

УДК 539.374+539.214

## К РАСЧЕТАМ БОЛЬШИХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

© 2022 г. А. С. Бегун<sup>1,2,\*</sup>, А. А. Буренин<sup>1,\*\*</sup>, Л. В. Ковтаник<sup>1,2,\*\*\*</sup><sup>1</sup> Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия<sup>2</sup> Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия\*e-mail: [ustinova@iacp.dvo.ru](mailto:ustinova@iacp.dvo.ru)\*\*e-mail: [aab@imim.ru](mailto:aab@imim.ru)\*\*\*e-mail: [lk@iacp.dvo.ru](mailto:lk@iacp.dvo.ru)

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.

После доработки 15.06.2022 г.

Принята к публикации 15.06.2022 г.

Предлагается метод и обсуждаются результаты расчетов в связанной задаче теории больших деформаций о деформировании материала цилиндрического слоя, удерживаемого между жесткими цилиндрическими поверхностями. Материал слоя принимается упруговязкопластическим, контакт его с шероховатыми границами при повороте внешней из них происходит с трением, порождающим тепло, теплотворным считается и необратимое деформирование. Рассчитывается полный цикл процесса квазистатического деформирования от его начала до полной разгрузки и остывания слоя материала. Указываются моменты времени начала и окончания скольжения материала вдоль его жесткой граничной поверхности, начала и окончания его пристеночного вязкопластического течения.

*Ключевые слова:* упругость, пластичность, вязкопластическое течение, большие деформации, теплопроводность, связанное термдеформирование

**DOI:** 10.31857/S0032823522050058

**1. Введение.** В каждом термодинамическом процессе параметры состояния задаются [1] дифференциальными уравнениями своего изменения (переноса, кинетическими уравнениями). Термодинамический процесс деформирования тел в таком своем качестве не является исключением. В общем случае этот процесс является необратимым и неравновесным [2]. С целью составления математической модели процесса деформирования полные деформации, которые возможно измерить экспериментально, приходится разделить на обратимую и необратимую составляющие. Данное разделение необходимо является гипотетическим, поскольку эти составляющие опытно неизмеримы. Но именно такие составляющие предстают в качестве термодинамических параметров состояния [2, 3] и для них необходимо указать дифференциальные уравнения их изменения. К этим основным термодинамическим параметрам состояния процесса деформирования могут добавляться иные, позволяющие учитывать специфические особенности процесса, например, повреждаемость [4, 5], но в таком случае добавляются и соответствующие дифференциальные уравнения изменения для добавляемых параметров состояния [5, 6].

Кинематический характер вводимых термодинамических параметров состояния, коими являются обратимые и необратимые составляющие полных деформаций, неизбежно приводит и к трудностям при записи для них дифференциальных уравнений их

изменения. Наряду с источниками (скоростями изменения) этих составляющих деформаций, дифференциальные уравнения изменения обязаны включать в себя потоковые слагаемые [2], определяющие взаимозависимость параметров состояния в процессе деформирования [2, 3]. Для источников в уравнениях изменения термодинамических параметров состояния в согласии с уравнением баланса энтропии формулируются определяющие законы (упругости, пластичности, ползучести и др.), а потоковые слагаемые обязаны обеспечить геометрическую корректность кинематики построенной теории больших деформаций. Основные трудности связаны как раз с последним обстоятельством и именно в этом допускались основные неточности в самых ранних построениях кинематики больших деформаций упругопластических материалов. Геометрически безупречная такая кинематика впервые, по-видимому, была построена в [7] на основе так называемого “мультипликативного” разделения полных деформаций на свои обратимую и необратимую составляющие. Основанием для данного разделения послужила гипотеза о взаимно однозначном соответствии каждому текущему состоянию тела наряду с недеформированным состоянием еще одного гипотетического состояния, когда в теле отсутствуют обратимые деформации (состояние разгрузки) и напряжения.

Последующее развитие данного подхода в построении кинематики больших упругопластических деформаций обсуждалось в [8]. Из-за широкого его распространения до настоящего времени уделим ему некоторое внимание. Имеются в “мультипликативном” подходе очевидные нестыковки. Состоят они в неединственности гипотетического состояния разгрузки получаемого предельным переходом при неограниченном разбиении тела на элементарные объемы с последующим снятием с них нагрузок. В качестве дифференциальных уравнений изменения термодинамических параметров состояния, а ими остаются обратимые и необратимые деформации, предлагается принять выбранные объективные производные составляющих полных деформаций. Задача “выбора” данных производных [9] оказывается задачей “выбора” взаимодействия между обратимыми и необратимыми деформациями в процессе деформирования. Для решения последней задачи имеется достаточное число уточняющих предложений [10–15], включая предложения по учету деформационной анизотропии [16, 17].

Несомненным достоинством “мультипликативного” разделения полных деформаций на их составляющие является геометрическая корректность построенной на такой основе кинематики конечных упругопластических деформаций. Однако, как ни странно, именно в этом заключается и основной недостаток этого подхода к построению теории. Необходимость постоянной отсылки в процессе решения задач теории к гипотетическому разгрузочному состоянию не позволяет получить такие решения даже в простейших одномерных случаях. Известны только многочисленные приближенные численные решения [12, 15, 18–24]. Попытки разрешить такие задачи, формулируя их в скоростях перемещений и деформаций, с необходимостью приводят к задаче “выбора” объективной производной по времени от тензора напряжений [20, 24]. В [25] исследовались решения, получаемые при разном “выборе” данных производных (Зарембо–Яумана, Грина–Нагди, Ли и др.). При таком выборе метода решений не исключено получение ошибочного решения [26]. Необходимо отметить публикации [27–31] отечественных авторов, предлагающие теории больших упругопластических деформаций с кинематикой, отличной от способа “мультипликативного” разделения деформаций на обратимые (упругие) и необратимые (пластические, вязкопластические) их составляющие.

Разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие с помощью формулирования для них дифференциальных уравнений их изменения на основе представлений [2, 28] было предложено в [32]. Предполагалось, что такое “простое” разделение получит свое обобщение в работах других авторов, но этого не последовало. Здесь кратко повторим этапы построения данной модели на примере ее

связанного варианта с температурными эффектами. Представляется это важным для заинтересованного читателя. Укажем также особенности решения в рамках такой модели термоупругопластического деформирования конкретной краевой задачи теории. Заметим, что при определении обратимых и необратимых деформаций записью для таких термодинамических параметров состояния дифференциальных уравнений их изменения получили свое решение, включая точные, целый ряд одномерных краевых задач теории, часть их составили содержание [3]. В [33–36] решается задача об изменениях в механизме производства необратимых деформаций на упругопластических и упруговязкопластических границах, продвигающихся по деформируемым материалам. Связанные задачи теории больших упруговязкопластических деформаций, когда необратимое деформирование порождает тепло, рассматривались в [37–40]. Здесь рассмотрим еще одну такую задачу.

**2. Принимаемая модель процесса деформирования.** Движение точек деформируемого материала зададим в пространственных переменных Эйлера

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  – векторы, указывающие место точек деформируемого тела в текущем и свободном его состоянии соответственно,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений. Для тензора дисперсии  $\mathbf{a} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial \mathbf{x}$  и метрического тензора  $\mathbf{g} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T$  имеем уравнение их изменения [3, 9]

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d\mathbf{g}}{dt} + \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g} \cdot \nabla^T \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.2)$$

Во введенных обозначениях “мультипликативное” разделение полных деформаций на обратимую (упругую)  $\mathbf{e}$  и необратимую (пластическую)  $\mathbf{p}$  составляющие связано [7, 9, 22] со следующим представлением для метрического тензора

$$\mathbf{g} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{p})$$

Считая тепловое расширение–сжатие также обратимым процессом, обобщим последнее соотношение в форме

$$\mathbf{g} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{m}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{p}); \quad \mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \theta \mathbf{I}, \quad \theta = T_0^{-1}(T - T_0)$$

Здесь  $T$ ,  $T_0$  – текущая температура и температура свободного состояния тела (комнатная температура),  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор. Тензоры  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{p}$  приобретают механический смысл в качестве обратимых и необратимых деформаций процесса деформирования за счет принятия гипотезы о существовании единственного состояния полной разгрузки.

Отказываясь от назначенного механического смысла  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{p}$ , то есть от принятия гипотезы разгрузочного состояния, запишем [28]

$$\mathbf{g} = (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \quad (2.3)$$

В (2.3)  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{p}$  уже нельзя называть обратимыми и необратимыми деформациями. Что это такое и почему для них оставлены обозначения с ясным механическим смыслом выясним далее, а пока (2.3) некоторое алгебраическое соотношение, способное вместе с (2.2) привести к дифференциальным уравнениям изменения

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \nabla \mathbf{v} - \mathbf{b} - \mathbf{m} \cdot \nabla^T \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}^T, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{b}^T) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}^T - \mathbf{b} \cdot \mathbf{p}^T \quad (2.4)$$

В (2.4) введены обозначения

$$\mathbf{b} = \mathbf{Y}^{-1} \frac{d\mathbf{Y}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{Y} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m})^T, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T)$$

Следовательно  $\mathbf{p}$  – симметричный тензор. Для того, чтобы тензор  $\mathbf{m}$  был симметричным необходимо в согласии с первым равенством из (2.4) потребовать

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}) - (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b}^T = (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \nabla \mathbf{v} - (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b}^T \quad (2.5)$$

Равенство (2.5) можно рассматривать в качестве тензорного уравнения для поиска такого  $\mathbf{b}$ , чтобы  $\mathbf{m}$  оказался симметричным тензором. Решение (2.5) было построено А.И. Лурье [41] и имеет вид

$$\mathbf{b} = \Phi + (\mathbf{I} \cdot \mathbf{m}) \cdot \mathbf{h} \quad (2.6)$$

Здесь  $\mathbf{h}$  произвольный симметричный тензор. Кососимметричный  $\Phi = -\Phi^T$  тензор вычисляется зависимостям

$$\begin{aligned} \Phi &= \omega + \mathbf{z}, \quad \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} + \omega; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \quad \omega = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = C^{-1}(B^2((\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m})) \\ B &= 2 - M_1, \quad C = 8 - 8M_1 + 3M_1^2 - M_2 - \frac{1}{3}M_1^3 + \frac{1}{3}M_3 \\ M_2 &= \text{tr } \mathbf{m}, \quad M_3 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \end{aligned}$$

Исключая с помощью (2.6) из (2.4) неизвестный в них тензор  $\mathbf{b}$ , приходим к дифференциальным зависимостям

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{h} - \Phi + \omega - \mathbf{m} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{h}) + (\Phi + \mathbf{h}) \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{m} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{h} - \frac{1}{2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}) + (\Phi - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot (\Phi - \mathbf{h}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Во всех вышеприведенных кинематических соотношениях неизвестным остается произвольный симметричный тензор  $\mathbf{h}$ . Если положить его равным нулю, то получим

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \Phi \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \Phi = 0 \quad (2.8)$$

Замечаем, что дифференциальное соотношение (2.8) можно рассматривать в качестве объективной производной по времени от тензора  $\mathbf{p}$ . Она обратится в производную Зарембо–Яумана [42] если только положить равным нулю ( $\mathbf{z} = 0$ ) нелинейную составляющую тензора вращений  $\Phi$ . Равенство (2.8) тогда означает, что тензор  $\mathbf{p}$  неизменен в условиях  $\mathbf{h} = 0$ . Если считать, что  $\mathbf{p}$  – необратимые деформации, то  $\mathbf{h} = 0$  оказывается условием обратимого деформирования в условиях предваряющих пластическое течение и при разгрузке. Отметим, что такое деформирование кинематически определено. В условиях пластического течения для определенности кинематики следует указать тензор  $\mathbf{h}$ , что только из кинематических соображений невозможно. При разгрузке ( $\mathbf{h} = 0$ ) согласно (2.8) изменяются компоненты неизменного тензора  $\mathbf{p}$  и их изменение нелинейно зависит от изменений обратимых деформаций ( $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) \neq 0$ ).

