ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 6, с. 887–916

*УДК 531.36*

# ОРИЕНТАЦИЯ И КИНЕМАТИКА ВРАЩЕНИЯ: КВАТЕРНИОННЫЕ И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МАТРИЧНЫЕ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, УРАВНЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ

**© 2022 г. Ю. Н. Челноков[1,*]**

[1] *Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*
**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.
После доработки 15.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

Построена теория трехмерных и четырехмерных кососимметрических операторов вращения, порождаемых экспоненциальными представлениями ортогональных операторов или их представлениями с помощью формул Кэли. К порождающим ортогональным операторам относятся матрица направляющих косинусов углов, кватернионная матрица параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернион вращения Гамильтона. Изложены новые матричные и кватернионные кинематические уравнения вращения твердого тела в четырехмерных кососимметрических матрицах и в кватернионах с нулевыми скалярными частями (в ассоциированных кватернионах). Показано их преимущество по сравнению с известными кинематическими уравнениями вращения в трехмерных кососимметрических матрицах и по сравнению с векторными кинематическими уравнениями. В качестве актуального приложения предложенных уравнений рассмотрено построение высокоточных алгоритмов определения ориентации движущегося объекта в инерциальной системе координат с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Кососимметрические матрицы четвертого (четного) порядка и ассоциированные кватернионы имеют качественные преимущества перед кососимметрическими матрицами третьего (нечетного) порядка и векторами. Это делает использование предложенных кинематических уравнений вращения в задачах ориентации и навигации более эффективным по сравнению с традиционно используемыми уравнениями в трехмерных кососимметрических операторах.

*Ключевые слова:* трехмерные и четырехмерные ортогональные и кососимметрические операторы вращения, матрицы, векторы, кватернионы, экспоненциальные представления ортогональных операторов, формулы Кэли, кинематические уравнения вращения, алгоритмы ориентации

**DOI:** 10.31857/S0032823522060030

**1. Введение.** Как известно (Гантмахер, 1967) [1], существует взаимно однозначное соответствие между ортогональными и кососимметрическими операторами, которое устанавливается с помощью экспоненциальных представлений ортогональных операторов или их представлений с помощью формул Кэли. В статье обсуждаются трехмерные и четырехмерные кососимметрические операторы вращения (матрицы, векторы, кватернионы), которые порождаются экспоненциальными представлениями таких ортогональных операторов как матрица направляющих косинусов углов, кватернионная матрица вращения и кватернион вращения Гамильтона [2]. Также рассматриваются представления этих операторов с помощью формул Кэли.

Трехмерный кососимметрический оператор (трехмерная кососимметрическая матрица) соответствует трехмерному вектору, а четырехмерный кососимметрический оператор (четырехмерная кососимметрическая матрица) соответствует кватерниону, скалярная часть которого равна нулю. Такой кватернион называется нами ассоциированным кватернионом. Число компонент вектора и ненулевых компонент ассоциированного кватерниона одинаково и равно трем, но их свойства существенно различаются, так как размерности вектора и ассоциированного кватерниона различны и равны трем и четырем соответственно.

Кватернион – это четырехмерное гиперкомплексное число (или переменная) с одной действительной и тремя мнимыми единицами. Он был введен в математику и механику Гамильтоном (1843) [2]. Кватернионное исчисление, в отличие от матричного исчисления, имеет геометрическую наглядность векторного исчисления. В отличие от векторного исчисления, оно более общее и гибкое. Так, в кватернионном исчислении, в отличие от векторного, операция деления определена (существует), и она легко алгоритмизируема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме того, в кватернионных уравнениях, в отличие от векторных, можно непосредственно использовать векторные величины, определяемые их проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный аппарат более мощным и гибким средством решения многих задач механики, навигации и управления движением, чем векторный. Также отметим, что в кватернионном исчислении, в отличие от матричного, операция аналитического нахождения и численного вычисления обратного кватерниона, в отличие от аналитического нахождения и вычисления обратной матрицы, проста и легко алгоритмизируема.

