

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О КОНТАКТЕ ВОЛНИСТОГО ЦИЛИНДРА И УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

© 2022 г. И. Ю. Цуканов^{1,*}¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия***e-mail: ivan.yu.tsukanov@gmail.com*

Поступила в редакцию 29.06.2022 г.

После доработки 19.07.2022 г.

Принята к публикации 20.07.2022 г.

На основе решения плоских контактных задач для одной и двух зон контакта исследовано влияние геометрии волнистого цилиндра на длину фактической области контакта при внедрении его в упругую полуплоскость. Получены аналитические выражения для определения границ двух зон контакта и полной нагрузки при произвольной функции зазора между поверхностями. Установлена связь между границами зоны контакта и фиктивной зоны отрицательных (растягивающих) контактных напряжений, возникающей при использовании решения для односвязной области. Показано, что волнистость поверхности цилиндра оказывает значительное влияние на зависимость длины фактической области контакта от нагрузки. Выявлено немонотонное поведение этой зависимости при переходе от двухсвязной области контакта к односвязной.

Ключевые слова: контактная задача, волнистый цилиндр, упругий контакт, неровности поверхности

DOI: 10.31857/S0032823522050125

Микрогеометрия поверхностей оказывает существенное влияние на условия их контактного взаимодействия, от которого, в свою очередь, зависят функциональные свойства подвижных и неподвижных сопряжений. Когда одно или оба контактирующих тела изготовлены из упругих материалов с низким модулем упругости зазор между ними может быть весьма мал даже при невысоких приложенных давлениях. Вследствие наличия нескольких масштабных уровней неровностей, связанных как с погрешностями изготовления деталей (например, волнистость и шероховатость), так и с наличием искусственно созданной текстуры, их взаимовлияние может приводить к смене режима взаимодействия неровностей, что не всегда возможно учесть в рамках континуальных (например, модель нелинейного слоя [1]) и иерархических (например, фрактальных [2]) моделей в механике контакта тел с многоуровневым микрорельефом. Влияние масштабных уровней неровностей особенно проявляется в поведении фактической площади касания соприкасающихся тел с ростом приложенной нагрузки, что важно для создания текстур поверхностей с управляемыми адгезионными свойствами [3].

Эффекты, связанные с взаимовлиянием масштабных уровней неровностей при контактном взаимодействии, хорошо иллюстрирует задача о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости. Численно-аналитическое решение для очень малых амплитуд волнистости получено в работе [4] в виде ряда Фурье. Численное моделирование данной задачи при конкретных геометрических параметрах проведено в ра-

ботах [5, 6] с помощью итерационного метода решения интегрального уравнения контактной задачи и в [7] методом граничных элементов. В недавней работе [8] разработан алгоритм решения задач дискретного контакта для семейства штампов и упругой полосы, в том числе для штампа, близкого по форме к волнистому цилиндру.

В работе [7] показано, что на основные контактные характеристики — зависимость длины фактической области контакта от нагрузки и максимальное контактное давление — оказывает существенное влияние геометрия в месте начального касания волнистого цилиндра и полуплоскости. В данной работе на основе решения задач механики контактного взаимодействия проведен анализ влияния двух вариантов геометрии в месте начального касания волнистого цилиндра и полуплоскости на фактическую область контакта.

1. Постановка задач и допущения. Рассмотрим контакт волнистого упругого цилиндра и упругой полуплоскости (рис. 1) в момент их начального касания. Функция профиля поверхности цилиндра определяется следующим выражением:

$$f(x) = \frac{x^2}{2R} + \Delta \cos(nx + \psi) + C_0, \quad (1.1)$$

где R — радиус цилиндра; Δ , n — амплитуда и частота волнистости; ψ — фаза, в данной работе рассмотрены случаи $\psi = 0$ (рис. 1, а) и $\psi = \pi$ (рис. 1, б); C_0 — константа, определяющая отсутствие зазора в зоне касания.