При пластическом течении  $\mathbf{h} \neq 0$ . С целью определения механического смысла до сих пор произвольного тензора  $\mathbf{h}$  рассмотрим следствие закона сохранения энергии

$$\rho \frac{d\gamma}{dt} + \text{div } \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.9)$$

Здесь  $\gamma$  – плотность распределения внутренней энергии,  $\mathbf{q}$  – вектор потока тепла,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений. Если ввести иной термодинамический потенциал  $\Psi = \gamma - TS$  (плотность распределения свободной энергии) и предположить, что  $\Psi = \Psi(\mathbf{m}, T)$ , то из (2.9) можно получить [3]

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.11)$$

Упрощающее предположение о том, что термодинамический потенциал  $\Psi = \Psi(\mathbf{m}, T)$  не зависит от необратимых деформаций, является гипотетическим, позволяющем разделить консервативную и диссипативную составляющие процесса деформирования. Оно используется в абсолютном большинстве публикаций [9, 11, 18, 22] посвященных расчетам больших деформаций. В (2.11)  $s$  – плотность распределения энтропии,  $\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}$  – поток энтропии,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{h}$  – тензор скоростей изменения необратимых (в нашем случае пластических) деформаций  $\mathbf{p}$ . Таким способом тензор  $\mathbf{h}$  однозначно связывается с тензором  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  и дифференциальные уравнения (2.7) приобретают свою окончательную форму

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{m}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{2} \left( (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{z}) \right) \\ \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Производная по времени в (2.12) задается зависимостями (2.8). Для тензора полных деформаций Альманси  $\mathbf{d}$  следует его представление через обратимую  $\mathbf{m}$  и необратимую  $\mathbf{p}$  составляющие

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \quad (2.13)$$

Отсюда тензором обратимых деформаций следовало бы называть тензор  $\mathbf{c} = \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$ . Однако использование в качестве обратимых деформаций только главной линейной части последнего привело к значительным удобствам в записи дифференциального уравнения изменения обратимых деформаций (2.12) и аналога формулы Мурнагана (2.10) в областях необратимого деформирования и разгрузки. Далее будет рассматриваться случай, в котором изменение объема деформируемого материала задается только его тепловым расширением, а механически он остается несжимаемым. В этом случае из (2.10) следует [3]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -P_1 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), \quad \text{где } \mathbf{p} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} &= -P_2 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad \text{где } \mathbf{p} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

В (2.14)  $P_1, P_2$  – добавочные неизвестные функции гидростатического давления,  $W = W(\mathbf{m}, \theta) = \rho_0 \Psi(\mathbf{m}, T)$  – термоупругий потенциал. Полагая деформируемый материал изотропным и механически несжимаемым, для последнего принимаем наиболее простое представление [3]

$$\begin{aligned} W &= W(J_1, J_2, \theta) = -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \\ &\quad + \nu_2 \theta^2 - \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots \\ J_1 &= \begin{cases} L_k & \text{при } \mathbf{p} = 0 \\ I_k & \text{при } \mathbf{p} \neq 0 \end{cases} \\ L_1 &= \operatorname{tr} \mathbf{d}, \quad L_2 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}, \quad I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{c}, \quad I_2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь  $\mu$  – модуль сдвига,  $b, \chi, \nu_m, (m = 1, 2, \dots, 6)$ , – термомеханические постоянные [43]. Если в уравнении баланса энтропии (2.11) закон теплопроводности принять в

форме Фурье, то с учетом (2.15) получаем уравнение теплопроводности. В областях, деформирующихся по-разному, это уравнение имеет различия в своей записи:

в области обратимого деформирования, предваряющей пластическое течение

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{d}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{d} = g \Delta \theta \quad (2.16)$$

в пластической области

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \cdot \mathbf{d} = g \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.17)$$

в области разгрузки

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{c} = g \Delta \theta \quad (2.18)$$

$$\beta_1 = \frac{\nu_2(1 - 3\alpha T_0) - 3\nu_6}{\nu_2}, \quad \beta_2 = -\frac{\nu_3}{\nu_2}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_5}{\nu_2}$$

Здесь  $g$  – коэффициент температуропроводности.

В качестве пластического потенциала (условия течения) далее используется следующее обобщение условия пластичности Треска–Сен-Венана [3, 43]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p| \quad (2.19)$$

$$k = k_0 \left( 1 - \frac{\theta^2}{\theta_m^2} \right); \quad \theta_m = (T_m - T_0) T_0^{-1}$$

В (2.19)  $\sigma_j, \varepsilon_k^p$  – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций;  $k, k_0$  – текущий предел пластического течения и его значение при комнатной температуре;  $T_m$  – температура плавления деформируемого материала;  $\eta$  – коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению. Замыкаем построенную математическую модель деформирования принятием принципа максимума Мизеса [44] с формулированием ассоциированного закона пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \xi \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2\eta |\varepsilon_k^p| - 2k = 0; \quad \xi > 0 \quad (2.20)$$

**2. Начальное обратимое деформирование.** Пусть материал, термомеханические свойства которого задаются зависимостями, представленными ранее, составляет цилиндрический слой, ограниченный поверхностями  $r = r_0$  и  $r = R$  ( $r_0 < R$ ). Цилиндр  $r \leq r_0$  полагаем жестко закрепленным, а граничная поверхность слоя  $r = R$  поворачивается вокруг центральной оси. До момента начала процесса деформирования деформации в материале слоя отсутствуют, а напряженное состояние задается единственным параметром начального поджатия:  $\sigma_{rr}(r_0, 0) = \sigma_0$ . Таким образом, основными искомыми переменными задачи оказываются угол закручивания  $\psi = \psi(r, t)$  и угловая скорость  $\omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega(r, t)$ . Кинематические начальные условия, таким образом, являются однородными:  $\psi(r, 0) = 0$  и  $\omega(r, 0) = 0$ . Граничные условия задачи зададим в форме

$$\psi_R = \psi(R, t) = \begin{cases} at^2 & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \\ at_1t - \frac{1}{2}at_1^2 & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 \\ at_1t - \frac{1}{2}a_1(t - t_2)^2 - \frac{1}{2}at_1^2 & \text{при } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь  $a, a_1, t_1, t_2, t_3$  – задаваемые параметры задачи.