Кватернион вращения Гамильтона может быть введен в классическую механику на основе фундаментальной теоремы Эйлера о конечном повороте твердого тела. Согласно этой теореме твердое тело с одной неподвижной точкой может быть переведено из исходного углового положения в конечное с помощью одного поворота вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку. Угол этого поворота называется углом Эйлера, а ось вращения – осью вращения Эйлера. Уравнения и соотношения теории конечных поворотов и кинематики вращательного движения твердого тела принимают наиболее удобный вид при использовании четырех параметров Эйлера (Euler (1770) [3]; Rodrigues–Hamilton, Euler–Rodrigues (1840) [4]). Эти параметры однозначно связаны с проекциями вектора Родригеса (Rodrigues (1840) [4]) или вектора Гиббса (Gibbs (1901, 1961) [5, 6]).

Использование четырех параметров Эйлера в качестве скалярных кинематических параметров вращательного движения естественным образом привело к введению в механику четырехмерного гиперкомплексного числа – кватерниона конечного поворота Гамильтона (его компонентами являются параметры Эйлера), а также привело к введению в механику четырехмерных кватернионных матриц.

С момента открытия кватернионов до 50-х годов прошлого века интерес к ним проявляли в основном математики и физики, механики использовали их в основном для изучения геометрии движения. Широкий интерес механиков и специалистов в области прикладной математики, навигации и управления движением к кватернионам возник начиная с 60-х годов прошлого века в связи с созданием автономных высокоточных компьютеризированных систем ориентации, навигации и управления движением космических аппаратов, ракет, самолетов, морских кораблей, роботов и манипуляторов, наземных экипажей. Это создание потребовало разработки новых методов и моделей теоретической механики, новой теории инерциальной навигации и управления движением, новых регулярных, не содержащих особых точек типа деления на ноль, моделей и алгоритмов навигации и управления движением, которые эффективно реализуются в реальном времени на бортовых компьютерах. В настоящее время кватернионные методы и модели теоретической механики заняли здесь прочное место как теоретический аппарат, позволяющий наиболее эффективно решать многие задачи механики, навигации и управления движением.

Кососимметрические матрицы третьего (нечетного) и четвертого (четного) порядков, используемые для описания вращения, обладают качественно различными свойствами (Гантмахер 1967) [1]. Кососимметрические матрицы третьего порядка являются особыми (их определители равны нулю), кососимметрические матрицы четвертого порядка не являются особыми (их определители всегда отличны от нуля). Если многочлен любой степени от кососимметрической матрицы третьего порядка сводится к многочлену второй степени, то многочлен любой степени от кососимметрической матрицы четвертого порядка сводится к многочлену первой степени, что важно при построении алгоритмов ориентации. Ассоциированные кватернионы имеют аналогичные преимущества перед трехмерными векторами.

Это делает использование предложенных нами матричных кинематических уравнений в четырехмерных кососимметрических матрицах и кватернионных кинематических уравнений в ассоциированных кватернионах более эффективным при построении алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) в сравнении с кинематическими уравнениями в трехмерных кососимметрических операторах (векторных и матричных) (Wiener (1962) [7], Stuelpnagel (1964) [8], Bortz (1971) [9], Панов (1984, 1995) [10, 11], Marandi и Modi (1987) [12], Shuster (1993) [13], Tsiotras и Longuski (1995) [14]; Schaub, Tsiotras и Junkins (1995) [15], Schaub и Junkins (1996) [16]; Tsiotras, Junkins и Schaub (1997) [17]; Schaub, Robinett и Junkins (1997) [18], Schaub (1998) [19], Hurtado (2008) [20]). Такие алгоритмы ориентации были предложены нами (Челноков и Переляев (2014) [21]; Челноков, Переляев и Челнокова (2016) [22]).