Задача рассматривается в рамках линейной теории упругости для полубесконечных тел в плоской постановке. При этом считается, что в направлении оси y контактирующие тела имеют неограниченную длину (плоское деформированное состояние).

В качестве допущений примем, что амплитуда Δ существенно меньше периода волнистости $\lambda = 2\pi/n$, который, в свою очередь, значительно меньше радиуса R цилиндра. Влиянием сил трения и межмолекулярных сил на распределение контактных напряжений в задаче пренебрегаем.

2. Определение зависимости длины фактической области контакта от нагрузки. Рассмотрим случай $\psi = 0$ (см. рис. 1, а). Изначально в контакт вступают две неровности, положение которых зависит от геометрических параметров цилиндра и волнистости. Начало координат расположим в центре впадины между неровностями.

Запишем интегральное уравнение контактной задачи [9]:

$$h'(x) = \frac{2}{\pi E^*} \int_L \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad (2.1)$$

где функция зазора $h(x) = \delta - f(x)$, δ — величина сближения двух тел; L — множество зон контакта, в данном случае $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 = [-a, -b]$, $L_2 = [b, a]$, E^* — приведенный модуль упругости материалов контактирующих тел:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (2.2)$$

где E_1 , E_2 и ν_1 , ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов контактирующих тел, соответственно.

Решение уравнения (2.1) для двух зон контакта с неизвестными границами имеет следующий вид [10]:

$$p(x) = \frac{E^* \sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{2\pi} \int_L \frac{h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}(\xi - x)}; \quad \forall x \in L \quad (2.3)$$

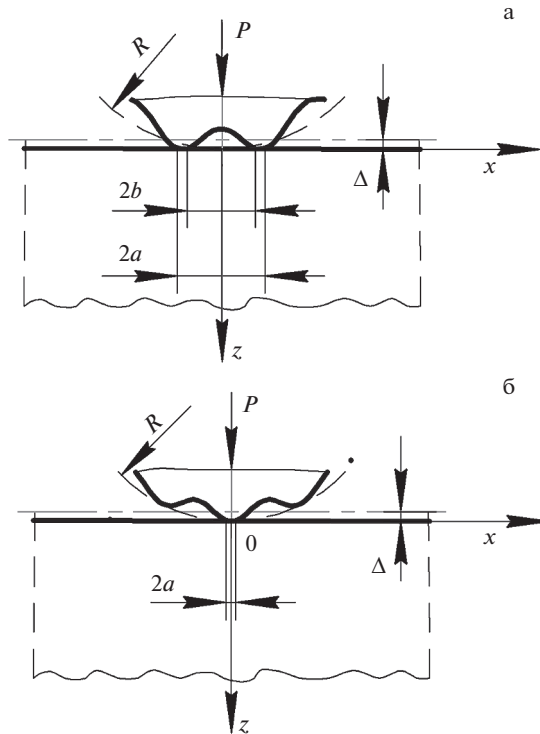


Рис. 1. Схема контакта волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при $\psi = 0$ (а) и $\psi = \pi$ (б).

При этом граничные точки (a и b), в которых контактное давление $p(x)$ обращается в нуль, связаны условием согласованности [10]:

$$\int_b^a \frac{h'(\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = 0 \tag{2.4}$$

Вычисление сингулярного интеграла в (2.3) для биквадратной функции зазора $h(x)$ получено в [11], однако для произвольного вида данной функции оно может быть затруднительно.

Для практических приложений наиболее важно определение зависимости длины фактической области контакта от приложенной нагрузки P , которая находится из уравнения равновесия

$$P = \int_L p(x)dx \tag{2.5}$$

С использованием (2.3), (2.5) и равенства Рисса для повторных интегралов с одним сингулярным интегралом [12] при удовлетворении функцией $h'(x)$ условия Гельдера имеем

$$P = \frac{E^*}{2\pi} \int_L \frac{h'(\xi)}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} \int_L \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{\xi - x} dx d\xi; \quad \forall x \in L \tag{2.6}$$

Вычисление внутреннего интеграла в (2.6) дает выражение для полной нагрузки.

$$P = \frac{E^*}{2} \int_b^a \frac{(2\xi^2 - a^2 - b^2) h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} \quad (2.7)$$

Интеграл в (2.7) не является сингулярным, что позволяет вычислить его стандартными численными методами. Выражения (2.4) и (2.7) образуют систему уравнений для определения граничных точек областей контакта при заданной нагрузке.