На первоначальном этапе процесса деформирования контакт материала с жесткими стенками осуществляется согласно закону сухого трения покоя

$$\begin{aligned} |\sigma_{r\varphi}| \leq f_0 |\sigma_{rr}| \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и} \quad r = R \\ \omega(r_0, t) = 0, \quad \psi(r_0, t) = 0, \quad \omega(R, t) = \omega_R, \quad \psi(R, t) = \psi_R \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $f_0$  – коэффициент трения покоя. Кинематические зависимости в данном случае позволяют записать

$$\begin{aligned} u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t) \\ d_{rr} = -\frac{1}{2} r^2 \psi_{,r}^2 = -2d^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \psi_{,r} = d \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для компонент тензора напряжений согласно (2.14) и (2.15) можно получить

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -P_1 - 2(\mu + b)d^2 = -\tau, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\tau + 2\mu d^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu d \quad (3.4)$$

Здесь записаны компоненты тензора напряжений с точностью до слагаемых второго порядка по упругим деформациям. Уравнения равновесия

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = 0 \quad (3.5)$$

с помощью (3.3) интегрируются, и решение такой изотермической задачи записывается в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0 \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \psi = \frac{c}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \\ \omega = \frac{\dot{c}}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \dot{c} = \frac{dc}{dt}, \quad c = c(t) = \frac{a\mu t^2}{r_0^{-2} - R^{-2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение (3.6) справедливо до момента времени  $t = t_0$ , когда на поверхности  $r = r_0$  произойдет проскальзывание материала и начнется разогрев его за счет пристеночного трения. Принимаем, что проскальзывание произойдет раньше начала вязкопластического течения. Для этого считаем, что  $f_0\sigma_0 < k$ . С этого момента  $t = t_0$  граничное условие (3.2) следует заменить на

$$|\sigma_{r\varphi}| = f |\sigma_{rr}| + \zeta |\omega| \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и} \quad t > t_0 = \sqrt{\frac{f_0\sigma_0 r_0^2}{a\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2} \right)}, \quad (3.7)$$

где  $\zeta$  – постоянная вязкого трения;  $f$  – коэффициент сухого трения скольжения. При выполнении условий проскальзывания (3.7) начинается разогрев материала за счет пристеночного трения на поверхности  $r = r_0$ :

$$\theta(r, t_0) = 0, \quad \theta(r_0, t) = \alpha_1 \psi(r_0, t), \quad \theta_{,r}(R, t) = 0 \quad (3.8)$$

В (3.8)  $\alpha_1$  – постоянный коэффициент теплопроизводства за счет трения.

Для компонент тензора напряжений из (2.14) и (2.15) теперь следует

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -P_1 - 2(b + \mu)d^2 + (v_1 + 6\mu\beta)\theta - (v_3 + 18\mu\beta^2 + 3v_1\beta)\theta^2 = -\tau_1 \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\tau_1 + 2\mu d^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2(\mu - \theta(v_1 + v_3 + 3\mu\beta))d, \quad \beta = \alpha T_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Разрешая второе из уравнений равновесия (3.5) с использованием (3.9), находим

$$d = \frac{c(t)}{2r^2(\mu - l\theta)}, \quad m_{r\varphi} = d, \quad m_{rr} = -\frac{3}{2}d^2, \quad m_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}d^2; \quad l = v_1 + v_5 + 3\mu\beta \quad (3.10)$$

Вместе с уравнением теплопроводности (следствием (2.15)) для определения неизвестных  $\psi(r, t)$ ,  $\theta(r, t)$ ,  $c(t)$  имеем систему уравнений с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \beta_1\theta + \beta_3 \frac{c^2 l}{2r^4 (\mu - l\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 c \dot{c}}{2r^4 (\mu - l\theta)^2} = g \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \\ & \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{c}{r^3 (\mu - l\theta)}, \quad \dot{\psi}(r_0, t) = -f \zeta^{-1} \sigma_0 + r_0^{-2} \zeta^{-1} c, \quad \psi(R, t) = \frac{at^2}{2} \\ & \theta(r, t_0) = 0, \quad \theta(r_0, t) = \alpha_1 \psi(r_0, t), \quad \theta_{,r}(R, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Задача (3.11), как и все последующие, разрешалась приближенно с помощью конечно-разностной схемы. Согласно найденным таким способом распределениям температуры и перемещений деформации и напряжения находятся согласно (3.9) и (3.10). Но такое решение справедливо лишь до момента времени  $t = t_*$ , когда на стенке  $r = r_0$  выполнится условие пластического течения (2.18). В нашем случае оно сводится к требованию  $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_*) = k$ . Для момента времени  $t = t_*$  имеем уравнение

$$c(t_*) = k_0 r_0^2 \left( 1 - \theta^2(r_0, t_*) \theta_m^{-2} \right) \quad (3.12)$$

**4. Вязкопластическое течение.** Область II вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$  при  $t > t_*$  развивается от граничной поверхности  $r = r_0$  посредством продвижения ее границы  $r = r_1(t)$ . В области I при  $r_1(t) \leq r \leq R$  материал продолжает деформироваться обратимо. Кинематические соотношения (2.12) и (2.13) в рассматриваемом случае позволяют записать:

$$\begin{aligned} v_\varphi &= r\omega, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{r\varphi} (\Phi_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} + 2p_{r\varphi} (\Phi_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p)$$

Обратимые деформации задают напряжения в области течения согласно зависимостям

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -P_2 - 2(b + \mu)m_{r\varphi}^2 + (v_1 + 6\mu\beta)\theta - (v_3 + 18\mu\beta^2 + 3v_1\beta)\theta^2 = -\tau_2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -\tau_1 + 2\mu m_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2(\mu - l\theta)m_{r\varphi} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Следствием выбранного условия вязкопластического течения и ассоциированного с ним закона имеем соотношения

$$\sigma_{r\varphi} = k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \xi = \varepsilon_{r\varphi}^p (k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p)^{-1}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c}{r^2} - k_0 \left( 1 - \frac{\theta^2}{\theta_m^2} \right) \right) \quad (4.3)$$

Выполняя условие равенства напряжений на границе пластической области, получим уравнение для вычисления закона продвижения упругопластической границы

$$r = r_1(t) = \sqrt{\frac{c(t)}{k_0 \left( 1 - \frac{\theta^2(r_1(t), t)}{\theta_m^2} \right)}} \quad (4.4)$$



Система дифференциальных уравнений для вычислений распределения температуры и угла поворота теперь состоит: из уравнений теплопроводности, записываемых отдельно для температуры  $\theta^I(r, t)$  и области вязкопластического течения  $\theta^{II}(r, t)$ , из уравнений для углов поворота  $\psi^I(r, t)$  и  $\psi^{II}(r, t)$ , функции времени  $c(t)$  и уравнения (4.4) для закона продвижения границы области вязкопластического течения. Вместе с краевыми условиями такая задача теперь предстает в виде