Отметим, что Schaub, Tsiotras и Junkins (1995) [15], Tsiotras, Junkins и Schaub (1997) [17], а также Hurtado (2008) [20] ввели преобразование Кэли между трехмерной ортогональной матрицей ориентации (для направляющих косинусов углов) и трехмерной кососимметрической матрицей (для модифицированных параметров Родригеса).

Кинематика вращения с использованием параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и четырехмерных ортогональных кватернионных матриц рассматривалась в работах Челнокова (1977) [23], Плотникова и Челнокова (1979, 1981) [24, 25]), а также в отдельных главах книги (Челноков 2006) [26]. Данная статья обобщает и развивает полученные нами результаты в области геометрии и кинематике вращения в книге [26] (2006, гл. 5, с. 245–259), которые касаются трехмерных и четырехмерных кососимметрических операторов вращения и кинематических уравнений в этих операторах.

*Новизна исследования.* Описание вращения, одного из двух основных движений в природе и технике, основано на использовании различных трехмерных и четырехмерных ортогональных и кососимметрических операторов вращения: матриц, векторов и кватернионов Гамильтона. Актуальным является рассмотрение связи между известными ортогональными и кососимметрическими операторами и установление новых удобных операторов вращения. Эти связи устанавливаются нами с использованием экспоненциальных представлений ортогональных операторов и их представлений с помощью формул Кэли. Введенные нами новые удобные операторы вращения – это четырехмерные кососимметрические матрицы и кватернионы с нулевыми скалярными частями (ассоциированные кватернионы). Также актуально получение новых кинематических уравнений вращения, удобных в теории и технике. Такими уравнениями являются предложенные нами кинематические уравнения вращения в четырехмерных кососимметрических матрицах и в ассоциированных кватернионах. Их использование позволило нам построить новые высокоточные алгоритмы определения ориентации в инерциальной системе координат.

Предложенное нами развитие кинематики вращения заключается во введении новых кососимметрических операторов вращения, в построении новых удобных кинематических уравнений вращения и эффективных алгоритмов ориентации. Оно позволяет повысить эффективность аналитического исследования кинематики вращения и точность систем ориентации, навигации и управления движением.

**2. Вращение твердого тела: векторы, кватернионы и матрицы.**

*2.1. Вектор и кватернион поворота, матрица направляющих косинусов, кватернионные матрицы поворотов (вращений).* Введем в рассмотрение опорную (основную) систему координат $\xi$ ($\xi_1\xi_2\xi_3$) и жестко связанную с твердым телом систему координат $X$ ($X_1X_2X_3$) с началами в выбранной точке $O$ тела (полюсе). Введем обозначения: $\varphi$ – эйлеров угол поворота твердого тела (системы координат $X$) относительно системы координат $\xi$, $\mathbf{e}$ – единичный вектор эйлеровой оси конечного поворота тела в опорной системе координат $\xi$, $e_i$ ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора $\mathbf{e}$ на оси систем координат $X$ и $\xi$ (одинаковые при условии, что в начальном положении одноименные оси систем координат $X$ и $\xi$ совпадали), $\boldsymbol{\theta} = 2\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\mathbf{e}$ – вектор конечного поворота тела, $\lambda_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$) – параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) [27, 28] рассматриваемого поворота тела, $\boldsymbol{\lambda}$ – кватернион Гамильтона конечного поворота тела, имеющий вид

$$\begin{gathered} \lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}) \\ \lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_i = \sin\frac{\varphi}{2}e_i, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона.

Введем также трехмерную матрицу $c$ направляющих косинусов $c_{ik}$ углов между координатными осями $\xi_i$ и $X_k$

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

и четырехмерную кватернионную матрицу $n$ (Bellman 1960 [29], Ickes 1970 [30], Плотников и Челноков (1981) [25], Челноков (2006) [26]):

$$n = n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Матрицы $c$ и $n$ ортогональны:

$$c^{-1} = c^{\mathrm{T}}, \quad n^{-1} = n^{\mathrm{T}}; \quad \det c = |c| = 1, \quad \det n = |n| = 1$$

Здесь и далее "Т" – символ транспонирования.

