ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 5, с. 710–723

УДК 534.113

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ОГРАНИЧЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КАНАЛАМИ

© 2022 г. Л. И. Казаков*

**e-mail: lev-kazakov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 15.04.2022 г.
После доработки 20.06.2022 г.
Принята к публикации 20.06.2022 г.

Выполнен расчет акустических характеристик цилиндрической вязкоупругой трубки конечной длины с радиально закрепленной внешней поверхностью, замещающей шестигранную элементарную ячейку отрезка микронеоднородной среды с цилиндрическими каналами. Применены принцип наименьшего действия и гипотеза плоских сечений. Найдено дисперсионное уравнение для продольных звуковых волн в трубке, совпадающее с приближениями точного дисперсионного уравнения и имеющее типичную для микронеоднородных резонансных сред форму. Из подходящей аппроксимации результатов известных измерений приведенной входной проводимости "полубесконечных" образцов найдена частотная зависимость комплексного модуля сдвига применявшейся резины.

Ключевые слова: принцип наименьшего действия, гипотеза плоских сечений, вязкоупругая среда, цилиндрические каналы, торцевые пластинки, дисперсионное уравнение, эффект нераспространения

DOI: 10.31857/S0032823522050113

1. Введение. Акустические свойства искусственной упругой среды с цилиндрическими каналами, центры которых совпадают с узлами правильной треугольной сетки, можно найти, решая осесимметричную задачу о распространении упругих волн вдоль трубки с радиально-закрепленной внешней цилиндрической поверхностью, которая приближенно заменяет шестигранную поверхность, окружающую канал.

Идея создания и первый приближенный расчет такой среды принадлежат Г.Д. Малюжинцу. В работе В.В. Тютекина [1] дана точная теория распространения осесимметричных упругих волн в безграничном волноводе типа "трубка". Дальнейшие исследования этих вопросов изложены в работе А.Е. Вовк [2]. Получено точное решение для частного случая "трубки" конечного размера в работе [3].

Теория Г.Д. Малюжинца основана на применении принципа наименьшего действия Гамильтона–Остроградского и гипотезы плоских сечений и в этом отношении подобна расчету А. Лява ([4], § 278, с. 446) для продольных волн в стержне, учитывающему поправку Рэлея ([5], § 157, с. 273) на инерцию поперечного движения.

2. Вывод уравнения движения. Изложенная ниже приближенная теория также базируется на принципе наименьшего действия и гипотезе плоских сечений, которая состоит в предположении, что осевые смещения частиц U_z во времени t не зависят от радиуса r, т.е. любое поперечное сечение трубки остается при движении плоским:

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} = 0, \quad U_z = f(z,t) \tag{2.1}$$

Радиальные смещения зададим, следуя Г.Д. Малюжинцу, в виде

$$U_r = A\frac{r_1^2 - r^2}{2r} f'(z,t), \tag{2.2}$$

где $A = \mathrm{const}$, значение которой определим позже, r_1 — внешний радиус трубки, штрих над $f(z,t)$ означает производную по координате z.

Отличными от нуля компонентами тензоров деформаций и напряжений для осесимметричного случая будут ([6], с. 13, 23):

$$\begin{gathered} U_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} = f'(z,t), \quad U_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad U_{\phi\phi} = \frac{U_r}{r}, \quad U_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial U_r}{\partial z} \\ \sigma_{rz} = 2\mu U_{rz} = \mu A\frac{r_1^2 - r^2}{2r} f''(z,t) \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \lambda \operatorname{div}\vec{U} + 2\mu U_{\alpha\alpha}, \quad \alpha\alpha = rr, \phi\phi, zz, \tag{2.4}$$

где

$$\operatorname{div}\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = (1 - A) f'(z,t),$$

λ — первый коэффициент Ламе, μ — модуль сдвига материала трубки.

Заданная форма смещений (2.1), (2.2) удовлетворяет требуемым граничным условиям на внешней поверхности трубки

$$U_r(z, r_1) = 0, \quad \sigma_{rz}(z, r_1) = 0 \tag{2.5}$$

На свободной внутренней поверхности трубки радиуса r_0 должны выполняться условия

$$\sigma_{rz}(z, r_0) = 0 \tag{2.6}$$

$$\sigma_{rr}(z, r_0) = \left[\lambda(1 - A) - \mu A\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] f'(z,t) = 0, \tag{2.7}$$

где $\varepsilon = r_0^2/r_1^2$ — коэффициент перфорации. Если, следуя Г.Д. Малюжинцу, положить

$$A = A_0 = \left(1 + \mu\frac{1+\varepsilon}{\lambda\varepsilon}\right)^{-1}, \tag{2.8}$$

то условие (2.7) выполнится точно. Лучше, однако, выбрать значение A из других соображений, приведенных ниже. При этом условия (2.6) и (2.7) будут выполняться лишь приближенно при соответствующих ограничениях, что станет ясно из дальнейшего.