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \beta_1 \theta^I + \frac{\beta_3 l c^2}{2r^4 (\mu - l\theta^I)^3} \right) \dot{\theta}^I + \frac{\beta_3 c \dot{c}}{2r^4 (\mu - l\theta^I)^2} = g (\theta_{,rr}^I + r^{-1} \theta_{,r}^I) \\ & \left( 1 + \beta_1 \theta^{II} + \frac{\beta_3 l c^2}{2r^4 (\mu - l\theta^{II})^3} \right) \dot{\theta}^{II} + \frac{\beta_3 c \dot{c}}{2r^4 (\mu - l\theta^{II})^2} = \\ & = g (\theta_{,rr}^{II} + r^{-1} \theta_{,r}^{II}) - \frac{c}{2\nu_1 \eta r^2} \left( \frac{c}{r^2} - k_0 \left( 1 - \frac{\theta^{II^2}}{\theta_m^2} \right) \right) \\ & \psi_{,r}^I = \frac{c}{r^3 (\mu - l\theta^I)} \\ & \psi_{,r}^{II} = \frac{\dot{c}}{r^3 (\mu - l\theta^{II})} + \frac{lc}{r^3 (\mu - l\theta^{II})} \dot{\theta}^{II} + \frac{2}{\eta} \left( \frac{c}{r^3} - \frac{k_0}{r} \left( 1 - \frac{\theta^{II^2}}{\theta_m^2} \right) \right) \\ & c(t) = k_0 r_1^2 \left( 1 - \frac{(\theta^I(r_1, t))^2}{\theta_m^2} \right), \quad \theta^{II}(r_0, t) = \alpha_1 \psi^{II}(r_0, t), \quad \theta^I(r_1, t) = \theta^{II}(r_1, t) \\ & \theta_{,r}^I(R, t) = 0, \quad \psi^I(R, t) = \frac{1}{2} a t^2, \quad \psi^I(r_0, t) = -f \zeta^{-1} \sigma_0 + r_0^{-2} \zeta^{-1} c(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Приближенное численное разрешение задачи (4.5) встраивается таким способом в общий алгоритм расчетов. Для этого приходится использовать две изменяющихся на каждом временном шаге расчетов сетки дискретизации расчетной области. В области обратимого деформирования  $r = r_{i+1} + h_{i+1}^e j$ ,  $j = 0, N^e - 1$ ,  $h_{i+1}^e = (1 - r_{i+1})(N^e)^{-1}$ . В области вязкопластического течения  $r = r_0 + h_{i+1}^p j$ ,  $j = 1, N^p$ ,  $h_{i+1}^p = (r_{i+1} - r_0)(N^p)^{-1}$ . На каждом временном шаге расчетов  $t = t_* + \Delta t(i + 1)$ ,  $i = 0, N$  сетка меняется с учетом изменения положения упруговязкопластической границы. Значения угла поворота и температуры в узлах новой сетки на предыдущем временном шаге находятся интерполяцией.

Согласно рассчитанным распределениям температуры  $\theta(r, t)$ , угла поворота  $\psi(r, t)$  и значений функций  $c(t)$  определяются распределения иных искомым величин  $\omega(r, t)$ ,  $p_{r\varphi}(r, t)$ ,  $m_{r\varphi}(r, t)$ ,  $\sigma_{r\varphi}(r, t)$ . Для диагональных компонент деформаций следует система уравнений

$$\begin{aligned} m_{rr} + m_{\varphi\varphi} &= -m_{r\varphi}^2, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2, \quad m_{rr} = p_{\varphi\varphi} - \frac{3}{2} m_{r\varphi}^2 - 2m_{r\varphi} p_{r\varphi} \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + 2\varepsilon_{r\varphi}^p p_{r\varphi} + 4\varepsilon_{r\varphi} p_{r\varphi} (m_{\varphi\varphi} - 1)(m_{rr} + m_{\varphi\varphi} - 2)^{-1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Напряжение  $\sigma_{rr}$  находится интегрированием первого уравнения из (3.5) с учетом (4.2). По найденному  $\sigma_{rr}$  вычисляются  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и неизвестная функция  $p(r, t)$  добавочного гидростатического давления.

**5. Деформирование при постоянной и уменьшающейся угловой скорости.** Согласно задаваемым уравнениям (3.1) после момента времени  $t = t_1$  угловая скорость  $\omega_R(t) = at_1$  становится постоянной. Область вязкопластического течения при  $t > t_1$  продолжает развиваться. Рост области продолжается даже после момента времени  $t_2$ , когда вращение тормозится. При  $t > t_2$  находится момент времени  $t = t^*$  ( $t^* > t_2$ ), после которого граница области течения, остановившись, начинает продвижение в обратную сторону. Последующий закон движения обозначим через  $r = r_2(t)$ . Теперь деформируемый материал разделен на три области, где его деформирование протекает по-разному: в области  $r_0 \leq r \leq r_2(t)$  продолжается вязкопластическое течение; в области разгрузки  $r_2(t) \leq r \leq r_1(t^*)$  пластические деформации не меняются; в области  $r_1(t^*) \leq r \leq R$  деформирование обратимо.

Уравнения теплопроводности (2.16)–(2.18) следует записать применительно к рассматриваемому случаю. Таким способом получаем систему уравнений вместе с крайними условиями вполне аналогичную (4.5). Из-за громоздкости здесь ее не приводим. Решение такой задачи осуществляется тем же конечно-разностным методом на изменяющихся на каждом временном шаге сетках.

С момента времени  $t = t_3$  (находится из соотношения  $c(t_3) = f\sigma_0 r_0^2$ ) на поверхности  $r = r_0$  проскальзывание завершается и выполняется условие прилипания (3.2) так, что  $\psi(r_0, t) = \psi(r_0, t_3)$ . При  $t > t_3$  материал начинает остывать; свяжем такое остывание с условием

$$\theta(r_0, t) = \theta(r_0, t_3)(1 - \alpha_2(t - t_3)) \quad (5.1)$$

Продвигающаяся граница области вязкопластического течения  $r = r_2(t)$  в некоторый момент времени  $t = t_4$  достигает поверхности  $r = r_0$  и область вязкопластического течения исчезает. Для дальнейших расчетов остаются две области: область с накопленными необратимыми деформациями  $r_0 \leq r \leq r_1(t^*)$  и область, в которой происходило только обратимое деформирование  $r_1(t^*) \leq r \leq R$ . Момент времени  $t = t_4$  вычисляется решением уравнения

$$r_0^2 k_0 \left( 1 - \frac{\theta^2(r_0, t_4)}{\theta_m^2} \right) = c(t_4) \quad (5.2)$$

Поворот внешней жесткой поверхности  $r = R$  останавливается в момент времени  $t = t_5 = ab^{-1}t_1 + t_2$ . После этого (при  $t > t_5$ ) материал продолжает охлаждаться и в нем продолжается перераспределение напряжений вплоть до полного выравнивания температуры до комнатной по всему продеформированному материалу.