Отметим следующие свойства кватернионной матрицы $n$: 1) $n = E$, если угол поворота тела $\varphi = 0$ ($E$ – единичная матрица размерами $4 \times 4$); 2) произведение матриц вида $n$ дает матрицу того же вида: $n_1n_2 = n_3$, 3) некоммутативность в общем случае матриц типа $n$: $n_1n_2 \neq n_2n_1$; 4) матрица $n$ переходит в обратную матрицу $n^{-1}$, если вектор конечного поворота тела $\boldsymbol{\theta}$ изменяет свое направление на противоположное.

*2.2. Кососимметрические матрицы.* В дальнейшем будем рассматривать трехмерные кососимметрические матрицы

$$s_v = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

и четырехмерные кососимметрические матрицы типа $n$:

$$s_q = n\{\mathbf{s}_v\} = \begin{pmatrix} 0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ s_1 & 0 & s_3 & -s_2 \\ s_2 & -s_3 & 0 & s_1 \\ s_3 & s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Эти кососимметрические матрицы сопоставляются трехмерному вектору $\mathbf{s}_v$ с координатами $s_i$.

Отметим следующие свойства введенных трехмерных и четырехмерных кососимметрических матриц:

$$\begin{gathered} \det s_v = |s_v| = 0, \quad s_v^{\mathrm{T}} = -s_v, \quad s_v^2 = -s_v s_v^{\mathrm{T}} = -s_v^{\mathrm{T}} s_v, \quad s_v^3 = -|\mathbf{s}_v|^2 s_v \\ s_v^4 = -|\mathbf{s}_v|^2 s_v^2, \quad s_v^5 = |\mathbf{s}_v|^4 s_v, \quad s_v^6 = |\mathbf{s}_v|^4 s_v^2, \quad s_v^7 = -|\mathbf{s}_v|^6 s_v \\ s_v^8 = -|\mathbf{s}_v|^6 s_v^2, \quad |\mathbf{s}_v|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \ldots \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} \det s_q = |s_q| = \det n\{\mathbf{s}_v\} = |n\{\mathbf{s}_v\}| = \left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)^2 \\ s_q^{\mathrm{T}} = -s_q, \quad s_q^2 = -s_q s_q^{\mathrm{T}} = -s_q^{\mathrm{T}} s_q = -|\mathbf{s}_v|^2 E, \quad |\mathbf{s}_v|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \\ s_q^3 = -|\mathbf{s}_v|^2 s_q, \quad s_q^4 = |\mathbf{s}_v|^4 E, \quad s_q^5 = |\mathbf{s}_v|^4 s_q, \quad s_q^6 = -|\mathbf{s}_v|^6 E, \quad s_q^7 = -|\mathbf{s}_v|^6 s_q, \ldots \end{gathered} \tag{2.7}$$

Таким образом, кососимметрические матрицы третьего (нечетного) и четвертого (четного) порядков, как уже отмечалось, имеют качественно различные свойства. Если кососимметрические матрицы третьего порядка являются особыми (их определители равны нулю), то кососимметрические матрицы четвертого порядка – нет (их определители всегда отличны от нуля). Кроме того, если многочлен любой степени от кососимметрической матрицы третьего порядка сводится к многочлену второй степени (с соответствующими коэффициентами), то многочлен любой степени от кососимметрической матрицы четвертого порядка сводится к многочлену первой степени (с соответствующими коэффициентами).

**3. Кососимметрические операторы, порождаемые экспоненциальными представлениями ортогональных операторов.**

*3.1. Экспоненциальное представление матрицы направляющих косинусов.* Рассмотрим трехмерную кососимметрическую матрицу $s_v$ размерами 3 × 3, определяемую формулой (2.4) и порождаемую экспоненциальным представлением матрицы $c$ направляющих косинусов углов между осями связанной $X$ и опорной $\xi$ систем координат. Эта матрица связана с ортогональной матрицей $c$ направляющих косинусов углов матричным соотношением

$$c = e^{s_v} = \exp s_v \tag{3.1}$$

Матричная экспонента для любой квадратной матрицы $A$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$e^A = \exp A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots \tag{3.2}$$

Используя разложение матричной экспоненты $e^{s_v}$ в ряд (3.2), свойства (2.6) кососимметрической матрицы третьего порядка и разложения в ряды тригонометрических функций

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots, \quad \cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots, \tag{3.3}$$

из (3.1) получим:

$$c = E + |\mathbf{s}_v|^{-1} \sin|\mathbf{s}_v|\, s_v + |\mathbf{s}_v|^{-2} (1 - \cos|\mathbf{s}_v|)\, s_v^2; \quad |\mathbf{s}_v|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{s}_v$ — трехмерный вектор с компонентами $s_i$.

С другой стороны, матрица $c$ направляющих косинусов может быть представлена в виде

$$c = c\{\varphi, \mathbf{e}\} = \cos\varphi E + \sin\varphi s_v\{\mathbf{e}\} + (1 - \cos\varphi) s_s\{\mathbf{e}\}; \quad s_s = E + (s_v\{\mathbf{e}\})^2,$$

где $s_v\{\mathbf{e}\}$ и $s_s\{\mathbf{e}\}$ — кососимметрическая и симметрическая матрицы, сопоставляемые единичному вектору $\mathbf{e}$ эйлеровой оси конечного поворота твердого тела, матрица $s_v\{\mathbf{e}\}$ имеет вид (2.4) и составлена из проекций $e_i$ единичного вектора $\mathbf{e}$ эйлеровой оси вращения тела, одинаковых в системах координат $\xi$ и $X$, $\varphi$ — эйлеров угол поворота тела.

Вводя эйлеров вектор $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ конечного поворота и учитывая, что $s_s = E + (s_v\{\mathbf{e}\})^2$, запишем последнюю формулу в виде

$$c = c\{\boldsymbol{\varphi}\} = E + \frac{1}{\varphi}\sin\varphi s_v\{\boldsymbol{\varphi}\} + \frac{1}{\varphi^2}(1 - \cos\varphi)(s_v\{\boldsymbol{\varphi}\})^2; \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}, \tag{3.5}$$

где $s_v\{\boldsymbol{\varphi}\}$ — трехмерная кососимметрическая матрица $3 \times 3$, сопоставляемая вектору $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$, координаты которого $\varphi_i = \varphi e_i$ одинаковы в системах координат $\xi$ и $X$.

Из сравнения (3.4) и (3.5) следует, что трехмерная кососимметрическая матрица $s_v$, порождаемая экспоненциальным представлением матрицы направляющих косинусов (3.1), имеет вид

$$s_v = s_v\{\boldsymbol{\varphi}\} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}, \quad \varphi_i = \varphi e_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3.6}$$

т.е. это трехмерная кососимметрическая матрица, которая сопоставляется эйлерову вектору $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ конечного поворота твердого тела (вектор $\boldsymbol{\varphi}$ является для матрицы $s_v$ собственным вектором и отвечает ее нулевому собственному числу). Элемент $s_i$ этой матрицы равен проекции $\varphi_i$ вектора $\boldsymbol{\varphi}$: $s_i = \varphi_i$.

Найдем выражение трехмерной кососимметрической матрицы $s_v$ через матрицу $c$ направляющих косинусов. Можно показать, что кватернион ориентации $\boldsymbol{\lambda}$ и матрица $c$ связаны равенством

$$\lambda_0 E - s_v\{\boldsymbol{\lambda}_v\} = 2\lambda_0 (E + c\{\boldsymbol{\lambda}\})^{-1}; \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda}_v, \quad \lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \boldsymbol{\lambda}_v = \sin(\varphi/2)\mathbf{e}$$

Отсюда, учитывая, что $s_v\{\boldsymbol{\lambda}_v\} = \sin(\varphi/2) s_v\{\mathbf{e}\} = (1/\varphi)\sin(\varphi/2) s_v\{\boldsymbol{\varphi}\}$, находим

$$s_v\{\boldsymbol{\varphi}\} = \varphi\, \mathrm{ctg}(\varphi/2)[E - 2(E + c)^{-1}] \tag{3.7}$$

Обратная матрица

$$(E + c)^{-1} = (1/2)[E + (1 + \mathrm{tr}\, c)^{-1} (c^T - c)],$$

где $1 + \mathrm{tr} c = 1 + c_{11} + c_{22} + c_{33} = 2(1 + \cos\varphi) = 4\cos^2(\varphi/2)$.

Поэтому формула (3.7), выражающая трехмерную кососимметрическую матрицу $s_v\{\boldsymbol{\varphi}\}$ через матрицу $c$ направляющих косинусов, примет вид:

$$s_v\{\boldsymbol{\varphi}\} = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\sin\varphi}(c - c^{\mathrm{T}}) \tag{3.8}$$

Формулу (3.8) можно было записать, минуя проделанные выкладки, если использовать известные формулы, выражающие направляющие косинусы $e_k$ эйлеровой оси конечного поворота твердого тела через элементы матрицы направляющих косинусов.

Отметим, что в литературе приводится (Stuelpnagel (1964) [8], Переляев (2009) [31]) более сложное выражение матрицы $s_v\{\boldsymbol{\varphi}\}$ через матрицу $c$ в форме матричного квадратичного многочлена:

$$s_v\{\boldsymbol{\varphi}\} = \frac{1}{\sin\varphi}\left[-\varphi(1+2\cos\varphi)E + \frac{1}{2}\varphi(1+\cos\varphi)c - \frac{1}{2}\varphi c^2\right] \tag{3.9}$$

Это представление для матрицы $s_v$ обратно представлению (3.5) для матрицы $c$.

Также отметим, что Hurtado (2008) [20] приводятся другие формулы, связывающие трехмерную кососимметрическую матрицу $s_v$ с ортогональной матрицей $c$ направляющих косинусов углов.

*3.2. Экспоненциальные представления кватернионной матрицы и кватерниона.* Рассмотрим теперь четырехмерную кососимметрическую матрицу $s_q$, порождаемую экспоненциальным представлением кватернионной матрицы поворота типа $n$, т.е. кососимметрическую матрицу $s_q$ размерами 4 × 4, связанную с ортогональной кватернионной матрицей $n\{\boldsymbol{\lambda}\}$ соотношением

$$n\{\boldsymbol{\lambda}\} = e^{s_q} = \exp s_q, \tag{3.10}$$

где четырехмерная кватернионная матрица $n\{\boldsymbol{\lambda}\}$ сопоставляется кватерниону поворота $\boldsymbol{\lambda}$ и имеет вид матрицы (2.3).

Используя разложение матричной экспоненты $e^{s_q}$ в ряд (3.2), свойства (2.7) кососимметрической матрицы четвертого порядка и разложения в ряды тригонометрических функций (3.3), из (3.10) получим:

$$n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \cos|\mathbf{s}_v|E + |\mathbf{s}_v|^{-1}\sin|\mathbf{s}_v|s_q; \quad |\mathbf{s}_v|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{3.11}$$

С другой стороны, кватернионная матрица $n\{\boldsymbol{\lambda}\}$ может быть представлена в следующем виде:

$$n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \cos\frac{\varphi}{2}E + \sin\frac{\varphi}{2}n\{\mathbf{e}\} = \cos\frac{\varphi}{2}E + \frac{2}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}n\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}\right\}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e} \tag{3.12}$$

Здесь $n\{\mathbf{e}\}$ и $n\{\boldsymbol{\varphi}/2\}$ — четырехмерные кососимметрические матрицы, которые сопоставляются единичному вектору $\mathbf{e}$ эйлеровой оси конечного поворота твердого тела и половинному вектору $\boldsymbol{\varphi}$ “истинного” конечного поворота тела и имеют вид матрицы (2.5). При этом, как уже отмечалось, координаты (проекции) $e_i$ и $\varphi_i$ векторов $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ в системах координат $\xi$ и $X$ одинаковы.