Найдем кинетическую T и упругую E энергии отрезка трубки длиною h по формулам:

$$T(t) = \pi\rho\int_{r_0}^{r_1}\int_0^h \left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial t}\right)^2\right] r\,dr\,dz, \quad E(t) = 2\pi\int_{r_0}^{r_1}\int_0^h \varepsilon_1(r,z,t)\, r\,dr\,dz,$$

где ρ — плотность материала трубки, $\varepsilon_1(r,z,t)$ — упругая энергия единицы объема трубки, имеющая вид ([6], с. 21)

$$\begin{gathered} \varepsilon_1(r,z,t) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{rr}U_{rr} + \sigma_{\phi\phi}U_{\phi\phi} + \sigma_{zz}U_{zz} + 2\sigma_{rz}U_{rz}\right) = \\ = \frac{\lambda}{2}\left(\operatorname{div}\vec{U}\right)^2 + \mu\left(U_{rr}^2 + U_{\phi\phi}^2 + U_{zz}^2\right) + 2\mu U_{rz}^2 \end{gathered}$$

Вычисления дадут:

$$E(t) = \frac{\pi\mu r_1^2}{2}\int_0^h \left\{D(A,\varepsilon)\left[f'(z,t)\right]^2 + \xi^2 A^2 r_0^2 b(\varepsilon)\left[f''(z,t)\right]^2\right\}dz \tag{2.9}$$

$$T(t) = \frac{\pi\rho r_1^2}{2}\int_0^h \left\{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)\left[\frac{\partial f'(z,t)}{\partial t}\right]^2 + (1-\varepsilon)\left[\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}\right]^2\right\}dz, \tag{2.10}$$

где

$$D(A,\varepsilon) = \left[\frac{\lambda}{\mu}(1-A)^2 + 2 + A^2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right](1-\varepsilon), \quad b(\varepsilon) = \frac{4\varepsilon - 2\ln\varepsilon - 3 - \varepsilon^2}{8\varepsilon}$$

Применим к решению задачи, которая состоит теперь в отыскании функции $f(z,t)$, принцип наименьшего действия Гамильтона–Остроградского

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - E + W)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}(\delta T - \delta E + \delta W)\,dt = 0, \tag{2.11}$$

где W – работа внешних сил, действующих на торцах отрезка трубки; δ – символ вариации величины при малых произвольных изохронных вариациях вектора смещения $\delta\vec{U}$; t_1, t_2 – произвольные моменты времени. Подставив выражения (2.9) и (2.10) в формулу (2.11) и после варьирования, изменения порядка интегрирования и интегрирования по частям с учетом условия $\delta\vec{U}(t_1) = \delta\vec{U}(t_2) = 0$, получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^h\left(f^{IV} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 f''}{\partial t^2} - \frac{D(A,\varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)}f'' + \frac{\rho(1-\varepsilon)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\delta f\,dz\,dt -$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\left(f''' - \frac{D(A,\varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)}f' - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 f'}{\partial t^2}\right)\delta f - f''\delta f'\right]_0^h + \frac{\delta W}{\pi\mu r_1^2 A^2 r_0^2 b(\varepsilon)}\right\}dt = 0 \tag{2.12}$$

Вариация работы внешних сил δW есть линейная форма от вариаций $\delta f = \delta U_z$ и $\delta f' \sim \delta U_r$, взятых при $z = 0$ и $z = h$. В силу произвольности всех вариаций в выражении (2.12) каждый интеграл в отдельности должен обращаться в нуль. Тогда первый интеграл дает уравнение движения

$$f^{IV} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 f''}{\partial t^2} - \frac{D(A,\varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)}f'' + \frac{\rho(1-\varepsilon)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \tag{2.13}$$

а второй содержит два динамических граничных условия, которые зависят от характера осесимметричных напряжений, действующих на торцевых сечениях трубки, и от способа закрепления этих сечений.

Будем считать, что к торцевым сечениям трубки примыкают тонкие жесткие пластинки. Через них на трубку можно воздействовать извне только давлениями $P(0,t)$ и $P(h,t)$, работа которых запишется в виде

$$W(t) = \pi r_1^2\left[P(0,t)f(0,t) - P(h,t)f(h,t)\right],$$

откуда

$$\delta W = -\pi r_1^2\left[P\delta f\right]_0^h \tag{2.14}$$

Рассмотрим два крайних варианта крепления таких пластинок на торцах трубки: без трения (“скользкая” пластинка) и жесткое крепление, или сцепление. В первом случае обращаются в нуль касательные напряжения σ_{rz} между пластинкой и трубкой, т.е. в соответствии с формулой (2.3) должно выполняться граничное условие

$$f''(z_0,t) = 0, \quad z_0 = 0, h \tag{2.15}$$

В случае сцепления запрещены радиальные смещения в торцевом сечении трубки, что на основании формулы (2.2) дает граничное условие

$$f'(z_0,t) = 0 \tag{2.16}$$

Соответствующие динамические граничные условия найдем из выражения (2.12) с учетом (2.14):

для "скользкой" пластинки:

$$f'''(z_0,t) - \frac{D(A,\varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} f'(z_0,t) - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 f'(z_0,t)}{\partial t^2} = \frac{P(z_0,t)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \tag{2.17}$$

для случая сцепления:

$$f'''(z_0,t) = \frac{P(z_0,t)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \tag{2.18}$$

При гармонических колебаниях, когда временнáя зависимость величин задана сокращаемым множителем $e^{-i\omega t}$, где i — мнимая единица, ω — круговая частота, уравнение движения (2.13) и динамические граничные условия (2.17), (2.18) для комплексных амплитуд запишем в виде

$$f^{IV} + \left(k^2 - \kappa^2\right) f'' - k^2\kappa^2 f = 0$$

$$f'''(z_0) + \left(k^2 - \kappa^2\right) f'(z_0) = \frac{k^2\kappa^2 P(z_0)}{\omega^2\rho(1-\varepsilon)} \tag{2.19}$$

$$f'''(z_0) = \frac{k^2\kappa^2 P(z_0)}{\omega^2\rho(1-\varepsilon)},$$

где

$$\left(k^2 - \kappa^2\right) = \frac{\omega^2\rho}{\mu} - \frac{D(A,\varepsilon)}{A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \tag{2.20}$$

$$k^2\kappa^2 = \frac{\omega^2\rho(1-\varepsilon)}{\mu A^2 r_0^2 b(\varepsilon)} \tag{2.21}$$