С использованием допущения $\Delta \ll 2\pi/n$ функция (1.1), описывающая форму волнистого цилиндра, может быть с достаточной точностью представлена рядом Тейлора 6-й степени. Тогда производная функции зазора $h'(x)$ будет иметь вид:

$$h'(x) = -A_1 x^5 + A_2 x^3 + A_3 x, \quad (2.8)$$

где $A_1 = \frac{\Delta n^6}{120}$; $A_2 = \frac{\Delta n^4}{6}$; $A_3 = \frac{1}{R} - \Delta n^2$.

Вычисляя интеграл в (2.4) при $a > b$ получим следующее уравнение:

$$\int_b^a \frac{(-A_1 x^5 + A_2 x^3 + A_3 x) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = \frac{-\pi A_1}{16} (4a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4) + \frac{\pi A_2}{4} (a^2 + b^2) + \frac{\pi A_3}{2} \quad (2.9)$$

Приравняв выражение (2.9) к нулю для выполнения условия согласованности, получим уравнение связи концов области контакта a и b .

$$-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{8} a^2 b^2 + \frac{3}{16} b^4 \right) + A_2 \frac{1}{4} (a^2 + b^2) + A_3 \frac{1}{2} = 0 \quad (2.10)$$

При $a > b > 0$ решение уравнения (2.10) относительно b имеет вид:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2A_2}{A_1} - \frac{2}{A_1} \sqrt{2A_1 A_2 a^2 - 2A_1^2 a^4 + 6A_3 A_1 + A_2^2} - a^2} \quad (2.11)$$

В условиях полного контакта на отрезке $x \in [-a, a]$ выражение для полной нагрузки, обеспечивающей “закрытие” зазора между неровностями определяется как [13]

$$P_f = E^* \int_0^a \frac{\xi h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)}} \quad (2.12)$$

Подставляя выражение (2.8) в (2.12) и вычисляя интегралы, получим:

$$P_f(a) = \frac{\pi E^*}{4} \left(-A_1 \frac{5a^6}{8} + A_2 \frac{3a^4}{4} + A_3 a^2 \right) \quad (2.13)$$

Так как задача симметрична относительно начала координат, то для определения контактного давления применим метод [14, 15] и определим производную нормальной силы P_f :

$$P_f'(a) = \frac{\pi E^*}{16} (-15A_1 a^5 + 12A_2 a^3 + 8A_3 a), \quad (2.14)$$

тогда распределение контактного давления определяется как [14, 15]:

$$p_f(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^a \frac{P_f'(s) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} = \frac{E^*}{16} \int_x^a \frac{(-15A_1 s^5 + 12A_2 s^3 + 8A_3 s) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} \quad (2.15)$$

Вычисляя интеграл в (2.15), получим:

$$p_f(x) = E^* \sqrt{a^2 - x^2} \left(-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{4} a^2 x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) + \frac{1}{4} A_2 (a^2 + 2x^2) + \frac{1}{2} A_3 \right) \quad (2.16)$$

С уменьшением внешней нагрузки контакт становится неполным, и при использовании формулы (2.16) появляются зоны с отрицательным давлением. Решение задачи для распределения давлений в таком случае сводится к вычислению сингулярного интеграла (2.6), например, с использованием соотношений для многочленов Чебышева на двух симметричных интервалах [11].

Представляет интерес взаимосвязь фактических границ зоны контакта и фиктивной зоны отрицательных (растягивающих) контактных напряжений, появляющихся при использовании формулы (2.16) для полного контакта на отрезке $x \in [-a, a]$. Граница этой фиктивной зоны определяется из условия $p_f(x_0) = 0$. Сомножитель, содержащий радикал, в зависимости (2.16) не равен нулю при $x < a$, следовательно

$$-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{4} a^2 x_0^2 + \frac{1}{2} x_0^4 \right) + \frac{1}{4} A_2 (a^2 + 2x_0^2) + \frac{1}{2} A_3 = 0 \quad (2.17)$$

Уравнения (2.17) и (2.10) для определения величины x_0 и границы зоны контакта b являются уравнениями 4-й степени с одинаковым количеством членов. При малых значениях x_0 можно пренебречь компонентом при x_0 в 4-й степени. Тогда уравнение (2.17) приводится к виду

$$\left(-A_1 \frac{1}{2} a^2 + A_2 \right) x_0^2 = A_1 \frac{3}{8} a^4 - \frac{1}{2} A_2 a^2 - A_3 \quad (2.18)$$

Аналогично, при отбрасывании компонента при b в четвертой степени для (2.10) имеем

$$\left(-A_1 \frac{1}{2} a^2 + A_2 \right) \frac{b^2}{2} = A_1 \frac{3}{8} a^4 - A_2 \frac{1}{2} a^2 - A_3 \quad (2.19)$$

Из уравнений (2.18) и (2.19) напрямую следует, что при малых размерах области, в которой контакт отсутствует ($x \in [-b, b]$), соотношение между фактической b и фиктивной x_0 границами зоны контакта равно

$$\frac{b}{x_0} = \sqrt{2} \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) в точности совпадает с соотношением, полученным в работе [16], при рассмотрении случая почти полного контакта как сжимаемой трещины под воздействием некоторого параболического давления, которым аппроксимируется распределение давления вблизи центра зоны, в которой контакт отсутствует.

В работе [17] выдвинуто предположение и показано на конкретных примерах, что исключение небольшой области с фиктивными растягивающими контактными напряжениями (в которой контакт отсутствует) путем представления ее сжимаемой трещиной не приводит к изменению полной нагрузки на контактирующие тела. Этот вывод справедлив для распределения фиктивных контактных напряжений, представимых степенным рядом [17]. С учетом условия согласованности (2.4), при $b \rightarrow 0$ подынтегральные выражения в формулах (2.12) и (2.7) совпадают. Кроме того, анализируя выражения (2.10) и (2.17) при $b = x_0 = 0$, становится ясно, что граница области контакта a , при которой реализуется односвязная область контакта, одинакова для указанных выражений.

Длина фактической области контакта будет определяться следующим выражением

$$L_r = 2(a - b) \approx 2(a - \sqrt{2}x_0) \quad (2.21)$$

При достижении полного контакта, при котором две зоны контакта сливаются ($b = 0$), из (2.10) следует выражение для длины фактической области контакта L_r^* :

$$L_r^* = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2A_2}{A_1} - \frac{2\sqrt{6A_1A_3 + A_2^2}}{A_1}} \quad (2.22)$$

Описанные результаты относятся к случаю начального контакта тел при двух подобластях контакта. После слияния подобластей контакта в рамках приведенных допущений область контакта становится односвязной для $\psi = 0$. В случае $\psi = \pi$ область контакта изначально состоит только из одного отрезка ($L = [-a, a]$, см. рис. 1, б).

Для односвязной области контакта допустимо применение принципа суперпозиции, и контактное давление можно выразить как сумму двух составляющих:

$$p(x) = p_h(x) + p_w(x), \quad (2.23)$$

где $p_h(x)$ – герцевское давление, соответствующее, параболической компоненте функции зазора $h(x)$ [13]; $p_w(x)$ – давление, соответствующее гармонической компоненте. Решение интегрального уравнения (2.1) для $L = [-a, a]$ и гармонической функции зазора получено в [18] в виде ряда по многочленам Чебышева 2-го рода. Таким образом, контактное давление будет иметь вид:

$$p(x) = \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \mp \frac{E^* \Delta n}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(an) U_{2j} \left(\frac{x}{a} \right), \quad (2.24)$$

где знак минус берется при $\psi = 0$, а знак плюс – при $\psi = \pi$; $J_k(x)$ – Функция Бесселя 1-го рода целого порядка k ; $U_k(x)$ – многочлен Чебышева 2-го рода.

Полная нагрузка для односвязной области контакта определяется интегрированием уравнения равновесия (2.5):

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx = \frac{\pi E^* a^2}{4R} \mp \frac{\pi E^* \Delta n}{2} J_1(an), \quad (2.25)$$

а длина фактической области контакта $L_r = 2a$.

3. Результаты и их обсуждение. Зависимости полной нагрузки, обезразмеренные на нагрузку, при внедрении гладкого цилиндра [19] $P_h = \pi a^2 E^* / 4R$, от длины фактической области контакта приведены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что в области высоких нагрузок точное и приближенное решение удовлетворительно совпадают. На графике зависимости нагрузки от длины области контакта выделяется наличие трех участков: двух нелинейных (при малых и больших нагрузках соответственно) и линейный переходный участок. Такое же поведение кривой характерно для периодической задачи о контакте синусоидальной волнистости и полуплоскости [13, 19]. С ростом частоты и амплитуды волнистости длина фактической области контакта уменьшается, но характер кривых остается прежним.

На рис. 3 показаны графики длины фактической области контакта в зависимости от приложенной нагрузки при $R/\Delta = 1300$, $n = 9$ и различном значении фазы ψ .

Из рис. 3 видно, что фаза гармоника волнистости оказывает значительное влияние на поведение длины фактической области контакта для небольших нагрузок. Это связано с различием, как в количестве областей контакта, так и в производной функции зазора $h(x)$. Кривая для гладкого цилиндра находится между кривыми для $\psi = 0$ и

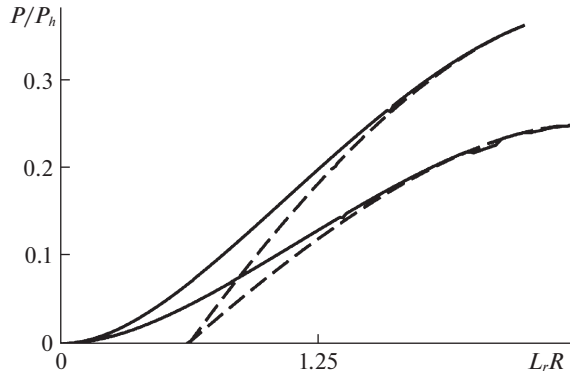


Рис. 2. Зависимость безразмерной нагрузки P от длины фактической области контакта L_r : сплошные линии – точное решение; штриховые линии – расчет на основе (2.13) и (2.20); 1 – $R/\Delta = 1300$, $n = 9$; 2 – $R/\Delta = 1600$, $n = 11$.

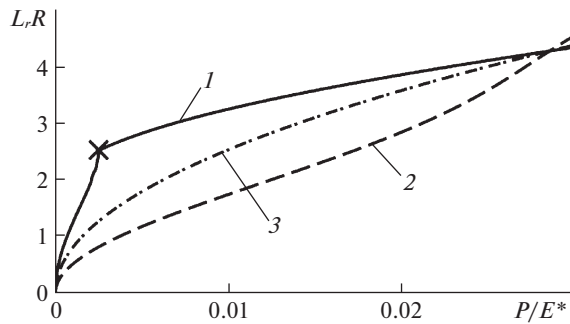


Рис. 3. Зависимости длины фактической области контакта от приложенной нагрузки при $\psi = 0$ (кривая 1); $\psi = \pi$ (кривая 2) и для гладкого цилиндра (кривая 3); символом “ \times ” обозначена точка перехода от двухсвязной области контакта к односвязной.

$\psi = \pi$, и при определенном значении нагрузки они пересекаются, что связано с осциллирующим поведением функции $P(a)$ при полном контакте на отрезке $x \in [-a, a]$. Переход от двухсвязной области контакта к односвязной характеризуется немонотонным изменением зависимости длины фактической области контакта от нагрузки. Такое поведение согласуется с численными результатами для многоуровневой волнистой поверхности [20] и показывает, что наличие таких переходных участков кривой длины фактической области контакта характеризует изменение связности контактной области.

Анализируя полученные результаты можно заключить, что если достигим полный контакт на конкретном масштабном уровне неровностей, то два механизма образования фактической области контакта – возрастание размеров отдельных пятен контакта и увеличение их количества – могут конкурировать друг с другом. Это приводит к нестабильности поведения контактных и фрикционных характеристик с ростом нагрузки. С ростом амплитуды и частоты волнистости полный контакт на отрезке $x \in [-a, a]$

становится недостижимым, и взаимодействие поверхностей будет осуществляться только на вершинах неровностей.

Заключение. Полученные решения контактной задачи для волнистого цилиндра, контактирующего с упругой полуплоскостью, позволили проанализировать различие в поведении длины фактической области контакта с ростом приложенной нагрузки в условиях односвязной и двухсвязной областей контакта, возникающих при различной фазе волнистости. Установлено, что геометрия начального касания оказывает влияние на размер длины фактической области контакта при фиксированной нагрузке. С ростом частоты и амплитуды волнистости длина фактической области контакта для двухсвязной области уменьшается, но характер ее зависимости от нагрузки не меняется и идентичен случаю периодической задачи о контакте синусоидальной волнистости и полуплоскости. На кривой выделяется наличие трех участков: двух нелинейных (при малых и больших нагрузках соответственно) и линейный переходный участок. Переход от двухсвязной области контакта к односвязной характеризуется немонотонным изменением зависимости длины фактической области контакта от нагрузки, что может отразиться на поведении других контактных и фрикционных характеристик. Это необходимо учитывать при создании микротекстурированных поверхностей, работающих в паре с упругими низкомолекулярными материалами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00400.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г. Расчет контактных характеристик с учетом параметров макро- и микрогеометрии поверхностей // Трение и износ. 1999. Т. 20. № 3. С. 239–248.
2. Borodich F.M. Fractal Contact Mechanics. Encyclopedia of Tribology. 2013. P. 1249–1258.
3. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology. Elsevier, 2022. 209 p.
4. Guduru P.R. Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: Theory // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. P. 445–472.
5. Chekina O.G., Keer L.M. A new approach to calculation of contact characteristics // ASME J. Tribol. 1999. V. 121. № 1. P. 20–27.
6. Sundaram N., Farris T.N. Multiple contacts of similar elastic materials // J. Appl. Mech. T-ASME. 2009. V. 131. № 2. P. 1–12.
7. Seabra J., Berthe D. Influence of surface waviness and roughness on the normal pressure distribution in the hertzian contact // J. Tribology. 1987. V. 109. № 3. P. 462–469.
8. Бобылев А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы // ПММ. 2022 Т. 86. Вып. 3. С. 404–423.
9. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1933. 382 с.
10. Ghanati P., Adibnazari S. Two-dimensional symmetric double contacts of elastically similar materials // Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. C J. Mechan. Eng. Sci. 2015. V. 230. № 10. P. 1626–1633.
11. Gladwell G.M.L. Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer, 1980. 736 p.
12. Хведелидзе Б.В. Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. 1975. Т. 7. С. 5–162.
13. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
14. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
15. Barber J.R. Contact Mechanics. Cham: Springer Int. Publ., 2018. 592 p.
16. Manners W., Greenwood J.A. Some observations on Persson's diffusion theory of elastic contact // Wear. 2006. V. 261. № 5–6. P. 600–610.

17. Greenwood J.A. On the almost-complete contact of elastic rough surfaces: The removal of tensile patches // *Int. J. Solids Struct.* 2015. V. 56–57. P. 258–264.
18. Tsukanov I.Y. Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // *Adv. Tribol.* 2018. V. 2018. P. 1–8.
19. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
20. Paggi M., Reinoso J. A variational approach with embedded roughness for adhesive contact problems // *Mech. Adv. Mater.* 2018. V. 2018. P. 1731–1747.

To the Contact Problem for a Wavy Cylinder and an Elastic Half-Plane

I. Yu. Tsukanov^{a,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: ivan.yu.tsukanov@gmail.com*

Based on the solution of plane contact problems for one and two contact zones, the influence of geometry of a wavy cylinder on the length of the real contact region during the penetration into an elastic half-plane is studied. Analytical expressions are obtained to determine the boundaries of two contact zones and the total load for an arbitrary gap function between the surfaces. A connection is established between the boundaries of the contact zone and the fictitious zone of negative (tensile) contact stresses that arise for the simply connected contact region solution. It is shown that the waviness of the cylinder surface has a significant effect on the dependence of length of the real contact region on load. A nonmonotonic behavior of this dependence is revealed in the transition from a doubly connected contact region to a simply connected one.

Keywords: contact problem, wavy cylinder, elastic contact, surface asperities

REFERENCES

1. Goryacheva I.G. Calculation of contact characteristics with consideration of surface macro- and microgeometric parameters // *J. Frict. & Wear*, 1999, vol. 20, no. 3, pp. 239–248.
2. Borodich F.M. *Fractal Contact Mechanics*. Encyclopedia of Tribology, 2013. P. 1249–1258.
3. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. *Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology*. Elsevier, 2022. 209 p.
4. Guduru P.R. Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: Theory // *J. Mech. Phys. Solids*, 2007, vol. 55, pp. 445–472.
5. Chekina O.G., Keer L.M. A new approach to calculation of contact characteristics // *ASME J. Tribol.* 1999, vol. 121, no. 1, pp. 20–27.
6. Sundaram N., Farris T.N. Multiple contacts of similar elastic materials // *J. Appl. Mech. T-ASME*, 2009, vol. 131, no. 2, pp. 1–12.
7. Seabra J., Berthe D. Influence of surface waviness and roughness on the normal pressure distribution in the Hertzian contact // *J. Tribol.*, 1987, vol. 109, no. 3, pp. 462–469.
8. Bobylev A.A. Application of the conjugate gradient method to solving discrete contact problems for an elastic half-plane // *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, pp. 317–332.
9. Muskhelishvili N.I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Dordrecht: Springer, 1977. xxxi+732 p.
10. Ghanati P., Adibnazari S. Two-dimensional symmetric double contacts of elastically similar materials // *Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. C J. Mechan. Engng. Sci.*, 2015, vol. 230, no. 10, pp. 1626–1633.
11. Gladwell G.M.L. *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity*. Dordrecht: Springer, 1980. 736 p.
12. Khvedelidze B.V. The method of Cauchy-type integrals in the discontinuous boundary-value problems of the theory of holomorphic functions of a complex variable // *J. Sov. Math.*, 1977, vol. 7, no. 3, pp. 309–415.
13. Shtayerman I.Ya. *Contact Problem of the Theory of Elasticity*. Leningrad: Gostekhteoretizdat, 1970. 314 p.

14. *Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V.* Problems of Continuum Mechanics with Mixed Boundary Conditions. Moscow: Nauka, 1986. 336 p. (in Russian)
15. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Cham: Springer Int. Publ., 2018. 592 p.
16. *Manners W., Greenwood J.A.* Some observations on Persson's diffusion theory of elastic contact // *Wear*, 2006, vol. 261, no. 5–6, pp. 600–610.
17. *Greenwood J.A.* On the almost-complete contact of elastic rough surfaces: The removal of tensile patches // *Int. J. Solids Struct.*, 2015, vol. 56–57, pp. 258–264.
18. *Tsukanov I.Y.* Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // *Adv. Tribol.*, 2018, vol. 2018, pp. 1–8.
19. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985. xii+452 p.
20. *Paggi M., Reinoso J.* A variational approach with embedded roughness for adhesive contact problems // *Mech. Adv. Mater.*, 2018, vol. 2018, pp. 1731–1747.