**6. Результаты расчетов.** При проведении расчетов независимые безразмерные переменные выбирались в форме:  $\tilde{r} = rR^{-1}$ ,  $\tilde{t} = at$ , напряжения относились к модулю сдвига  $\mu$ . Постоянными задачи и материала предписывались следующие значения:  $k_0\mu^{-1} = 0.00621$ ,  $r_0R^{-1} = 0.5$ ,  $ab^{-1} = 1$ ,  $\zeta a\mu^{-1} = 0.005$ ,  $a\eta\mu^2 = 0.004$ ,  $\beta_1 = 0.5$ ,  $\beta_3 = -0.5$ ,  $l\mu^{-1} = 0.001$ ,  $\nu_1\mu^{-1} = 0.02$ ,  $f\sigma_0\mu^{-1} = 0.005$ ,  $\alpha_1 = 100$ ,  $\alpha_2 = 50$ ,  $gR^2 = 10$ . Приведенные далее графические зависимости были получены именно при таких значениях постоянных.

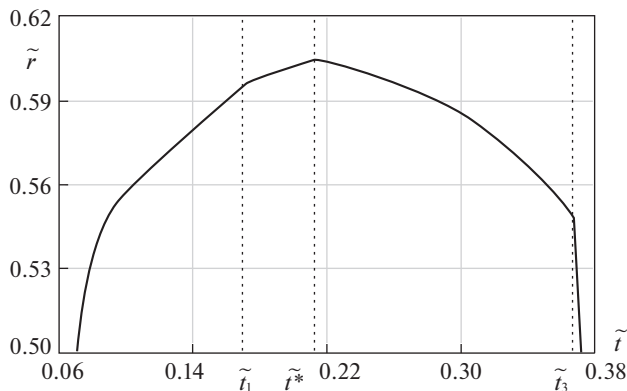


Рис. 1. Изменение области вязкопластического течения в процессе деформирования.

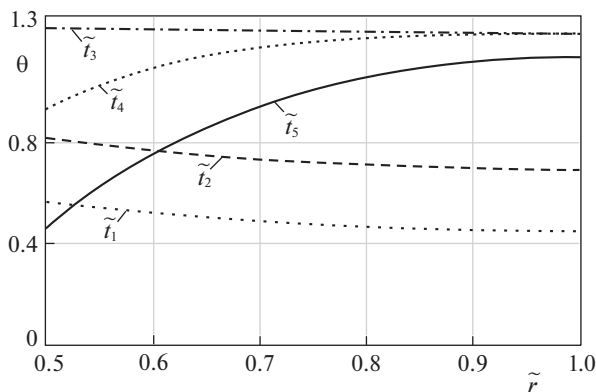


Рис. 2. Распределение температуры в различные моменты времени.

Графическая зависимость рис. 1 иллюстрирует развитие и схлопывание области вязкопластического течения со временем. Вертикальными прямыми пунктирными отрезками на рис. 1 отмечены характерные моменты времени  $\tilde{t}_1$ ,  $\tilde{t}^*$  и  $\tilde{t}_3$ , когда угловая скорость  $\omega_R$  перестает расти, когда упруговязкопластическая граница начинает двигаться в обратную сторону и когда заканчивается проскальзывание соответственно.

Распределение температуры по материалу в разные моменты времени показано графически на рис. 2. Тепло производится за счет пристеночного трения и необратимого деформирования.

Ниспадающие кривые рис. 2 соответствуют моментам времени, при которых отток тепла через границу  $r = R$  превалирует над его производством за счет вязкопластического течения.

На рис. 3 показано распределение угла поворота в различные моменты времени.

**Заключение.** Рассматриваемая здесь задача рассчитывает не отдельное состояние упруговязкопластического тела в зависимости от действий конкретных нагрузок, а процесс упруговязкопластического деформирования от его начала до полной разгрузки и остывания. Возможное производство тепла в процессе связывается с трением матери-

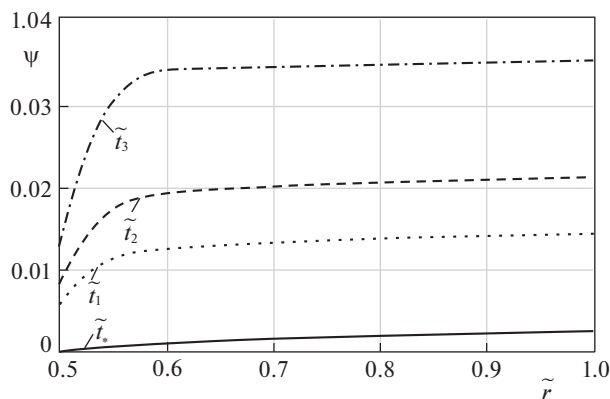


Рис. 3. Распределение угла поворота в различные моменты времени.

ла о шероховатую его границу и его необратимым деформированием. При этом совершенно необходимо подчеркнуть определяющую роль дифференциальных уравнений изменения (переноса) обратимых и необратимых деформаций. Именно следуя такому подходу (соотношения (2.12) и следующие из них зависимости (4.1)) удается получить систему дифференциальных уравнений, последующее разрешение которой в рамках сеточного конечно-разностного метода уже не встречает дополнительных трудностей. Для расчетов процессов неизоотермического деформирования в неоднородных задачах теории при таком подходе представляется возможным создание соответствующего вычислительного модуля расчетов. Для этого представленное решение может послужить в качестве средства тестирования создаваемых алгоритмов и вычислительных процедур. Преимущество расчетов на такой основе может оказаться значимым.

