,\sigma_2 - u^2\,\mathrm{sh}\,\sigma_1\,\mathrm{ch}\,\sigma_2$$

$$\sigma_n = \sqrt{u^2 - \chi_n^2}, \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}; \quad n = 1,2$$

$$\chi_1^2 = \rho(\lambda+2\mu)^{-1}\omega^2, \quad \chi_2^2 = \rho\mu^{-1}\omega^2$$

Другое представление интегрального уравнения (2.1), получаемое в результате перехода к преобразованиям Фурье для ядра и искомого решения, имеет вид

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2)\Phi(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2 = f(x_1,x_2) \tag{2.2}$$

Принятые обозначения нулей целых функций позволяют построить целые функции в форме бесконечных произведений. Построим сходящиеся четные целые функции $R(z_p)$ $P(z_p)$ в такой форме, приняв традиционные обозначения $\pm z_s = z_S^{\pm}$ [20]

$$R_m(u) = R_{m\pm}(\alpha_m)R_{m\mp}(\alpha_m), \quad R_{m\mp}(\alpha_m) = T_{m\mp}e^{\mp i\alpha_m}\prod_{s=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}\right)e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m1s\pm}}}$$

$$P_m(u) = P_{m\pm}(\alpha_m)P_{m\mp}(\alpha_m), \quad P_{m\mp}(\alpha_m) = S_{m\mp}e^{\mp i\alpha_m}\prod_{s=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}\right)e^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m2s\pm}}}$$

$$m = 1,2 \tag{2.3}$$

$$K_{+m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m-}(\alpha_m)}{P_{m-}(\alpha_m)}, \quad K_{-m}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{m+}(\alpha_m)}{P_{m+}(\alpha_m)}$$

$$T_{m\mp} = \text{const}, \quad S_{m\mp} = \text{const}; \quad m = 1, 2$$

После деления $R_m(u)$ на $P_m(u)$ дадут мероморфные функции, обозначенные $K(u)$. Их нулями являются $\pm z_{mp}$. Примем правую часть $f(x_1, x_2)$ интегрального уравнения (2.1) в форме

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\eta_1, \eta_2) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \tag{2.4}$$

Тогда для упрощения исследования и возможности построения решения для функции $f(x_1, x_2)$ достаточно в правой части взять выражение

$$\begin{gathered} Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}; \quad A = \text{const}, \quad \operatorname{Im} \eta_n = 0, \quad n = 1, 2 \\ \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}; \quad 0 \le x_1, \quad x_2 \le \infty \end{gathered} \tag{2.5}$$

Введем постоянные $A = A_1 A_2$, как коэффициенты перед каждой экспонентой, то есть $A_1 e^{-i\eta_1 x_1}$, $A_2 e^{-i\eta_2 x_2}$.

Применим для исследования и решения новый универсальный метод моделирования [16], который позволит установить общий вид решения интегрального уравнения и построить его представление.

Преобразуя представление двумерного интегрального уравнения (2.2), можно, с учетом свойств целых функций $R(u)$ и $P(u)$, записать его в виде дифференциального уравнения в частных производных

$$\prod_{s=1}^{\infty} R_s\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \varphi(x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2), \quad f_0(x_1, x_2) \equiv \prod_{s=1}^{\infty} P_s\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) f(x_1, x_2) \tag{2.6}$$

Здесь дифференциальные операторы $R_s\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ и $P_s\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ имеют вид

$$R_s\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -\left(\Delta + z_s^2\right), \quad P_s\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -\left(\Delta + \xi_s^2\right)$$

В соответствии с общей теорией, решение дифференциального уравнения (2.6), принадлежащее классу суммируемых функций, можно представить в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2) + \varphi_*(x_1, x_2)$$

Функция $\varphi_0(x_1, x_2)$ является общим решением однородного уравнения, а $\varphi_*(x_1, x_2)$ – частным решением неоднородного. Частное решение неоднородного уравнения для экспоненциальных правых частей (2.5) определяется просто и имеет для случая $f_0(x_1, x_2) = Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}$ вид

$$\varphi_*(x_1, x_2) = P(\eta_1, \eta_2) Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}$$

Общее решение $\varphi_o(x_1, x_2)$ однородного дифференциального уравнения (2.5) представимо в виде

$$\varphi_0(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_1, x_2)$$

Здесь $\varphi_s(x_1, x_2)$, $s = 1, 2, \ldots$ – общие решения уравнений

$$R_s\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\varphi_s(x_1, x_2) \equiv -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + z_s^2\right)\varphi_s(x_1, x_2) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Последнее следует из вида характеристического уравнения для дифференциального оператора $\prod_{s=1}^{\infty} R_s\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, даваемое функцией $R(u)$.