Введя дифференциальный оператор $\nabla \equiv d/dz$, уравнение (2.19) можно записать в виде

$$\left[\nabla^4 + \left(k^2 - \kappa^2\right)\nabla^2 - k^2\kappa^2\right] f = 0,$$

или

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\left(\nabla^2 - \kappa^2\right) f = 0$$

Общее решение этого уравнения может быть представлено суммой решений волновых уравнений

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) f = 0, \quad \left(\nabla^2 - \kappa^2\right) f = 0,$$

из которых первое определяет распространяющуюся волну с волновым числом k, а второе — неоднородную волну с волновым числом κ. Таким образом решение уравнения (2.19) для отрезка трубки следует искать в виде

$$f(z) = A_1 \operatorname{sh} \kappa z + A_2 \operatorname{ch} \kappa z + A_3 \sin kz + A_4 \cos kz, \tag{2.22}$$

где A_i произвольные постоянные, определяемые из граничных условий на торцах, а k и κ могут быть найдены из уравнений (2.20), (2.21).

3. Дисперсионное уравнение. Пока остается неопределенной постоянная A. Ее можно связать с волновым числом k следующим образом. Возьмем точное уравнение в цилиндрических координатах для аксиальной составляющей смещения при осесимметричных движениях ([6], с. 126, (22.6))

$$\rho\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_r}{\partial z}\right) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right)\right]$$

Усредним его по площади сечения трубки $\pi\left(r_1^2 - r_0^2\right)$ и, используя граничные условия (2.5) и (2.6), найдем:

$$\rho\frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial z^2} - \frac{2\lambda r_0}{r_1^2 - r_0^2}\frac{\partial U_r(z, r_0)}{\partial z},$$

где $\bar{U}_z$ — среднее по сечению трубки аксиальное смещение. Подставив в это точное уравнение заданную форму движения (2.1), (2.2), получим для гармонических колебаний волновое уравнение

$$f'' + \frac{\omega^2\rho}{\lambda + 2\mu - \lambda A} f = 0,$$

волновое число которого естественно отождествить с k:

$$k^2 = \frac{\omega^2\rho}{\lambda + 2\mu - \lambda A} \tag{3.1}$$

Исключив из уравнений (2.20), (2.21), (3.1) κ и A, найдем

$$\frac{1}{(n^2 - 1)\left(1 - \frac{1}{2\alpha}n^2\right)}\left[n^2 - \frac{1 + (2\alpha - 1)\varepsilon}{1 + \left(3 - \frac{2}{\alpha}\right)\varepsilon}\right] = \Omega^2, \tag{3.2}$$

где обозначено $n = k/k_l$ — показатель преломления перфорированной каналами среды относительно сплошной; $k_l = \omega\sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$ — волновое число для продольных волн в сплошной среде;

$$\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \tag{3.3}$$

$$\Omega^2 = \frac{2\alpha\varepsilon b(\varepsilon)}{a(\varepsilon)}(k_l r_1)^2 = \frac{\omega^2\rho r_1^2\varepsilon b(\varepsilon)}{\mu a(\varepsilon)} \tag{3.4}$$

$$a(\varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\left[1 + \left(3 - \frac{2}{\alpha}\right)\varepsilon\right] \tag{3.5}$$

Постоянную A найдем из формул (3.1)–(3.3):

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.6}$$

Из формул (2.8), (3.6) и (3.2) при $\Omega \to 0$, получим:

$$A \to A_0,$$

что означает выполнение граничного условия (2.7) в квазистатическом случае.

Выражение (3.2) является приближенным дисперсионным уравнением для определения $k = nk_l$. Тогда получаем, что при $\Omega \to 0$

$$n^2(0) = \frac{2\varepsilon\alpha + 1 - \varepsilon}{1 + 3\varepsilon - 2\varepsilon/\alpha}$$

и

$$n^2(0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1, \quad \text{т.е.} \quad k(0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} k_l$$

$$n^2(0) \xrightarrow[\varepsilon\to 1]{} \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}, \quad \text{т.е.} \quad k^2(0) \xrightarrow[\varepsilon\to 1]{} \frac{\omega^2\rho(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)},$$

как и должно быть для низкочастотных продольных волн, распространяющихся, соответственно этим предельным случаям, в сплошной среде ($\varepsilon = 0$) и в тонкой пластине ($\varepsilon \to 1$). Случаю $\Omega \to \infty$ соответствуют два варианта: $n \to 1$, т.е. $k(\infty) \to k_l$ – продольная волна в сплошной среде; $n \to \sqrt{2\alpha}$, или

$$k(\infty) \to \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = k_t,$$

где k_t – волновое число для сдвиговых волн в сплошной среде.

Для вязкоупругих материалов (например, резин) модуль сдвига при гармонических колебаниях является комплексной функцией частоты:

$$\mu^*(\omega) = \mu(\omega)\left[1 - i\eta(\omega)\right], \tag{3.7}$$

где $\mu(\omega)$ – модуль сдвига, $\eta(\omega)$ – коэффициент сдвиговых потерь, величина которого обычно лежит в пределах $\eta(\omega) = 0.1\ldots1.0$. Первый коэффициент Ламе λ на звуковых и ультразвуковых частотах можно считать вещественной постоянной, причем $\lambda \gg \left|\mu^*(\omega)\right|$. В связи с этим волновое число k_l, а также $a(\varepsilon)$ (3.5) будем с малой ошибкой полагать вещественными. Для вязкоупругих материалов допустим, что

$$\left|\frac{n^{*2}}{2\alpha^*}\right| \ll 1 \tag{3.8}$$

Тогда дисперсионное уравнение (3.2) запишется в виде:

$$n^{*2} = \frac{\Omega_1^{*2} - \Omega^{*2}}{1 - \Omega^{*2}}; \quad \Omega_1^{*2} = \frac{1 + \left(2\alpha^* - 1\right)\varepsilon}{1 + \left(3 - \dfrac{2}{\alpha^*}\right)\varepsilon}, \tag{3.9}$$

где в согласии с (3.3), (3.4) и (3.7)

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{1 - i\eta}, \quad \left|\alpha^*\right| \gg 1, \quad \Omega^{*2} = \frac{\Omega^2}{1 - i\eta} \tag{3.10}$$

Точное дисперсионное уравнение получено в работе [1]:

$$(1-n^2)\left[n^2\Phi(U)-\alpha\right]+(\alpha-n^2)^2\Phi(V)=0, \tag{3.11}$$

где

$$U=k_l r_1\sqrt{2\alpha-n^2},\quad V=k_l r_1\sqrt{1-n^2},$$

а функция $\Phi(x)$ выражается через функции Бесселя и Неймана:

$$\Phi(x)=\sqrt{\varepsilon}x\frac{J_1(x)N_0\left(\sqrt{\varepsilon}x\right)-N_1(x)J_0\left(\sqrt{\varepsilon}x\right)}{J_1(x)N_1\left(\sqrt{\varepsilon}x\right)-N_1(x)J_1\left(\sqrt{\varepsilon}x\right)} \tag{3.12}$$

Выражение (3.9) следует из (3.11) в качестве низкочастотного приближения при $|U|$, $|V|\ll 1$. Используя в (3.12) представления цилиндрических функций рядами при $|x|\ll 1$ ([8], с. 415, 428), получим

$$\Phi(x)=-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1+\frac{x^2}{4}(1+\ln\varepsilon-\varepsilon)+\ldots}{1-\frac{x^2}{8}\frac{1+2\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon^2}{1-\varepsilon}+\ldots}=-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon b(\varepsilon)}{1-\varepsilon}x^2+\ldots\right) \tag{3.13}$$

Ограничившись только выписанными здесь членами в разложениях для функций $\Phi(U)$ и $\Phi(V)$ и подставив последние в уравнение (3.11), получим в точности формулу (3.9) [7]. При таком выводе она справедлива для вязкоупругих материалов, лишь когда

$$\left|k_l r_1\sqrt{2\alpha^*}\right|=|k_t^* r_1|\ll 1,$$

или

$$|\Omega^*|\ll\sqrt{\frac{\varepsilon b(\varepsilon)}{a(\varepsilon)}}<0.15$$

Фактически формула (3.9) была получена таким способом уже в работе [1] в качестве квазистатического приближения с рэлеевской поправкой.

В наиболее интересных случаях применения (для звукопоглощения), когда справедливы допущения: (3.8), $|n^*|\sim 1$, $k_l r_1\le 1$, $\sqrt{2\varepsilon/\alpha}\ll 1$, $\varepsilon\ll 0.25$, можно считать, что $|U|\gg 1$, $|V|\ll 1$. Используя в формуле (3.12) для $\Phi(U)$ асимптотические представления цилиндрических функций [8, с. 449], а для $\Phi(V)$ – приближение (3.13), найдем:

$$\Phi(U)\approx ik_l r_1\sqrt{2\varepsilon\alpha} \tag{3.14}$$

$$\Phi(V)\approx-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(1-\frac{(k_l r_1)^2\varepsilon b(\varepsilon)}{1-\varepsilon}\left(1-n^2\right)\right) \tag{3.15}$$

Подставив (3.14), (3.15) в (3.11), при принятых допущениях снова придем к формуле (3.9) [7].

Учитывая (3.3)–(3.5), (3.10), представим зависимость (3.9) в виде

$$n^{*2}=(n'+in'')^2=s^*=s'+is''=1+\frac{2\varepsilon\alpha}{(1+3\varepsilon)\left(1-\Omega^2-i\eta\right)}, \tag{3.16}$$

откуда

$$s'=n'^2-n''^2=1+\frac{2\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon}\frac{1-\Omega^2}{\left(1-\Omega^2\right)^2+\eta^2} \tag{3.17}$$

$$s'' = 2n'n'' = \frac{2\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon}\frac{\eta}{\left(1-\Omega^2\right)^2+\eta^2} \tag{3.18}$$

Величину s^* можно назвать приведенной комплексной сжимаемостью перфорированной каналами среды [1]. Формула (3.16) подобна выражению для квадрата комплексного показателя преломления в теории дисперсии и абсорбции электромагнитных волн в разреженной среде, содержащей осцилляторы одного сорта, т.е. имеет обычный лоренцевский вид ([9], с. 56, (32.27)), ([10], § 156, с. 556). При этом s^* является аналогом комплексной диэлектрической проницаемости такой среды, и поэтому s' и s'' должны быть связаны дисперсионными соотношениями Крамерса–Кронига ([11], § 82, с. 389, [12]).

На рис. 1 построены зависимости от $k_l r_1$ функций s' (3.17) и s'' (3.18) при $\alpha = 800$, $\eta = 1$, $\varepsilon = 0.05^2$. Точками показаны значения этих величин для нулевой квазипродольной волны, вычисленные по точной теории в работе [2]. Видно хорошее совпадение. При $s' < 0$ мнимая часть k'' волнового числа $k^* = k_l n^*$ превышает вещественную часть k'. Из формулы (3.17) следует, что это возможно лишь при

$$\frac{\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon} > \eta \tag{3.19}$$

в диапазоне частот, границы которого определяет соотношение

$$\Omega_{1,2}^2 = 1 + \frac{\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon}\right)^2 - \eta^2},$$

откуда видно, что при уменьшении η этот диапазон расширяется, но не может превысить разницы между частотой зарождения первой квазипродольной волны [2], соответствующей значению $\Omega^2 = \Omega_1^2 = 1 + \dfrac{2\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon}$, и собственной частотой канала при $\Omega = 1$. Отношение k''/k' максимально в центре диапазона при $\Omega^2 = 1 + \dfrac{\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon}$ и составляет $\left(k''/k'\right)_{\max} = \dfrac{\varepsilon\alpha}{(1+3\varepsilon)\eta}$. Это явление, которое можно назвать эффектом нераспространения, для среды с цилиндрическими каналами описано впервые в работе [13]. Аналогичное явление известно в электродинамике сплошных сред ([11], § 84, с. 399).

Рисунок 2 демонстрирует степень совпадения расчетных приближенных значений $n'(k_l r_1)$ и $n''(k_l r_1)$ с точными из работы [2] при $\alpha = 125$, $\eta = 0.5$, $\varepsilon = 0.05^2$. Условие (3.19) здесь не выполняется и поэтому везде $n' > n''$, т.е. эффект нераспространения отсутствует.

Из формулы (3.16) с учетом (3.3)–(3.5), (3.10) найдем выражение для волнового числа:

$$k^{*2} = k_l^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2\mu(\omega_p)}{\omega_p^2\mu(\omega)} - i\eta} \cdot \frac{\omega^2\rho\varepsilon}{(1+3\varepsilon)\mu(\omega)}, \tag{3.20}$$

где $\omega_p = \dfrac{2}{R_{\text{eq}}}\sqrt{\mu(\omega_p)/\rho}$ – собственная круговая частота канала, $R_{\text{eq}} = 2r_0\sqrt{b(\varepsilon)/a(\varepsilon)}$.

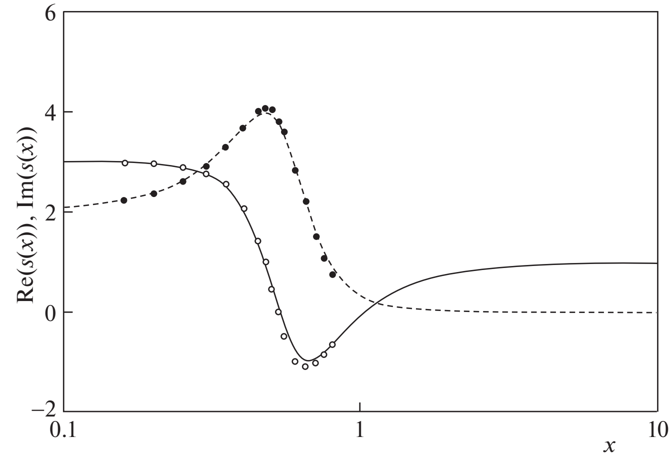

Рис. 1. Компоненты функции $s^*(x)$ (3.16), $x = k_l r_1$ при $\alpha = 800$, $\eta = 1.0$, $\varepsilon = 0.05^2$. $\mathrm{Re}(s^*(x))$: ○ – данные [2], — – по формуле (3.17); $\mathrm{Im}(s^*(x))$: ● – данные [2], ---- – по формуле (3.18).

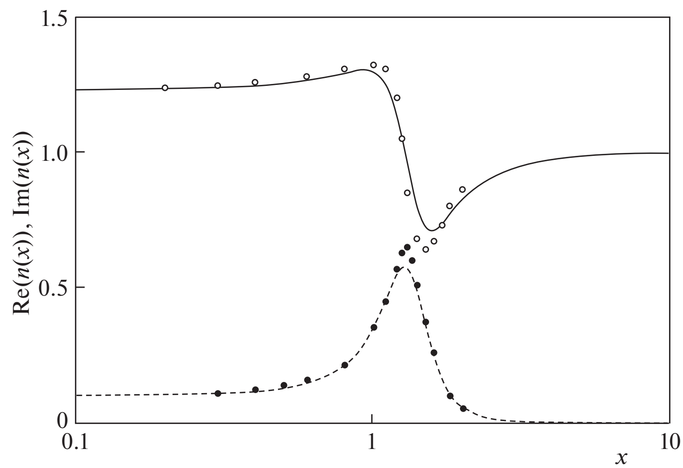

Рис. 2. Компоненты показателя преломления $n^*(x)$ при $\alpha = 125$, $\eta = 0.5$, $\varepsilon = 0.05^2$: $\mathrm{Re}(n^*(x))$: ○ – из работы [2], — – по формуле (3.16); $\mathrm{Im}(n^*(x))$: ● – из работы [2], ---- – по формуле (3.16).

При $\sqrt{\varepsilon} \le 0.3$ достаточно хороша приближенная формула $\sqrt{b(\varepsilon)/a(\varepsilon)} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\ln\dfrac{1}{\varepsilon} - 1.5}$. Для заданного значения r_1 собственная частота канала минимальна при $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0.11$ и слабо зависит от r_0 в широком диапазоне относительно больших значений ε, возрастая до бесконечности как при $\varepsilon \to 0$, так и при $\varepsilon \to 1$. Такое же значение ω_p получено в теории Г.Д. Малюжинца. Значение параметра $k_t r_0$ на резонансе: $(k_t r_0)_p = \sqrt{a(\varepsilon)/b(\varepsilon)}$.

Эффективные комплексные параметры дисперсных микронеоднородных сред — волновое число $\tilde{\kappa}$, сжимаемость $\tilde{k}$, плотность $\tilde{\rho}$ — связаны соотношением $\tilde{\kappa}^2 = \omega^2 \tilde{k}\tilde{\rho}$. Некоторые такие среды обладают резонансными свойствами, например, вода с газовыми пузырьками ([14], с. 379), резина с полостями, резина с твердыми включениями [15, 16]. В двух первых случаях за резонансные свойства отвечает комплексная сжимаемость $\tilde{k}$, тогда как $\tilde{\rho}$ — величина вещественная. В последнем случае наоборот: сжимаемость $\tilde{k}$ вещественна (при учете только вязких потерь), а резонансные свойства среды обусловлены ее комплексной плотностью $\tilde{\rho}$. Для таких сред, если они малоконцентрированные и монодисперсные, квадраты волновых чисел $\tilde{\kappa}^2$ выражаются такими же формулами, как (3.20).

Для вязкоупругих материалов согласно (3.6) и (3.10)

$$A^* = 1 - n^{*-2} \tag{3.21}$$

Поэтому при заданной форме движений (2.1), (2.2) для распространяющейся волны $(\partial/\partial z \to ik^*)$, используя зависимость (3.16), найдем:

$$\left|\frac{U_r(z, r_0)}{U_z(z)}\right| = \left|\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\frac{1-\varepsilon}{1+3\varepsilon}\sqrt{\frac{a(\varepsilon)}{b(\varepsilon)}}\frac{\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2-i\eta)\left(1+\dfrac{2\varepsilon\alpha}{1+3\varepsilon}-\Omega^2-i\eta\right)}}\right|$$

Отсюда видно, что относительное радиальное движение стенок канала имеет два резонанса: на собственной частоте канала при $\Omega^2 = 1$ и на частоте зарождения первой квазипродольной волны при $\Omega^2 = 1 + 2\varepsilon\alpha/(1+3\varepsilon)$. На низких и высоких частотах радиальное движение стенок канала ослабевает.

Из формул (2.3), (2.4), (3.16), (3.21) для распространяющихся волн получим:

$$\left|\frac{\sigma_{rz}(z, r_0)}{\sigma_{zz}(z)}\right| = \frac{(1-\varepsilon)k_l r_0}{2(1+3\varepsilon)}\left|\frac{n^*(1-i\eta)}{1-\Omega^2-i\eta}\right|$$

При $|n^*| \sim 1$, $\eta \sim 1$ это отношение всегда много меньше единицы, в том числе и на резонансе канала, что позволяет считать граничное условие (2.6) выполняющимся приближенно на всех частотах.

Волновое число неоднородных волн κ^* при известных k^* (3.20) и A^* (3.21) следует из уравнения (2.21):

$$\kappa^{*2} = \frac{1+3\varepsilon}{\varepsilon}\frac{(1-\Omega^2-i\eta)^2}{\Omega^2(1-i\eta)}k^{*2}$$

При $\varepsilon \ll 1$, $\eta \sim 1$ на всех частотах $|\kappa^*| \gg |k^*|$, откуда следует, что область неоднородных волн вблизи торцов трубки весьма мала в сравнении с длиной продольной волны.

Входная акустическая проводимость трубки с тонкой жесткой пластинкой на торце согласно (2.1) имеет вид:

$$Y(0) = \frac{\dot{U}_z(0)}{P(0)} = \frac{-i\omega f(0)}{P(0)},$$

где $P(0)$ — звуковое давление на торец. Используя граничные условия (2.15)–(2.19) для определения (2.22), найдем входные проводимости полубесконечных ($h \to \infty$) трубок:

при пластинке без трения

$$Y(0) = \frac{k^*}{\omega\rho(1-\varepsilon)} \frac{1 - \frac{ik^*}{\kappa^*}}{1 - \frac{ik^*}{\kappa^*} - \frac{k^{*2}}{\kappa^{*2}}} \approx \frac{k^*}{\omega\rho(1-\varepsilon)}; \tag{3.22}$$

при пластинке, приклеенной к торцу,

$$Y(0) = \frac{k^*}{\omega\rho(1-\varepsilon)} \frac{1}{1 - \frac{ik^*}{\kappa^*}} \tag{3.23}$$

Здесь второй множитель в правой части отражает влияние радиального закрепления входной поверхности трубки. В первом же случае ролью свободного от касательных напряжений торца чаще всего можно пренебречь.

В работе [17] приведены результаты измерений на установке "Импульсная труба" акустических характеристик образцов разной длины из резины с цилиндрическими каналами. Предполагалось, что длина каждого образца обеспечивает выполнение условия $n''k_l h > 2$, позволяющего считать образец полубесконечным. Каналы в образцах несквозные – "со стороны основания оставляется тонкая диафрагма (толщина ее около 0.5 мм)" [17]. Для каждого образца измеряли входную проводимость, приведенную к проводимости сплошной среды с волновым сопротивлением $\rho(1-\varepsilon)c_l$, т.е.

$$Y_\varepsilon = P + iQ = \rho(1-\varepsilon)c_l Y(0),$$

где под $Y(0)$ следует понимать либо (3.22), либо (3.23) – в зависимости от предположения о характере колебаний торцевой поверхности образца, граничащей с водой. Тогда получим:
для "скользкой" пластинки:

$$P + iQ \approx n^*; \tag{3.24}$$

для пластинки, приклеенной к торцу трубки:

$$P + iQ = \frac{n^*}{1 - \frac{ik^*}{\kappa^*}} \tag{3.25}$$

На рис. 3 приведены средние по измерениям на 1–3 образцах значения P (черные точки) и Q (белые точки), аппроксимированные частотными зависимостями $P(f)$ и $Q(f)$ в виде полиномов пятой степени (сплошная линия). Подставив эти зависимости в левые части выражений (3.24) или (3.25), получим уравнения для нахождения комплексного модуля сдвига (3.7) резины образцов. В первом случае это уравнение квадратное, и значения $\mu^*(f)$ относительно $P(f)$ и $Q(f)$ находятся точно. При этом на высоких частотах величина коэффициента сдвиговых потерь возрастает до $\eta(f) > 6$, что нереально и говорит о непригодности представления о "скользкой" пластинке на входном торце образца. Во втором случае уравнение для $\mu^*(f)$ переходит в квадратное, лишь если пренебречь в знаменателе правой части (3.25) малым слагаемым $\left(k^*/\kappa^*\right)^2$, так что решение не будет точным. Его можно улучшить, умножив на близкий к единице комплексный линейный полином и варьируя коэффициенты последнего. Компоненты уточненного модуля сдвига $\mu^*(f)$ показаны на рис. 4. Подстановка их в правую часть уравнения (3.25) дает представленные на рис. 3 пунктирные кривые, близкие к

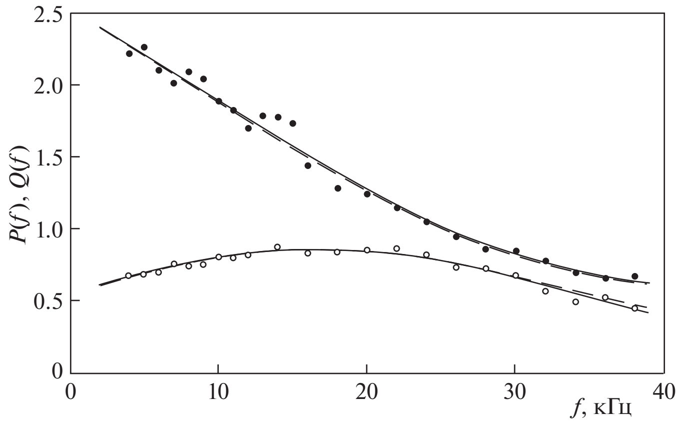

Рис. 3. Частотные зависимости компонентов приведенной входной проводимости $Y_\varepsilon = P + iQ$ образцов работы [17]: ● – активная проводимость P; ○ – реактивная проводимость Q; — – аппроксимирующие кривые $P(f)$ и $Q(f)$; – – – – кривые проверки решения для $\mu^*(f)$.

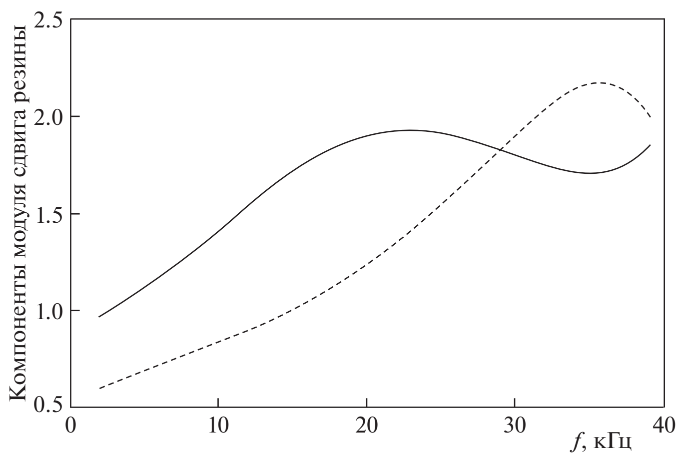

Рис. 4. Частотные зависимости расчетных компонентов комплексного модуля сдвига $\mu^*(f) = \mu(f)[1 - i\eta(f)]$ резины измеренных образцов: — – модуль сдвига $\mu(f) \times 10^{-7}$ Па, – – – – коэффициент сдвиговых потерь $\eta(f)$.

исходным $P(f)$ и $Q(f)$. Результат рис. 4 вполне реалистичен до частот $f \approx 20$ кГц и несколько сомнителен на высоких частотах, где данных о $\mu(f)$ и $\eta(f)$ в [17] нет.

Заключение. Показано, что для распространяющейся в вязкоупругой среде с цилиндрическими каналами звуковой волны дисперсионное уравнение имеет такую же форму, как для других известных резонансных микронеоднородных сред. Это тем более справедливо, чем меньше коэффициент перфорации ε (объемная концентрация каналов). Поскольку теория учитывает неоднородные волны вблизи торцевых поверхностей трубки, она применима к перфорированным резиновым слоям произвольно малой толщины с двумя типами граничных условий на поверхностях слоев [18].