Работа выполнена в рамках проекта РФФ (грант 22-11-00163).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Groot С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
2. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
3. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. *Волков И.А., Коротких Ю.Г.* Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
6. *Волков И.А., Игумнов Л.А.* Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 310 с.
7. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 1–6.
8. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наук. думка, 1987. 231 с.
9. *Naghdi P.M.* A critical review of the state of finite plasticity // ZAMP. 1990. V. 41. P. 315–394.
10. *Meyers A., Schiebye P., Bruhns O.T.* Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates // Acta Mech. 2000. V. 139. P. 91–103.
11. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient // Int. J. Plasticity. 2000. V. 16. P. 143–177.

12. *Khoei A.R., Bakhshiani A., Mofid M.* An implicit algorithm for hypoelasto-plastic and hypoelasto-viscoplastic endochronic theory in finite strain isotropic-kinematic-hardening model // *Int. J. Solids&Struct.* 2003. V. 40 (13–14). P. 3393–3423.
13. *Asghari M., Naghdabadi R.* On the objective corotational rates of Eulerian strain measures. // *J. Elasticity.* 2008. V. 90. P. 175–207.
14. *Shen L.-J.* Constitutive relations for isotropic or kinematic hardening at finite elastic-plastic deformations // *Int. J. Solids&Struct.* 2006. V. 43. P. 5613–5627.
15. *Султанов Л.У.* Исследование конечных упругопластических деформаций: алгоритм решения, численные примеры // *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2017. Т. 159. кн. 4. С. 509–517.
16. *Shutov A.V., Ihlemann J.* Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // *Int. J. Plasticity.* 2014. V. 63. P. 183–197.
17. *Shutov A.V., Larichkin A.Y., Shutov V.A.* Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // *ZAMM.* 2017. V. 97. № 9. P. 1083–1099.
18. *Simo J.C.* Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1992. V. 99. P. 61–112.
19. *Stein E., Sagar G.* Theory and finite element computation of cyclic martensitic phase transformation at finite strain // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. V. 74. P. 1–31.
20. *Helm D.* Stress computation in finite thermoviscoplasticity // *Int. J. Plasticity.* 2006. V. 22 (9). P. 1699–1727.
21. *Har J.* A unified stress update algorithm for explicit transient shell dynamics with combined isotropic-kinematic hardening in Eulerian rate-type phenomenological finite elasto-plasticity models // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2007. V. 196. P. 3248–3275.
22. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред деформаций. Казань: КФУ, 2009. 465 с.
23. *Wriggers P.* *Nonlinear Finite Element Methods.* Springer. Sci.&Business Media, 2008. 560 p.
24. *Shutov A.V.* Efficient implicit integration for finite-strain viscoplasticity with a nested multiplicative split // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 2016. V. 306. P. 151–174.
25. *Xia Z., Ellyin F.A.* A stress rate measure for finite elastic plastic deformations // *Acta Mech.* 1993. V. 98. P. 1–14.
26. *Ивлев Д.Д.* Из истории дискуссий в механике. Три дискуссии // *Теор. и прикл. мех.* 2012. Вып. 27. С. 5–10.
27. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
28. *Быковцев Г.И., Шитиков А.В.* Конечные деформации упругопластических сред // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
29. *Чернышов А.Д.* Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 1. С. 120–128.
30. *Новокушанов Р.С., Роговой А.А.* О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // *Изв. РАН. МТТ.* 2002. № 4. С. 77–95.
31. *Роговой А.А.* Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // *ПМТФ.* 2005. Т. 46. № 5. С. 138–149.
32. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанык Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *Докл. РАН.* 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
33. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанык Л.В.* Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // *Докл. РАН.* 2016. Т. 470. № 3. С. 275–278.
34. *Белых С.В., Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Прокудин А.Н.* Об учете вязких свойств материалов в теории больших упругопластических деформаций // *Чебышевский сб.* 2017. Т. 18. № 3. С. 108–130.
35. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // *Arch. Appl. Mech.* 2020. V. 90 (4). P. 829–845.

36. *Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Mathematical modelling of the production process of irreversible strains under the heating and cooling of a flat heavy layer on an inclined surface // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42. № 8. P. 1998–2005.
37. *Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л.* Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // *Докл. РАН.* 2015. Т. 464. № 3. С. 284–287.
38. *Буренин А.А., Ковтанык Л.В., Панченко Г.Л.* Развитие и торможение вязкопластического течения в слое в условиях его нагрева за счет трения о шероховатую плоскость // *ПМТФ.* 2015. Т. 56. № 4. С. 101–111.
39. *Prokudin A.N., Firsov S.V.* Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phus.* 2018. V. 11. № 4. P. 399–400.
40. *Бегун А.С., Ковтанык Л.В.* Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала при его нагреве вследствие пристеночного трения // *ПМТФ.* 2021. № 5. С. 89–99.
41. *Лурье А.И.* Дифференцирование по тензорному аргументу // в сб.: *Вопросы математической физики.* Л.: Наука, 1976. С. 48–57.
42. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.
43. *Ковтанык Л.В., Шутиков А.В.* О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // *Вестн. ДВО РАН.* 2006. № 4. С. 87–93.
44. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

### Calculations of Large Nonisothermal Deformations of Elastoviscoplastic Materials

A. S. Begun<sup>a,b,#</sup>, A. A. Burenin<sup>a,##</sup>, and L. V. Kovtanyuk<sup>a,b,###</sup>

<sup>a</sup> *Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy, FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

<sup>b</sup> *Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Vladivostok, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: ustinova@iacp.dvo.ru*

<sup>##</sup> *e-mail: aab@imim.ru*

<sup>###</sup> *e-mail: lk@iacp.dvo.ru*

Proposed method and the results of calculations are discussed in the coupled problem of the theory of large deformations on the deformation of the material of a cylindrical layer between rigid cylindrical surfaces. The material of the layer is assumed to be elastoviscoplastic, its contact with rough boundaries when turning the outer of them occurs with friction, which generates heat, and irreversible deformation is also considered calorific. The full cycle of the process of quasi-static deformation is calculated from its beginning to complete unloading and cooling of the material layer. The time points of the beginning and end of the sliding of the material along its rigid boundary surface, the beginning and end of its near-wall viscoplastic flow are indicated.