3. Метод решения. Описанные свойства интегрального уравнения, с использованием нового универсального метода моделирования [16], позволяют применить к рассматриваемому интегральному уравнению метод разделения переменных. Этот метод, в некотором смысле, является аналогом метода разделения переменных в многомерных дифференциальных уравнениях, но имеет свою специфику в интегральных уравнениях Винера–Хопфа.

Предварительно установим общий вид решения интегрального уравнения. Следуя указанному методу [16], применяемому как к дифференциальным уравнениям, так и к интегральным, будем искать общее решение $\varphi(x_1, x_2)$ дифференциальных уравнений (2.6) в форме разложения по общим решениям однородных дифференциальных уравнений (2.7) для $s = 1, 2, 3, \ldots$. Экспоненциальная подстановка $\varphi_s(x_1, x_2) = Ce^{i(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}$, где β_n, $n = 1, 2$ – произвольные параметры, внесенная в дифференциальное уравнение (2.7) позволяет на основе характеристического уравнения $\beta_1^2 + \beta_2^2 - z_s^2 = 0$ получить две группы корней

$$\left\{\beta_{11s+} = i\sqrt{\beta_2^2 - z_s^2}, \beta_2\right\}, \quad \left\{\beta_1, \beta_{21s+} = i\sqrt{\beta_1^2 - z_s^2}\right\}; \quad \operatorname{Im}\beta_{n1+} \geq 0, \quad n = 1, 2$$

Каждая группа корней зависит от β_1 или от β_2. Поэтому однородная составляющая решения дифференциального уравнения (2.7) ищется в форме

$$\varphi_{so}(x_1, x_2) = C_{s1}e^{i(\beta_{11s+}x_1 + \beta_2 x_2)} + C_{s2}e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+}x_2)}$$

Тогда общее решение интегрального уравнения (2.1) принимает вид

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) + \varphi_2(x_1, x_2)$$

Здесь приняты обозначения

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \varphi_{10}(x_1, x_2) + \varphi_{1*}(x_1, x_2), \quad \varphi_2(x_1, x_2) = \varphi_{20}(x_1, x_2) + \varphi_{2*}(x_1, x_2)$$

$$\varphi_{10}(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s1}e^{i(\beta_{11s+}x_1 + \beta_2 x_2)}, \quad \varphi_{1*}(x_1, x_2) = D_1 e^{-i\eta_1 x_1} \tag{3.1}$$

$$\varphi_{20}(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} C_{s2}e^{i(\beta_1 x_1 + \beta_{21s+}x_2)}, \quad \varphi_{2*}(x_1, x_2) = D_2 e^{-i\eta_2 x_2}$$

Воспользуемся интегральным уравнением в форме (2.2). Здесь функции D_1, D_2 и постоянные C_{s1}, C_{s2} являются неизвестными. Свойства описанных выше нулей целых функций (3) обеспечивают рядам экспонент сходимость и независимость экспоненциальных членов [21].

С учетом независимости экспоненциальных гармоник, будем искать решение в виде двух составляющих $\varphi_1(x_1, x_2)$ и $\varphi_2(x_1, x_2)$.

4. Разделение переменных в двумерном уравнении Винера–Хопфа. Рассмотрим интегральное уравнение (2.2), представленное с применением преобразований Фурье в виде

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2)\Phi(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2 = Ae^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)}; \quad 0 \leq x_1, \quad x_2 \leq \infty \tag{4.1}$$

Здесь и в дальнейшем прописными буквами обозначаются преобразования Фурье, вычисленные от строчных функций

$$\Phi(\alpha_1,\alpha_2) = \int_0^\infty \varphi(x_1,x_2)e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}dx_1dx_2$$

Для использования представления (4.1) необходимо построить преобразования Фурье $\Phi(\alpha_1,\alpha_2)$ искомого решения. Ищем $D(\eta_1,\eta_2)$ в форме произведения функций с разделенными переменными $D_1(\eta_1)D_2(\eta_2)$.

Вычисления позволяют получить для фрагментов решений следующие представления

$$\Phi_{10}(\alpha_1,\alpha_2):\quad \int_0^\infty\int_0^\infty C_{s1}e^{i(\beta_{11s+}x_1+\beta_2x_2)}e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}dx_1dx_2 = -\frac{2\pi C_{s1}\delta(\beta_2+\alpha_2)}{i(\beta_{11s+}+\alpha_1)}$$

$$\Phi_{1*}(\alpha_1,\alpha_2):\quad \int_0^\infty\int_0^\infty D(\eta_1)e^{-i\eta_1x_1}e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}dx_1dx_2 = -\frac{2\pi D_1(\eta_1)\delta(\alpha_2)}{i(\alpha_1-\eta_1)}$$

$$\Phi_{20}(\alpha_1,\alpha_2):\quad \int_0^\infty\int_0^\infty C_{s2}e^{i(\beta_1x_1+\beta_{21s+}x_2)}e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}dx_1dx_2 = -\frac{2\pi C_{s2}\delta(\beta_1+\alpha_1)}{i(\beta_2+\beta_{21s+})}$$

$$\Phi_{2*}(\alpha_1,\alpha_2):\quad \int_0^\infty\int_0^\infty D(\eta_2)e^{-i(\eta_2x_2)}e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}dx_1dx_2 = -\frac{2\pi D_2(\eta_2)\delta(\alpha_1)}{i(\alpha_2-\eta_2)}$$

Используя приведенные представления и вычислив интегралы, получаем следующие выражение интегрального уравнения (2.5)

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2)\Phi_{10}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2 = \sum_{s=1}^\infty \frac{C_{s1}e^{-i(\alpha_{12r-}x_1-\beta_2x_2)}}{(\alpha_{12r-}+\beta_{11s+})\left[K^{-1}(\alpha_{12r-},\beta_2)\right]'},$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2)\Phi_{1*}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2 =$$

$$= \sum_{s=1}^\infty \frac{2\pi D_1(\eta_1)C_{s1}e^{-i(\alpha_{12r-}x_1)}}{(\alpha_{12r-}-\eta_1)[K^{-1}(\alpha_{12r-},0)]'} + K(\eta_1,0)D_1(\eta_1)e^{-i(\eta_1x_1)}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2)\Phi_{20}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2 = \sum_{s=1}^\infty \frac{C_{s2}e^{-i(-\beta_1x_1+\alpha_{22r-}x_2)}}{(\alpha_{22r-}+\beta_{21s+})\left[K^{-1}(\beta_1,\alpha_{22r-})\right]'},$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha_1,\alpha_2)\Phi_{2*}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2 =$$

$$= \sum_{s=1}^\infty \frac{2\pi D_2(\eta_2)C_{s2}e^{-i(\alpha_{22r-}x_2)}}{(\alpha_{22r-}-\eta_2)[K^{-1}(0,\alpha_{22r-})]'} + K(0,\eta_2)D_2(\eta_2)e^{-i(\eta_2x_2)}$$

Отсюда из требования равенства соотношений слева правым частям интегрального уравнения, находим

$$D_1(\eta_1) = K^{-1}(\eta_1,0)A_1,\quad D_2(\eta_2) = K^{-1}(0,\eta_2)A_2$$

После преобразований это приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, свойственных одномерным уравнениям Винера–Хопфа и детально изученным в [17, 18].

$$\sum_{m=1}\frac{C_{m1}}{(\alpha_{12r+}-\beta_{11m+})}=\frac{A_1}{(\alpha_{12r+}+\eta_1)K(\eta_1,0)},\quad \sum_{m=1}\frac{C_{m2}}{(\alpha_{22r+}-\beta_{21m+})}=\frac{A_2}{(\alpha_{22r+}+\eta_2)K(0,\eta_2)}$$

Запишем операторы бесконечных систем, стоящих слева в матричном виде

$$A=\|a_{rm}\|=\left\|\frac{1}{\xi_r-z_m}\right\|$$

Для них в [17, 18] построены двусторонние обратные бесконечные матрицы, имеющие вид

$$A^{-1}=\|\tau_{gr}\|,\quad \tau_{gr}=\frac{1}{K'_+(-z_g)(\xi_r-z_g)\left[K_+^{-1}(-\xi_r)\right]'}$$

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I,\quad \tau_{gr}a_{rm}=\begin{cases}1\ldots g=m\\0\ldots g\neq m\end{cases}$$

В рассматриваемом случае эти соотношения приводят к равенствам

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{K'_{+1}(-\beta_{11g+},\beta_2)(\alpha_{12r+}-\beta_{11g+})\left[K_{+1}^{-1}(-\alpha_{12r+},\beta_2)\right]'(\alpha_{12r+}-\beta_{11s+})}=\begin{cases}1\ldots g=s\\0\ldots g\neq s\end{cases}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{K'_{+2}(\beta_1,-\beta_{21g+})(\alpha_{22r+}-\beta_{21g+})\left[K_{+}^{-1}(\beta_1,-\alpha_{22r+})\right]'(\alpha_{22r+}-\beta_{21s+})}=\begin{cases}1\ldots g=s\\0\ldots g\neq s\end{cases}$$

Применяя обратные матрицы, получаем следующее представление решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$C_{g1}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{K'_{+1}(-\beta_{11g+},\beta_2)(\alpha_{12r+}-\beta_{11g+})\left[K_{+1}^{-1}(-\alpha_{12r+},\beta_2)\right]'}\frac{A_1}{(\alpha_{12r+}+\eta_1)K(\eta_1,0)}$$

$$C_{g2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{K'_{+2}(\beta_1,-\beta_{21g+})(\alpha_{22r+}-\beta_{21g+})\left[K_{+2}^{-1}(\beta_1,-\alpha_{22r+})\right]'}\frac{A_2}{(\alpha_{22r+}+\eta_2)K(0,\eta_2)}$$

Ряды суммируются в интегралы [5] и принимают вид

$$C_{g1}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{K_{+1}(\xi,\beta_2)}{K'_{+1}(-\beta_{11g+},\beta_2)(-\xi-\beta_{11g+})}\frac{A_1}{(-\xi+\eta_1)K(\eta_1,0)}d\xi$$

$$C_{g2}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{K_{+2}(\beta_1,\xi)}{K'_{+2}(\beta_1,-\beta_{21g+})(-\xi-\beta_{21g+})}\frac{A_2}{(-\xi+\eta_2)K(0,\eta_2)}d\xi$$

Используя представление (3.1) и, применив свертывание рядов в интегралы, получим представление решений, справедливое для данных частных значений параметров β_1, β_2, которое имеет вид

$$\varphi_1(x_1,x_2,\beta_2,\eta_1)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_3}\frac{K_{+1}(\xi,\beta_2)}{K_{+1}(\lambda,\beta_2)(-\xi+\lambda)}\frac{A_1}{(-\xi+\eta_1)K(\eta_1,0)}e^{i(-\lambda x_1+\beta_2x_2)}d\xi d\lambda+\frac{A_1}{K(\eta_1,0)}e^{-i\eta_1x_1}$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,\beta_1,\eta_2) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_3}\frac{K_{+2}(\beta_1,\xi)}{K_{+2}(\beta_1,\lambda)(-\xi+\lambda)}\frac{A_2}{(-\xi+\eta_2)K(0,\eta_2)}e^{i(\beta_1x_1-\lambda x_2)}d\xi d\lambda + \frac{A_2}{K(0,\eta_2)}e^{-i\eta_2x_2}$$

Примем во внимание, что эти вещественные параметры имеют диапазон изменения $|\beta_n| \le \infty$, а интегральные уравнения являются линейными. Для построения решения, справедливого для любых вещественных значений параметров β_1, β_2, проинтегрируем полученные функции по диапазонам изменения параметров. В результате решение интегрального уравнения Винера–Хопфа (2.5) имеют представление в форме

$$\varphi(x_1,x_2,\eta_1,\eta_2) = \varphi_1(x_1,x_2,\eta_1) + \varphi_2(x_1,x_2,\eta_2)$$

$$\varphi_1(x_1,x_2,\eta_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x_1,x_2,\beta_2,\eta_1)d\beta_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_3}\frac{K_{+1}(\xi,\beta_2)}{K_{+1}(\lambda,\beta_2)(\xi-\lambda)}\frac{A_1}{(\xi-\eta_1)K(\eta_1,0)}e^{i(-\lambda x_1+\beta_2x_2)}d\xi d\lambda d\beta_2 + \frac{A_1}{K(\eta_1,0)}e^{-i\eta_1x_1} \qquad (4.2)$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,\eta_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x_1,x_2,\beta_1,\eta_2)d\beta_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_3}\frac{K_{+2}(\beta_1,\xi)}{K_{+2}(\beta_1,\lambda)(\xi-\lambda)}\frac{A_2}{(\xi-\eta_2)K(0,\eta_2)}e^{i(\beta_1x_1-\lambda x_2)}d\xi d\lambda d\beta_1 + \frac{A_2}{K(0,\eta_2)}e^{-i\eta_2x_2}$$

Решение для произвольной правой части $f(x_1,x_2)$ уравнения (2.1) получаются, с учетом (2.4), в результате вычисления интеграла при $A_1 = A_2 = 1$

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,x_2,\eta_1,\eta_2)A(\eta_1,\eta_2)e^{-i(\eta_1x_1+\eta_2x_2)}d\eta_1d\eta_2$$

Здесь функции $\varphi_1(x_1,x_2)$, $\varphi_2(x_1,x_2)$ берутся из формулы (4.2).

Вывод. В работе впервые построена формула, позволяющая решать уравнение Винера–Хопфа в четверть плоскости. Она зависит только от аналитических свойств, именно, факторизационных свойств функций, входящих в описание формулы. Таким образом, возможно, установлен общий вид решения уравнения Винера–Хопфа в четверть плоскости, справедливый для более широкого класса функций, а не только имеющих мероморфные функции в представлении ядра. Этот результат дополняет результат подхода, изложенного в работе [19].

Благодаря развитым в [17, 18] подходам, этот метод позволяет исследовать контактные задачи не только в четверть плоскости, но и в некоторых ограниченных двумерных областях.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22-29-00213.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 206 с.
2. *Галин Л.А.* Смешанная задача теории упругости с силами трения для полуплоскости // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. № 3. С. 88–93.
3. *Галин Л.А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
4. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
5. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.

6. *Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R.* Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc. 2015. A 471. Iss. 2180: Art. No. 20150271.
7. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory, II-Examples // Int. J. Solids Struct. 1998. V. 35. P. 2349–2378.
8. *Zhou S., Gao X.L.* Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2013. V. 64. P. 145–166.
9. *Guler M.A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci. 2007. V. 49. P. 161–182.
10. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. Mech. A/Solids. 2007. V. 26. P. 171–188.
11. *Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribol. Int. 2007. V. 40 (4). P. 574–579.
12. *Almqvist A.* An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem // http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216.
13. *Andersson L.E.* Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // Appl. Math. Optim. 2000. V. 42. P. 169–202.
14. *Cocou M.* A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // Nonlin. Anal.: Real World Appl. 2015. V. 22. P. 508–519.
15. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mech. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // Докл. РАН. 2021. Т. 499. С. 21–26. https://doi.org/10.31857/S2686740021040039
17. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости М.: Наука, 1974. 456 с.
18. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
19. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Метод блочного элемента для интегральных уравнений контактных задач в клиновидной области // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 2. С. 133–140. https://doi.org/10.15372/PMTF20170214
20. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.
21. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 537 с.

The Exact Solution by the Universal Method Modeling of the Contactproblems in the Quarter Plane of a Multilayer Medium

V. A. Babeshko[a,b,#], **O. V. Evdokimova**[a,##], **and O. M. Babeshko**[b,###]

[a] *Federal Research Centre the Southern Scientific Centre RAS, Rostov-on-Don, Russia*
[b] *Kuban State University, Krasnodar, Russia*
[#] *e-mail: babeshko41@mail.ru*
[##] *e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*
[###] *e-mail: babeshko49@mail.ru*

In this paper, for the first time, an exact solution of the contact problem posed on the surface of a multilayer medium in a quarter plane is constructed. This is achieved as a result of the application of a new universal modeling method developed for the purpose of studying and solving boundary value problems for partial differential equations. In this paper, the method is applied to two-dimensional Wiener–Hopf integral equations in the quarter plane arising in mixed problems of deformable solid mechanics, in contact problems. A feature of mixed problems for layered media is the presence of meromorphic functions in Fourier transforms of the kernels of integral equations.

As in differential equations, this circumstance made it possible to find fragments of differen-

tial equations in the representation of Wiener–Hopf integral equations, and to find a way to reduce a two-dimensional integral equation to one-dimensional ones.
Its application makes it possible to reduce integral equations in this field to infinite systems of linear algebraic equations having an inverse infinite matrix. This type of integral equations is not available for numerical solution, due to the unlimited scope of the equation, and has not been studied analytically before.
The exact solution of the two-dimensional Wiener–Hopf equation in a quarter plane opens up the possibility of constructing high-precision solutions to contact problems in limited domains, just as it was done in the one-dimensional case.
Wiener–Hopf integral equations are widely used in various fields for materials of complex rheology, including strength theory, diffraction, flaw detection, tribology.

Keywords: contact problem, block element, rigid stump, Wiener–Hopf integral equation

REFERENCES

1. *Galin L.A.* Contact Problems of Elasticity Theory. Moscow: Gostekhizdat, 1953. 206 p.
2. *Galin L.A.* Mixed problem of elasticity theory with friction forces for a half-plane // Dokl. AS USSR, 1943, vol. 39, no. 3, pp. 88–93.
3. *Galin L.A.* Stamp indentation in the presence of friction and adhesion // PMM, 1945, vol. 9, iss. 5, pp. 413–424.
4. *Galin L.A.* Contact Problems of the Theory of Elasticity and Viscoelasticity. Moscow: Nauka, 1980. 303 p.
5. *Goryacheva I.G., Dobychin M.N.* Contact Problems of Tribology. Moscow: Mashinostr., 1988. 256 p.
6. *Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R.* Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc., 2015, A471, iss. 2180, art. no. 20150271.
7. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory, II-Examples // Int. J. Solids Struct., 1998, vol. 35, pp. 2349–2378.
8. *Zhou S., Gao X.L.* Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2013, vol. 64, pp. 145–166.
9. *Guler M.A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci., 2007, vol. 49, pp. 161–182.
10. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. Mech. A/Solids, 2007, vol. 26, pp. 171–188.
11. *Almqvist A., Sahlin F., Larssonv R., Glavatskih S.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribol. Int., 2007, vol. 40 (4), pp. 574–579.
12. *Almqvist A.* An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem // http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216
13. *Andersson L.E.* Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // Appl. Math. Optim., 2000, vol. 42, pp. 169–202.
14. *Cocou M.* A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // Nonlin. Anal.: Real World Appl., 2015, vol. 22, pp. 508–519.
15. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mech., 2018, vol. 229, no. 5, pp. 2163–2175. hpps//doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0
16. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Fractal properties of block elements and a new universal modeling method // Dokl. Phys., 2021, vol. 66, no. 8, pp. 218–222.
17. *Vorovich I.I., Alexandrov V.M., Babeshko V.A.* Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1974. 456 p. (in Russian)
18. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains. Moscow: Nauka, 1979. 320 p. (in Russian)
19. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Block element method for integral equations of contact problems in a wedge–shaped domain // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2017, vol. 58, no. 2, pp. 133–140. (in Russian) DOI: 10.15372/PMTF20170214
20. *Markushevich A.I.* Theory of Analytic Functions. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1968. 624 p. (in Russian)
21. *Leontiev A.F.* Rows of Exponents. Moscow: Nauka, 1976. 537 p. (in Russian)