Развитую здесь теорию можно привлечь к измерениям упругих параметров вязкоупругих материалов с помощью “Импульсной трубы” или вибростола. При определении модуля сдвига резины образцов работы [17] более подходящим (как и в [18]) оказалось допущение о сцеплении входного торца трубки с тонкой жесткой пластинкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тютекин В.В.* Распространение упругих волн в среде с цилиндрическими каналами // Акуст. ж. 1956. Т. 2. № 3. С. 291–301.
2. *Вовк А.Е.* Некоторые вопросы распространения упругих волн в твердых волноводах. Дисс. на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. Москва, 1967. 128 с.
3. *Шейба Л.С., Шляпочников С.А.* Об одном классе собственных колебаний упругого цилиндра // Акуст. ж. 1974. Т. 20. № 2. С. 331–333.
4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 473 с.
5. *Рэлей.* Теория звука. Том 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 247 с.
7. *Казаков Л.И.* Акустические свойства упругой среды с цилиндрическими каналами // Деп. в ВИНИТИ 12.09.84 № 6203–84. Деп. 26 с.
8. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
9. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сендс М.* Фейнмановские лекции по физике. Физика сплошных сред. М.: Мир, 1977. 288 с.
10. *Ландсберг Г.С.* Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
12. *Гинзбург В.Л.* Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. ж. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.
13. *Вовк А.Е., Тютекин В.В.* О “сверхвязких” продольных волнах в упругой среде // Акуст. ж. 1961. Т. 7. № 2. С. 256–257.
14. *Скучик Е.* Основы акустики. Том II. М.: Иностр. лит., 1959. 565 с.
15. *Викторова Р.Н., Тютекин В.В.* Физические основы создания звукопоглощающих материалов с использованием среды с комплексной плотностью // Акуст. ж. 1998. Т. 44. № 3. С. 331–336.
16. *Казаков Л.И.* Ячеечные модели вязкоупругой среды с твердыми сферическими включениями // Акуст. ж. 2022. Т. 68. № 2. С. 173–181.
17. *Вовк А.Е., Пастернак Р.Н., Тютекин В.В.* Экспериментальное исследование волновых свойств среды с цилиндрическими каналами // Акуст. ж. 1958. Т. 4. № 1. С. 24–32.
18. *Казаков Л.И.* Акустические характеристики нагруженных перфорированных слоев // Деп. в ВИНИТИ 19.08.87. № 6092. В87. 17 с.

Approximate Theory of Sound Propagation in a Limited Viscoelastic Medium with Cylindrical Channels

L. I. Kazakov[#]

[#]*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru*

The acoustic characteristics of a cylindrical viscoelastic tube of finite length with a radially fixed outer surface replacing a hexagonal unit cell a segment of a micro-inhomogeneous medium with cylindrical channels are calculated. The principle of least action and the hypothesis of flat sections are applied. A dispersion equation for longitudinal soundwaves in a tube is found that coincides with the approximations of the exact dispersion equation and has the form typical for micro-inhomogeneous resonant media. From a suitable approximation of the results of the known measurements of the reduced input conductivity of “semi-infinite” samples the frequency dependence of the complex shear modulus of the rubber used was found.

Keywords: the principle of least action, the hypothesis of flat sections, viscoelastic medium, cylindrical channels, end plates, dispersion equation, non propagation effect

REFERENCES

1. *Tyutekin V.V.* Propagation of elastic waves in a medium with cylindrical channels // Acoust. J., 1956, vol. 2, no. 3, pp. 291–301.
2. *Vovk A.E.* Some questions of elastic wave propagation in solid waveguides. Ph.D. Thesis. Phys.&Math. Moscow, 1967. 128 p.
3. *Sheiba L.S., Shlyapochnikov S.A.* On one class of natural oscillations of an elastic cylinder // Acoust. J., 1974, vol. 20, no. 2, pp. 331–333.
4. *Lyav A.* Mathematical Theory of Elasticity. Moscow;Leningrad: ONTI NKTP USSR, 1935. 473 p. (in Russian)
5. *Rayleigh.* Theory of Sound. Vol. 1. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 503 p. (in Russian)
6. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1987. 247 p. (in Russian)
7. *Kazakov L.I.* Acoustic properties of an elastic medium with cylindrical channels // Dep. in VINITI 12.09.84, № 6203, 84 Dep. 26 p.
8. *Arfken G.* Mathematical Methods in Physics. Moscow: Atomizdat, 1970. 712 p. (in Russian)
9. *Feynman R., Leighton R., Sands M.* Feynman Lectures on Physics. Physics of Continuous Media. Moscow: Mir, 1977. 288 p. (in Russian)
10. *Landsberg G.S.* Optics. Moscow: Nauka, 1976. 926 p. (in Russian)
11. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Electrodynamics of Continuous Media. Moscow: Nauka, 1982. 620 p. (in Russian)
12. *Ginzburg V.L.* On the general relationship between absorption and dispersion of sound waves // Acoustic. J., 1955, vol. 1, no. 1, pp. 31–39.
13. *Vovk A.E., Tyutekin V.V.* On "ultra-viscous" longitudinal waves in an elastic medium // Acoust. J., 1961, vol. 7, no. 2, pp. 256–257.
14. *Skushik E.* Fundamentals of Acoustics. Vol. II. Moscow: Inostr. Lit., 1959. 565 p. (in Russian)
15. *Viktorova R.N., Tyutekin V.V.* Physical foundations of sound-absorbing materials using a medium with a complex density // Acoust. J., 1998, vol. 44, no. 3, pp. 331–336.
16. *Kazakov L.I.* Cellular models of viscoelastic medium with solid spherical inclusions // Acoust. J., 2022, vol. 68, no. 2, pp. 173–181.
17. *Vovk A.E., Pasternak R.N., Tyutekin V.V.* Experimental research wave properties of a medium with cylindrical channels // Acoustic. J., 1958, vol. 4, no. 1, pp. 24–32.
18. *Kazakov L.I.* Acoustic characteristics of loaded perforated layers // Dep. in VINITI 19.08.87, no. 6092, B87. 17 p.