*Keywords:* elasticity, plasticity, viscoplastic flow, large deformations, thermal conductivity, coupled thermal deformation

### REFERENCES

1. *de Groot S.R., Mazur P.* Non-equilibrium Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1962. 510 p.
2. *Myasnikov V.P.* Equations of motion of elastic-plastic materials under large deformations // *Vestn. FEB RAS*, 1996, no. 4, pp. 8–13. (in Russian)
3. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p. (in Russian)
4. *Rabotnov Yu.N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian)
5. *Volkov I.A., Korotkikh Yu.G.* Equations of State for Viscoelastic-Plastic Media with Damage. Moscow: Fizmatlit, 2008. 424 p. (in Russian)

6. *Volkov I.A., Igumnov L.A.* Introduction to the Continuum Mechanics of a Damaged Medium. Moscow: Fizmatlit, 2017. 310 p. (in Russian)
7. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // *Trans ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, no. 1, pp. 1–6.
8. *Levitas V.I.* Large Elastoplastic Deformations of Materials at High Pressure. Kyiv: Nauk. Dumka, 1987. 231 p. (in Russian)
9. *Naghdi P.M.* A critical review of the state of finite plasticity // *ZAMP*, 1990, 41, pp. 315–394.
10. *Meyers A., Schiebye P., Bruhns O.T.* Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates // *Acta Mech.*, 2000, vol. 139, pp. 91–103.
11. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient // *Int. J. Plasticity*, 2000, vol. 16, pp. 143–177.
12. *Khoei A.R., Bakshshiani A., Mofid M.* An implicit algorithm for hypoelasto-plastic and hypoelasto-viscoplastic endochronic theory in finite strain isotropic-kinematic-hardening model // *Int. J. Solids&Struct.*, 2003, vol. 40 (13–14), pp. 3393–3423.
13. *Asghari M., Naghdabadi R.* On the objective corotational rates of Eulerian strain measures. // *J. Elasticity*, 2008, vol. 90, pp. 175–207.
14. *Shen L.-J.* Constitutive relations for isotropic or kinematic hardening at finite elastic-plastic deformations // *Int. J. Solids&Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 5613–5627.
15. *Sultanov L.U.* Analysis of large elastic-plastic deformations: Integration algorithm and numerical examples // *Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 509–517. (in Russian)
16. *Shutov A.V., Ihlemann J.* Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // *Int. J. Plasticity*, 2014, vol. 63, pp. 183–197.
17. *Shutov A.V., Larichkin A.Y., Shutov V.A.* Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // *ZAMM*, 2017, vol. 97, no. 9, pp. 1083–1099.
18. *Simo J.C.* Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1992, vol. 99, pp. 61–112.
19. *Stein E., Sagar G.* Theory and finite element computation of cyclic martensitic phase transformation at finite strain // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2007, vol. 74, pp. 1–31.
20. *Helm D.* Stress computation in finite thermoviscoplasticity // *Int. J. Plasticity*, 2006, vol. 22 (9), pp. 1699–1727.
21. *Har J.* A unified stress update algorithm for explicit transient shell dynamics with combined isotropic-kinematic hardening in Eulerian rate-type phenomenological finite elasto-plasticity models // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 2007, vol. 196, pp. 3248–3275.
22. *Golovanov A.I., Sultanov L.U.* Mathematical Models of Computational Nonlinear Mechanics of Deformable Media of Deformations. Kazan: KFU, 2009. 465 p. (in Russian)
23. *Wriggers P.* Nonlinear Finite Element Methods. Springer. Sci.&Business Media, 2008. 560 p.
24. *Shutov A.V.* Efficient implicit integration for finite-strain viscoplasticity with a nested multiplicative split // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2016, vol. 306, pp. 151–174.
25. *Xia Z., Ellyin F.* A stress rate measure for finite elastic plastic deformations // *Acta Mech.*, 1993, vol. 98, pp. 1–14.
26. *Ivlev D.D.* From the history of discussions in mechanics. Three discussions // *Theoret.&Appl. Mech.*, 2012, iss. 27, pp. 5–10. (in Russian)
27. *Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I.* Large Elastoplastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications. Moscow: Nauka, 1986. 232 p. (in Russian)
28. *Bykovtsev G.I., Shitikov A.V.* Finite deformations of elastoplastic media // *Dokl. Math.*, 1990, vol. 35, no. 3, pp. 297–299.
29. *Chernyshov A.D.* Constitutive equations for an elastic-plastic body at finite deformations // *Mech. Solids*, 2000, no. 1, pp. 102–108.
30. *Novokshanov R.S., Rogovoi A.A.* On the construction of evolutionary constitutive relations for finite deformations // *Mech. Solids*, 2002, no. 4, pp. 63–78.
31. *Rogovoi A.A.* Constitutive relations for finite elastic-inelastic deformations // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 5, pp. 730–739.

32. *Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Kovtanyuk L.V.* On one simple model for an elastoplastic medium under finite deformations // *Dokl. Phys.*, 1996, vol. 41, no. 3, pp. 127–129.
33. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations under changing mechanisms of their production and the problem of specifying plastic potentials // *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 9, pp. 463–466.
34. *Belykh S.V., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N.* On accounting of viscous properties of materials in the theory of large elastoplastic strains // *Chebyshevskii Sb.*, 2017, vol. 18 (3), pp. 109–130. (in Russian)
35. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // *Arch. Appl. Mech.*, 2020, vol. 90 (4), pp. 829–845.
36. *Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Mathematical modelling of the production process of irreversible strains under the heating and cooling of a flat heavy layer on an inclined surface // *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1998–2005.
37. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Nonisothermal motion of an elastoviscoplastic medium through a pipe under a changing pressure drop // *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60 (9), pp. 419–422.
38. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Development and deceleration of viscoplastic flow in a layer heated by friction on a rough plane // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2015, vol. 56 (4), pp. 626–635.
39. *Prokudin A.N., Firsov S.V.* Antiplane Strain of Hardening Elastoviscoplastic Medium // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 399–400.
40. *Begun A.S., Kovtanyuk L.V.* Viscometric flow of elastoplastic material heated by wall friction // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2021, vol. 62 (5), pp. 779–788.
41. *Lurie A.I.* Differentiation with respect to tensor argument // *Probl. Math. Phys.*, 1976, pp. 48–57. (in Russian)
42. *Prager W.* Introduction to Mechanics of Continua. Boston: Ginn, 1961. 230 p.
43. *Kovtanyuk L.V., Shitikov A.V.* On the theory of large elastoplastic deformations of materials with temperature and rheological effects taken into account // *Vestn. DVO RAN*, 2006, no. 4, pp. 87–93. (in Russian)
44. *Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D.* Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian)