

УДК 532.5

**ДАВЛЕНИЕ И ДЕБИТ ПРИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА**© 2022 г. Р. А. Башмаков<sup>1,2,\*</sup>, Н. О. Фокеева<sup>1,\*\*</sup>, В. Ш. Шагапов<sup>1,\*\*\*</sup><sup>1</sup>*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия*<sup>2</sup>*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*\**e-mail: Bashmakov\_Rustem@mail.ru*\*\**e-mail: ffoxnina@gmail.com*\*\*\**e-mail: Shagapov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 21.07.2022 г.

После доработки 30.08.2022 г.

Принята к публикации 30.08.2022 г.

В работе получены точные аналитические решения системы уравнений, описывающих фильтрацию жидкости в пластах, подверженных ГРП, при переходных режимах работы скважины. Рассмотрены случаи, когда забойное давление или дебит скважины изменяются, принимая кусочно-постоянные значения. Данные решения обобщены для случая, когда давление на забое и дебит от времени являются непрерывными функциями. Полученные решения позволяют определить дебит или забойное давление при заданном законе изменения давления на забое или дебита скважины, а также эволюцию давления в трещине ГРП. В определенных случаях, например, при П-образном законе изменения дебита полученные решения из сравнения промышленных кривых дебита и забойного давления позволяют определить проводимость трещины ГРП. Показано хорошее совпадение теоретических кривых изменения давления, построенных по данным изменения дебита, и результатов полевых наблюдений.

*Ключевые слова:* гидроразрыв пласта, трещина ГРП, нефтяная скважина, фильтрация флюида, эволюция давления, дебит, ГДИС

DOI: 10.31857/S0032823522060017

**1. Введение.** К настоящему времени вышло много работ, описывающих распределение давления в трещине ГРП при работе нефтяной скважины. В большинстве из них рассматривается стационарная фильтрация (см., напр., [1]). Модели, приведенные в [2–5], описывают нестационарную фильтрацию жидкости в трещине и показывают связь между постоянным давлением, поддерживаемым после ее начала работы, и расходом жидкости на скважине или изменением давления при поддержании постоянного расхода. В статье [5] приводятся решения для нахождения распределения давления в трещине ГРП конечной длины и, окружающем трещину пласте. В работе [6] рассмотрены режимы работы скважины с кусочно-постоянными изменениями давления на скважине или расхода жидкости.

В данной работе рассматриваются более общие режимы работы нефтяной скважины; случаи ступенчатого и непрерывного изменения давления или изменения дебита скважины. И в том и другом случае получены точные аналитические решения, описывающие распространение давления в трещине, по которым, в свою очередь, используя

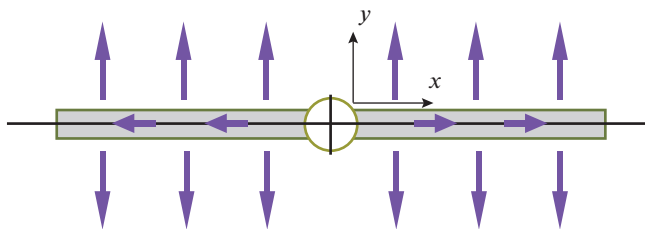


Рис. 1. Схема течения жидкости из скважины в трещину и из трещины в пласт (вид сверху).

закон Дарси, можно определить фильтрационные потоки в пласте и трещине. Показана практическая значимость полученных результатов.

Полученные теоретические результаты апробируются на данных измерений суточного дебита и изменения давления на забое реальной нефтяной скважины. По начальному П-образному режиму изменения дебита скважины и, соответствующим данным изменения давления был найден коэффициент, определяемый характеристиками пласта и трещины ГРП (значениями проницаемостей и пористости трещины и пласта, шириной и высотой трещины, вязкостью флюида). Далее, по аналитическим решениям, полученным в работе, по кривой годового изменения дебита скважины получена кривая изменения давления на забое. Из представленных в работе графиков следует достаточно хорошее совпадение теоретических кривых с промысловыми данными.

**2. Основные уравнения.** Рассмотрим нефтяную скважину с вертикальной, закрепленной пропантом трещиной, полученной путем гидроразрыва пласта (ГРП) (рис. 1). Пласт предполагается однородным, ширина трещины  $d_f$  значительно меньше ее высоты  $h_f$ . Считаем, что жидкость в пласте течет перпендикулярно плоскости трещины и, далее, по трещине течет от скважины (билинейная схема). Предполагается, что давление жидкости в пласте и трещине мало зависит от изменения глубины, поэтому рассматриваем движение флюида в трещине, как квазиодномерное вдоль оси  $Ox$ , направленной вдоль трещины. В силу симметрии можно рассматривать одно крыло трещины. Начало координат поместим на стенку забойного участка. Ось  $Oy$  направим перпендикулярно трещине. Отсчет будет идти от границы “пласт–трещина”. Скелет пористой среды пласта и трещины считаем несжимаемым, длину трещины бесконечной.

Основываясь на законе сохранения масс, законе Дарси в работах [2–5] получена система уравнений, описывающая фильтрацию флюида в трещине ГРП и пласте:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} \right) + \frac{2m_p \alpha_p}{m_f d_f} \left( \frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \left( \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \right) \quad (0 < x < \infty, 0 < y < \infty), \quad (2.2)$$

где  $\alpha_i = (\rho_0 C^2 k_i) / (\mu m_i)$  – коэффициент пьезопроводности. Здесь и в дальнейшем индексы  $i = f$  и  $p$  соответствуют значениям параметров в трещине и пласте, окружающем трещину. Через  $\rho_0$  обозначим первоначальную невозмущенную плотность жидкости,  $v_i$  – скорость жидкости,  $m_i$  – пористость,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $k_i$  – коэффициент проницаемости,  $d_f$  – ширина трещины,  $C$  – скорость звука для флюида,  $P_f = P_f(t, x)$ ,  $P_p = P_p(t, x, y)$  – давление в трещине и пласте, соответственно. Второе слагаемое в правой части уравнения (2.1) выражает интенсивность притока флюида через стенки в

трещину. Жидкость считаем слабосжимаемой  $|\rho_i - \rho_0| \ll \rho_0$ . Индекс (0) соответствует начальному состоянию.

Давление в трещине и в пласте на поверхности стенки трещины совпадает:

$$P_f = P_p|_{y=0} \quad (2.3)$$

Вдали от трещины считаем, что давление постоянно и равно первоначальному значению  $P_0$ :

$$P_p|_{y=\infty} = P_0 \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1)–(2.2) сводится в работе [4] к одному интегро-дифференциальному уравнению, описывающему распределение давления в трещине ГРП:

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial t} = \alpha_f \left( \frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{2m_p \alpha_p}{m_f d_f} \right) \int_{-\infty}^t \left( \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \right) \left( \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}} \right) \quad (\Delta P_f = P_f - P_0) \quad (2.5)$$

Здесь мы считаем, что при  $t \rightarrow -\infty$  система находится в покое, т.е.

$$P_f|_{t=-\infty} = P_p|_{t=-\infty} = P_0$$

Из сравнения слагаемых в уравнении (2.5) можно получить критические условия для характерного времени  $\tilde{t}$ , когда левая часть этого уравнения, отвечающая за упругость флюида в трещине несущественна (см. [4]).

Для рассматриваемых задач справедлива оценка

$$\tilde{t} \gg t^*; \quad t^* = \frac{\pi}{4} \left( \frac{m_f}{m_p} \right)^2 \left( \frac{d_f^2}{\alpha_p} \right) \quad (2.6)$$

Для нефтепромысловых задач обычно рассматриваются времена, удовлетворяющие условию (2.6) (минуты, часы, сутки). Поэтому будем вместо (2.5) пользоваться упрощенным уравнением

$$\frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = \frac{2m_p \alpha_p}{m_f d_f \alpha_f} \int_{-\infty}^t \left( \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}} \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (2.7)$$

**3. Случай последовательного скачкообразного закона изменения давления в скважине.** В работе [4] получено решение задачи о распространении давления в трещине ГРП при резком изменении давления в момент времени  $\tau$  на постоянную величину  $\Delta P_{(w)} = P_{(w)} - P_0$ . Предполагается, что далее давление поддерживается постоянным ( $\Delta P_{(w)} = \text{const}$ ,  $t \geq \tau$ ). Для определенности будем в дальнейшем считать, что  $\Delta P_{(w)} > 0$ , т.е. рассматривается случай, когда жидкость нагнетается в пласт, случай откачивания жидкости из скважины приводит лишь к изменению знака величины  $\Delta P_{(w)}$ .

Эти условия запишем в виде

$$\Delta P_f = 0 \quad (t < \tau, x > 0)$$

$$\Delta P_f = \Delta P_{(w)} \quad (t \geq \tau, x = 0)$$

В работе [4] получено решение поставленной задачи через специальную функцию

$$\text{Gil}(z) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin\left(z\eta^4\right)}{\eta} \right) e^{-\eta - z\eta^4} d\eta \quad (3.1)$$

Распределение давления в трещине находится, как

$$\Delta P_f = \Delta P_{(w)} \text{Gil}\left(\sqrt{\mathcal{K}_f/2x}(t - \tau)^{\frac{1}{4}}\right); \quad t > \tau \quad \left(\mathcal{K}_f = \frac{2}{d_f} \frac{m_p \sqrt{\mathfrak{a}_p}}{m_f \mathfrak{a}_f}\right) \quad (3.2)$$

На основе этого решения можно определить формулу для объемного расхода флюида в одном крыле трещины на единицу высоты трещины:

$$q = \left(\frac{d_f k_f}{\mu}\right) \left(\frac{\partial P_f}{\partial x}\right)_{x=0} = -\sqrt{\frac{\mathcal{K}_f}{2}} \left(\frac{4d_f k_f \Delta P_{f(w)}}{\mu \pi}\right) \int_0^{\infty} e^{-(t-\tau)\xi^4} d\xi$$

Введем величину  $\mathcal{F} = \frac{\mu}{\sqrt{\mathcal{K}_f/2} d_f k_f}$  (от англ. Feature – характеристика, свойство), характеризующую проводимость трещины. Используя выражение для  $\mathcal{K}_f$  из (3.2) и выражения для коэффициентов пьезопроводности  $\mathfrak{a}_p, \mathfrak{a}_f$ , входящих в уравнения (2.1) и (2.2), для параметра  $\mathcal{F}$  можем записать:

$$\mathcal{F} = \frac{\mu^{\frac{3}{4}} \sqrt{C} \rho^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{d_f k_f} \sqrt{m_p k_p}} \quad (3.3)$$

Отсюда

$$q \approx -\frac{3.6}{\pi} \frac{\left(\Delta P_{f(w)}(t - \tau)^{\frac{1}{4}}\right)}{\mathcal{F}}; \quad t > \tau \quad (3.4)$$

Здесь использовано

$$\int_0^{\infty} e^{-(t-\tau)\xi^4} d\xi = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)(t - \tau)^{\frac{1}{4}},$$

где  $\Gamma$  – Гамма-функция, и  $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.906$ .

Рассмотренное уравнение (2.7), линейное для  $\Delta P_f$ , это позволяет (см. [6]), представленную формулу (3.2) для нахождения расхода, обобщить для случая, когда давление изменяется скачкообразно в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  и на участках  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  принимает постоянные значения.

Пусть в исходном состоянии жидкость в скважине и трещине неподвижна

$$v_p = v_f = 0, \quad P_p = P_f = P_0 \quad \text{при} \quad t < \tau_0$$

В момент времени  $t = \tau_1$  скважина начинает функционировать при постоянном перепаде давления  $\Delta P_{(w)1}$  до момента времени  $\tau_2$ , с момента времени  $\tau_2$  скважина функционирует при перепаде давления  $\Delta P_{(w)2}$  до момента времени  $\tau_3$  и т.д. Для удобства записи

формулы будем считать, что  $\Delta P_{(w)0} = 0$ . Тогда решение, описывающее изменение давления в трещине, может быть записано в виде

$$\Delta P_f(t, x) = \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2} x (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right), \quad (3.5)$$

здесь  $H(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$  — функция Хевисайда.

Далее, по аналогии с (3.2), получим величину расхода на единицу высоты трещины:

$$q = -\frac{3.6}{\pi \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n \left[ H(t - \tau_i) (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right] \quad (3.6)$$

Объем флюида, поступающий (расходуемый) за время, прошедшее с момента  $\tau$  начала работы скважины до момента времени  $t$  через два крыла трещины высотой  $h_f$ , будет определяться формулой

$$V = 2h_f \int_{\tau}^t q(\tau) d\tau = -9.6 \frac{h_f}{\pi \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{3}{4}} \quad (3.7)$$

**4. Случай непрерывного изменения давления на скважине.** Пусть первоначальное давление в пласте и на забое равно  $P_0$ , давление в скважине изменяется непрерывно:

$$\Delta P_{(w)}(t) = \Delta P_f(t, 0); \quad \Delta P_f = P_f - P_0, \quad t \geq \tau_0$$

Разобьем временной промежуток  $[\tau_0, t)$  точками  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . Введем следующую сумму:

$$\Delta P_f(t, x) = \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2} x (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right) (\Delta P_{(w)}(\tau_i) - \Delta P_{(w)}(\tau_{i-1})) \quad (4.1)$$

Согласно (3.5), выражение (4.1) соответствует ступенчатому изменению давления на скважине. При  $\max(\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0$  оно может рассматриваться, как интегральная сумма для интеграла

$$\Delta P_f(t, x) = \int_{\tau_0}^t \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2} x (t - \tau)^{\frac{1}{4}} \right) dP_{(w)}(\tau) \quad (4.2)$$

Отсюда можно найти расход жидкости на скважине:

$$q = \frac{d_f k_f}{\mu} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{\text{Gil}'(0)}{\mathcal{F}} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$\text{где } \text{Gil}'(0) = \left( \frac{d}{dz} \text{Gil}(z) \right)_{z=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \eta^{-\frac{3}{4}} e^{-\eta} d\eta = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi}.$$

Поэтому

$$q = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi \mathcal{F}} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad t > \tau_0,$$

то есть

$$q = -1.154 \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (4.3)$$

Формулы (4.2) и (4.3) позволяют, зная непрерывный закон изменения давления на скважине, определять закон изменения расхода жидкости в скважине с вертикальной трещиной ГРП и в самой трещине.

**5. Решения, соответствующие кусочно-постоянным законам изменения расхода жидкости на скважине.** Пусть до момента времени  $\tau$  флюид в пласте и трещине находится в покое ( $v_p = v_f = 0$ ). В работах [3], [4] получен закон изменения давления при постоянном расходе. Пусть, первоначальный расход жидкости на скважине до момента времени  $t = \tau$  нулевой, и, начиная с момента времени  $t = \tau$  поддерживается постоянный расход  $q$ . Тогда распределение давления в трещине ГРП выражается формулой при ( $\tau \leq t$ )

$$\Delta P_f(t, x) = -(t - \tau)^{\frac{1}{4}} q \mathcal{F} \text{Zil} \left( x \sqrt{\mathcal{L}_f / 2} (t - \tau)^{\frac{1}{4}} \right), \quad (5.1)$$

где (см. [3, 4])  $\text{Zil}(z) = \int_0^z \text{Gil}(\xi) d\xi$  – специальная функция.

Так как  $\Delta P_{(w)} = \Delta P_f|_{x=0}$ , из (5.1) получим закон изменения перепада давления на скважине:

$$\Delta P_{(w)} = -\text{Zil}(0) (t - \tau)^{\frac{1}{4}} q \mathcal{F} \quad (5.2)$$

Величина  $\text{Zil}(0) \approx 0.78$ . Графики функций  $\text{Gil}(z)$  и  $\text{Zil}(z)$  приведены в работе [4].

В силу линейности уравнения (2.7), выше представленное решение (5.1), можно обобщить для случаев, когда расход представляет кусочно-постоянную функцию.

Пусть до момента  $\tau_1$  флюид в пласте находится в покое и расход жидкости на скважине  $q_0 = 0$ , в момент времени  $\tau_1$  расход выходит на значение  $q_1$  и поддерживается постоянным до момента времени  $\tau_2$ , когда он резко изменяется до величины  $q_2$  и держится постоянным до момента  $\tau_3$ , и так далее.

Решение, описывающее эволюцию давления в трещине, принимает вид:

$$\Delta P_f(t, x) = -\mathcal{F} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( x \sqrt{\mathcal{L}_f / 2} (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right) \quad (5.3)$$

Для перепада давления  $\Delta P_{(w)}$  между значениями на забое скважины и пластом ( $\Delta P_{(w)} = \Delta P_f(t, 0)$ ) получим

$$\Delta P_{(w)} = -\text{Zil}(0) \mathcal{F} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \quad (5.4)$$

**6. Случай непрерывного изменения расхода жидкости на скважине.** Рассмотрим теперь случай, когда расход жидкости на скважине изменяется непрерывно, начиная с нулевого значения  $q = q(t)$ ,  $q(0) = 0$ ,  $t \geq 0$ .

Разобьем временной промежутки  $[\tau_0, t)$  точками  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . Введем следующую сумму:

$$-\mathcal{F} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q(\tau_i) - q(\tau_{i-1})) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( x \sqrt{\mathcal{L}_f / 2} (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right)$$

При  $\max(\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) она может рассматриваться, как интегральная сумма для интеграла

$$\Delta P_f(t, x) = -\mathcal{F} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( (x \sqrt{\mathcal{L}_f / 2}) (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) dq(\tau), \quad (6.1)$$

позволяющего определить распространение давления в трещине ГРП. Отсюда, подставляя значение  $x = 0$ , получаем закон изменения давления на забое скважины при известном непрерывном изменении расхода:

$$\Delta P_{(w)}(t) = -\text{Zil}(0) \mathcal{F} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{4}} dq(\tau) \quad (6.2)$$

**7. Результаты расчетов.** На основе полученных аналитических решений, рассмотрим численные примеры. Для параметров, определяющих физические свойства флюида, а также пласта, подверженного ГРП (если специально не оговорено иное) примем следующие величины:  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $m_f = 0.3$ ,  $\mu = 10^{-3}$  Па · с,  $C = 1500$  м/с,  $k_p = 10^{-15}$  м<sup>2</sup>,  $m_p = 0.1$ ,  $k_f = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>,  $d_f = 5 \times 10^{-3}$  м.

Рассмотрим эволюцию фильтрационных полей в трещине и дебит жидкости через нее при заданном законе изменения давления в забое скважины. Поскольку уравнения, описывающие поле давления движения в трещине и окружающем ее пласте, представляют собой линейно однородные интегро-дифференциальные уравнения, то решения, описывающие возмущения давления в пласте и трещине, пропорционально изменяются относительно исходного пластового давления, то есть задание начального пластового давления при получении решений роли не играет. Допустим в исходном состоянии пластовое давление однородно и вдали от скважины сохраняется постоянное значение. Это означает, что здесь рассматриваем “начальный” этап эксплуатации скважины, в течение которого дальняя граница трещины ГРП и пласта слабо влияют на эволюцию давления в трещине и пласте. Пусть (рис. 2а) в момент времени  $t = 0$  давление в забое повышается на 10 МПа и поддерживается постоянным в течение суток. Далее, давление опускается до исходного значения и сохраняется постоянным. Видно (рис. 2б), что в течение суток происходит нагнетание ( $q < 0$ ), а далее ( $t > 1$  сутки) происходит поступление жидкости в скважину. На рис. 2в представлена эволюция давления в трещине ГРП. Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют моментам времени  $t = 6$  часов, 1 сутки, 1 сутки и 30 минут, 2 суток.

Заметим, что в моменты скачкообразного изменения давления расход жидкости на скважине приобретает бесконечное значение (всплеск), но количество извлекаемой или закачиваемой жидкости за любой промежуток времени конечно и изменяется непрерывно.

Рассмотрим случай, когда перепад давления  $\Delta P_{(w)}$  растет по линейному закону от нулевого значения до значения  $\Delta P_{(w)1}$  за время  $\tau_1$ . Тогда

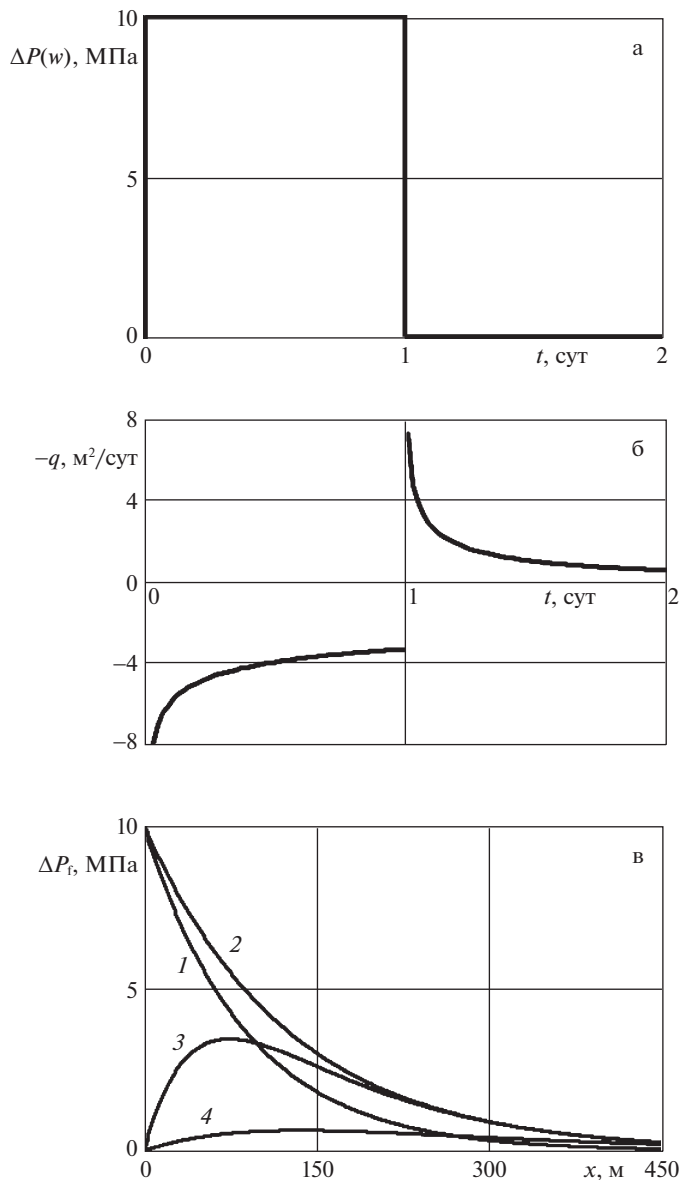
$$\Delta P_{(w)}(t) = \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} t \quad (7.1)$$

В этом случае из (4.2) для эволюции давления в трещине получим

$$\Delta P_f(t, x) = \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} \int_0^t \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f / 2x} (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) d\tau \quad (7.2)$$

На основе (4.3), используя решение (7.2), для расхода жидкости на единицу высоты трещины получим

$$q = -1.53 \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} t^{\frac{3}{4}} \quad (7.3)$$

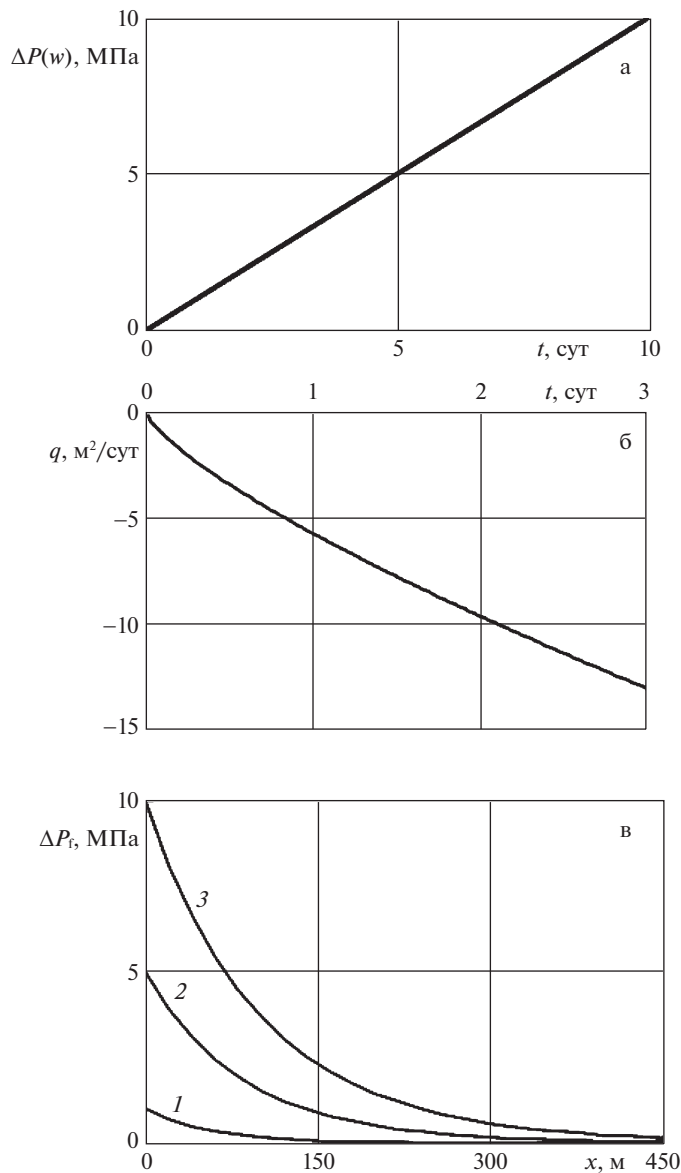


**Рис. 2.** П-образное изменение давления на забое – а; соответствующее изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины – б; распределение давления в трещине спустя (1– 6 часов, 2 – 1 сут, 3 – 1 сут и 30 мин, 4 – 2 сут) – в.

На рис. 3 представлено линейное изменение давления (а) в скважине и соответствующее изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины (б), а также эволюция поля давления (в) в трещине ГРП для линейного изменения давления. Приняты следующие значения  $\Delta P_{(w)1} = 10$  МПа,  $\tau_1 = 1$  сутки, линии 1, 2, 3 соответствуют моментам времени  $t = 1, 5$  и 10 сут.

Пусть теперь давление  $\Delta P_{(w)}$  в скважине в течение времени  $\tau_1$  линейно растёт до значения  $\Delta P_{(w)1}$ , затем снижается по линейному закону до нулевого значения до мо-

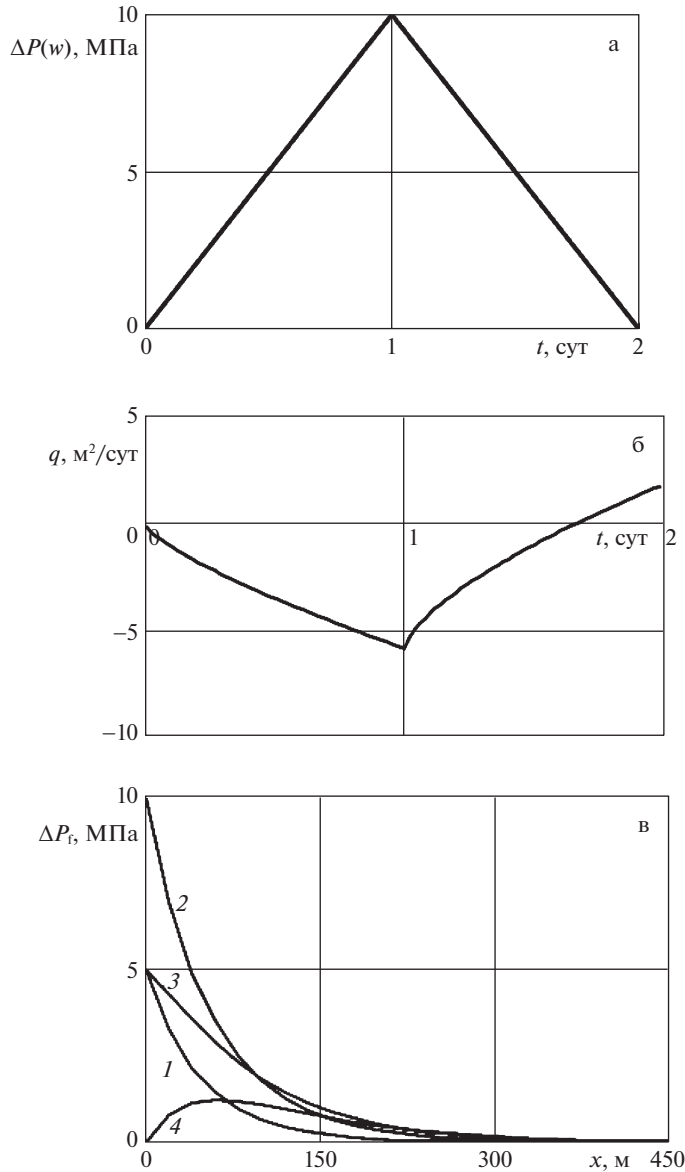




**Рис. 3.** Линейное изменение давления на забое – а; соответствующее изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины – б; распределение давления в трещине спустя (1 – сут, 2 – 5 сут, 3 – 10 сут) – в.

мента времени  $\tau_2$  ( $\Lambda$  – образное изменение). Тогда для значений времени  $t$  между  $\tau_1$  и  $\tau_2$  получим значения давления в трещине:

$$\Delta P_f = \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2x} (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) d\tau - \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^t \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2x} (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) d\tau \quad (7.4)$$



**Рис. 4.** Λ-образное изменение давления на забое – а; соответствующее изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины – б; распределение давления в трещине (1 – 0.5 сут, 2 – 1 сут, 3 – 1.5 сут, 4 – 2 сут) – в.

Если  $\tau_2 = 2\tau_1$  для несжимаемой жидкости при значениях времен  $0 < t < \tau_1$  величина расхода будет изменяться по формуле (7.3), а при временах  $\tau_1 < t < \tau_2$  при принятых выше параметрах трещины и вязкости жидкости по формуле

$$q = -1.53 \frac{\Delta P(w)l}{\mathcal{F}_p} \left( t^{\frac{3}{4}} - 2(t - \tau_1)^{\frac{3}{4}} \right) \tag{7.5}$$

На рис. 4а представлено Λ-образное изменение давления, соответствующий закон изменения расхода на единицу высоты трещины (б), а также эволюция давления в

трещине (в) при  $\Delta P_1 = 10$  МПа,  $\tau_2 = 2\tau_1 = 2$  суток. Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют моментам времени  $t = 0.5$  суток, 1 сутки, 1.5 суток и 2 суток.

Наиболее важной с целью приложения является задача определения графика изменения давления, когда известен закон изменения дебита скважины. Решение таких задач и их сопоставление с промысловыми данными для кривых “дебит – забойное давление” позволяет судить о коллекторских характеристиках в призабойной зоне пласта. Наиболее простой и интересной задачей в этом плане является задача определения характеристик пласта для П-образного по времени дебиту.

Пусть до момента времени  $\tau_0 = 0$  расход был нулевой и, затем мгновенно повышается до значения  $q$  и это значение поддерживается постоянным до момента времени  $\tau$ . Начиная с этого момента расход становится нулевым. Тогда на основе общего решения (5.3) будем иметь

$$\Delta P_f = -\mathcal{F}q \left( H(t)t^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( x\sqrt{\mathcal{R}_f/2t^{\frac{1}{4}}} \right) - H(t-\tau)(t-\tau)^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( x\sqrt{\mathcal{R}_f/2(t-\tau)^{\frac{1}{4}}} \right) \right) \quad (7.6)$$

Отсюда при  $x = 0$  получим выражение для перепада давления между забойным и пластовым значениями

$$\Delta P_{f(w)} = -\text{Zil}(0) \mathcal{F}q \left( H(t)t^{\frac{1}{4}} - H(t-\tau)(t-\tau)^{\frac{1}{4}} \right); \quad \text{Zil}(0) = 0.78 \quad (7.7)$$

Величины всех параметров, входящих в формулы (3.2) и (3.3), обычно являются известными, кроме проводимости трещины  $d_f k_f$ . Значение этого параметра можно определить из П-образного закона изменения дебита и соответствующего изменения давления на забое скважины.

На рис. 5 представлено для П-образного изменения дебита (а) – изменение давления на забое скважины (б), и эволюция давления в трещине ГРП (в) при величине расхода на единицу высоты трещины  $q = 1$  м<sup>2</sup>/сут. Цифры 1, 2, 3 и 4 на линиях соответствуют моментам времени  $t = 0.5, 1, 1.5, 2$  суток.

Видно, что для П-образного закона изменения давления соответствующая кривая для перепада давления  $\Delta P_{(w)}$  имеет форму зубчика. Причем максимальная величина зубчика достигается при  $t = \tau$ .

Согласно формуле (7.7) для величины зубчика можем записать

$$\Delta P_{(w)}(\tau) = \text{Zil}(0) \mathcal{F}q\tau^{1/4} \quad (7.8)$$

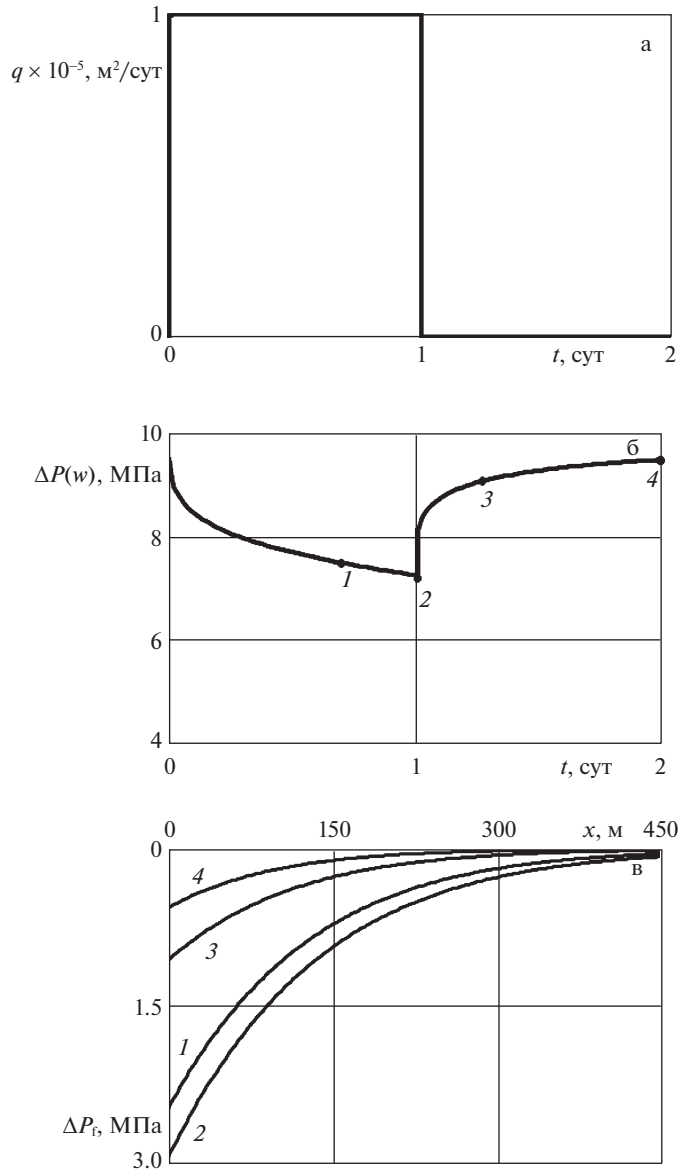
Эта формула по величине “зубчика”  $\Delta P_{(w)}(\tau)$  наблюдаемого при П-образном дебите определяет неизвестную величину проводимости трещин  $d_f k_f$ .

Действительно, из (7.8), учитывая выражение для  $\mathcal{F}$  из (3.3), получаем

$$\sqrt{d_f k_f} = -0.78 \frac{\mu^{\frac{3}{4}} \sqrt{C\rho^{\frac{1}{4}} q \tau^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt[4]{m_p k_p \Delta P_{(w)}(\tau)}} \quad (7.9)$$

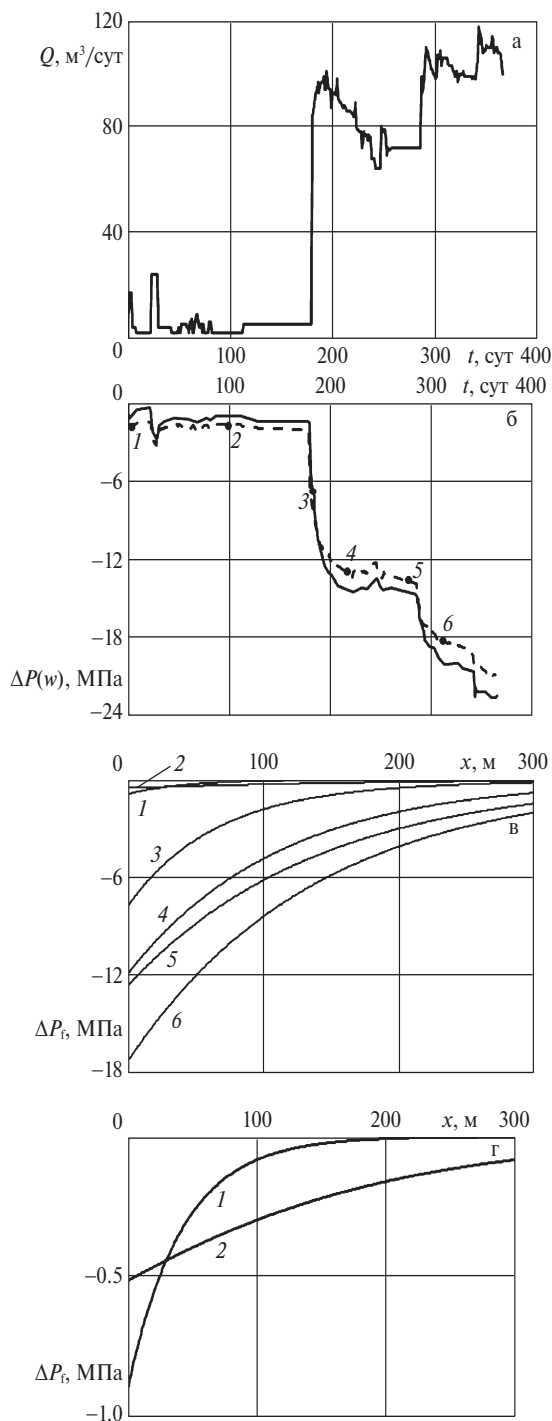
При положительном значении дебита ( $q > 0$ ) значения “зубчика” отрицательны, поэтому в правой части выражения (7.9) стоит знак минус.

**8. Сравнение результатов численных расчетов с промысловыми данными.** На рис. 6а представлена кривая изменения дебита во времени для реальной промысловой сква-



**Рис. 5.** П-образное изменение дебита скважины на единицу высоты трещины – а; соответствующее изменение давления в скважине – б; распределение давления в трещине спустя (1 – 0.5, 2 – 1, 3 – 1.5, 4 – 2 сут) – в.

жины. Для параметров скважины и пласта использованы следующие данные:  $m_p = 0.17$ ,  $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $\mu = 0.00115 \text{ Па} \cdot \text{с}$ , высота трещины  $h = 18.3 \text{ м}$ . Кривая для дебита аппроксимировалась кусочно-постоянными значениями с интервалом  $\Delta t = 1 \text{ сут}$ . Видно, что в начальный период (примерно до 28 суток) скважина два цикла работала в режиме П-образного дебита с общим расходом  $Q_1^{(1)} = 17 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $Q_2^{(2)} = 2.4 \text{ м}^3/\text{сут}$ .



**Рис. 6.** Промысловый дебит – а; сопоставление давления: исходных промысловых данных (сплошная линия) и результатов вычислений (пунктирная линия) – б; давление в трещине спуска (1 – 2, 2 – 100, 3 – 185, 4 – 220, 5 – 280, 6 – 320 сут) согласно промысловым данным изменения дебита, приведенным на рис. 6б – в; фрагмент рис. 6в (1 – 2, 2 – 100 сут) – г.

Причем величины зубчиков для изменения давления составляют  $\Delta P_{(w)}^{(1)} = 1.26$  МПа (для  $\tau_1 = 4$  сут),  $\Delta P_{(w)}^{(2)} = 2.14$  МПа (для 29 сут).

Для практического применения запишем формулу (5.4) изменения давления на забое скважины в виде

$$\Delta P_{(w)} = -C_f \left[ Q_0 H(t) t^{\frac{1}{4}} + \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (Q_i - Q_{i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right] \quad (8.1)$$

Здесь  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  – значения дебита скважины в моменты времени  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . При этом может быть выбрана любая единица измерения времени (часы, сутки) и дебита ( $\text{м}^3/\text{ч}$ ,  $\text{т}/\text{сут}$ ,  $\text{бар}/\text{сут}$ ). По величине первого “зубчика” определим величину  $C_f = \Delta P_{(w)}^{(1)} / \tau_1^{1/4}$ , которую при подстановке в формулу (8.1) можем использовать для определения изменения давления на скважине.

Согласно формуле (7.9) определяется проводимость трещины. В рассматриваемом примере  $d_f k_f = 2.2 \times 10^{-12} \text{ м}^3$ .

Проводились расчеты, согласно решению (5.4), для продолжительного этапа, который длился 365 суток. На рис. 6б сплошная линия давления соответствует промысловым значениям, а пунктирная линия – рассчитанным по формулам (5.4). На рис. 6в представлена эволюция давления в трещине, согласно решению (5.3). Линии 1, 2, 3, 4, 5 и 6 показывают распределение давления в трещине ГРП в моменты времени  $t = 2, 100, 185, 220, 280, 320$  сут, соответствующим различным характерным изменениям дебита скважины.

**Заключение.** Получены аналитические решения, описывающие эволюцию давления в трещине по известным законам изменения давления на забое скважины или дебита скважины. Эти решения позволяют получить кривые “дебит–давление на забое”. Наиболее важным результатом, представляется решение для П-образного изменения дебита: сопоставление кривых “дебит–давление на забое” с промысловыми данными, что позволяет оценить по величине “зубчика” на кривой давления проводимость трещины ГРП.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: ООО “Недра-Бизнесцентр”, 1999. 212 с.
2. Cinco-Ley H. Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // Int. Petrol. Exh. and Tech. Symp., Beijing (China). Mar 18–26, SPE 10043, 1982.
3. Шагапов В.Ш., Нагаева З.М. К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5 (345). С. 121–130.
4. Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
5. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 6–14.
6. Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Фокеева Н.О. Особенности фильтрации флюидов в коллекторах, подверженных гидроразрыву пласта, при переходных режимах работы скважины // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 3 (373). С. 117–127.

## Some Features of Fluid Filtration in a Hydraulic Fracture under Transient Conditions of Well Operation

R. A. Bashmakov<sup>a,b,#</sup>, N. O. Fokeeva<sup>a,##</sup>, and V. Sh. Shagapov<sup>a,###</sup>

<sup>a</sup>*Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center RAS, Ufa, Russia*

<sup>b</sup>*Bashkir State University, Ufa, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: Bashmakov\_Rustem@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: ffoxnina@gmail.com*

<sup>###</sup>*e-mail: Shagapov@rambler.ru*

In this paper, analytic solutions of the equations system are obtained. The system of equations describes the pressure evolution in the hydraulic fracture during transient well operation modes. Options are considered: when the bottom hole pressure or the well flow rate changes and get piecewise constant value. These solutions are generalized for the case when the bottom pressure and the flow rate versus time are continuous functions. The solution makes it possible to determinate the flow rate or bottom hole pressure according to the given pressure change law in the bottom or well flow rate and, as well as pressure evolution in the hydraulic fracture. In special cases, for example, with П-shaped flow rate law change, the solutions obtained from comparing the field flow rate curves and bottom hole pressure make it possible to determine the conductivity of a hydraulic fracture.

*Keywords:* hydraulic fracturing, hydraulic fracture, oil well, fluid filtration, pressure evolution, flow rate, well testing

## REFERENCES

1. Kanevskaya R.D. Mathematical Modeling of Oil and Gas Field Development Using Hydraulic Fracturing. Moscow: OOO Nedra-Businesscenter, 1999. 212 p.
2. Cinco-Ley H. Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // SPE 10043 Petrol. Exh.&Techn. Symp., Beijing, China. Mar 18–26. 1982.
3. Shagapov V.Sh., Nagaeva Z.M. On the theory of seepage waves of pressure in a fracture located in a porous permeable medium // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2017, vol. 58, no. 5, pp. 862–870.
4. Nagaeva Z.M., Shagapov V.Sh. Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir // Appl. Mat. Mech., 2017, vol. 81, no. 3, pp. 214–222.
5. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. Unsteady flow through a porous stratum with hydraulic fracture // Fluid Dyn., 2019; vol. 54, no. 5, pp. 594–602.
6. Shagapov V.Sh., Bashmakov R.A., Fokeeva N.O. Fluid filtration in reservoirs subjected to hydraulic fracturing during transient well operation // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2022, vol. 63, no. 3, pp. 474–483.