Из сравнения (3.11) и (3.12) следует, что четырехмерная кососимметрическая матрица $s_q$, порождаемая экспоненциальным представлением кватернионной матрицы поворота типа $n$, определяется соотношениями

$$s_q = n\{\boldsymbol{\varphi}/2\} = (1/2)\,n\{\boldsymbol{\varphi}\}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e} \tag{3.13}$$

и имеет вид:

$$s_q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\varphi_1 & -\varphi_2 & -\varphi_3 \\ \varphi_1 & 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ \varphi_2 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_3 & \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi_i = \varphi\,\mathrm{e}_i\,, \tag{3.14}$$

т.е. это четырехмерная кососимметрическая матрица, которая сопоставляется половинному эйлерову вектору $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ конечного поворота твердого тела. Элемент $s_i$ этой матрицы равен половине проекции $\varphi_i$ вектора $\boldsymbol{\varphi}$: $s_i = (1/2)\varphi_i$.

Выражение кватернионной матрицы поворота типа $n$ через четырехмерную кососимметрическую матрицу $s_q$ легко получается из (3.10), (3.11) и имеет вид:

$$n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \cos\frac{\varphi}{2}E + \frac{2}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}s_q, \quad s_q = n\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}\right\} = \frac{1}{2}n\{\boldsymbol{\varphi}\}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e} \tag{3.15}$$

Кватерниону поворота $\boldsymbol{\lambda}$, играющему роль ортогонального оператора, соответствует кватернион $\mathbf{s}_q$ с нулевой скалярной частью, играющий роль кососимметрического оператора. Эти кватернионы связаны формулой

$$\boldsymbol{\lambda} = e^{\mathbf{s}_q} = \exp\mathbf{s}_q = e^{\boldsymbol{\varphi}/2} = \exp(\boldsymbol{\varphi}/2), \tag{3.16}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}$, $\mathbf{s}_q = \boldsymbol{\varphi}/2$, $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1\mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j} + \varphi_3\mathbf{k}$, $\lambda_0 = \cos(\varphi/2)$, $\lambda_i = \sin(\varphi/2)e_i$; $\varphi_i = \varphi e$.

**4. Кинематические уравнения в кососимметрических операторах, порождаемых экспоненциальными представлениями ортогональных операторов.**

*4.1. Трехмерные векторные и матричные кинематические уравнения для эйлерова вектора поворота.* Рассмотрим кинематические уравнения в кососимметрических матрицах, порождаемых экспоненциальными представлениями матрицы направляющих косинусов и кватернионной матрицы поворота. Эти уравнения можно получить, дифференцируя по времени соотношения (3.8), (3.15) и учитывая матричные кинематические уравнения Пуассона (Лурье 1961 [28], Челноков 2006 [26], Журавлев 2008 [32]) и кинематические уравнения в параметрах Эйлера (Бранец и Шмыглевский 1973, 1992 [33, 34]; Челноков 2006 [26], Журавлев 2008 [32]). Однако проще для этой цели использовать векторные кинематические уравнения для эйлерова вектора $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ конечного поворота тела:

$$d\boldsymbol{\varphi}/dt = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}\left[1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right]\boldsymbol{\varphi}\times(\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{4.1}$$

$$(d\boldsymbol{\varphi}/dt)_{\mathrm{loc}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}\left[1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right]\boldsymbol{\varphi}\times(\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{4.2}$$

Здесь $d\boldsymbol{\varphi}/dt = (d\varphi_1/dt)\xi_1 + (d\varphi_2/dt)\xi_2 + (d\varphi_3/dt)\xi_3$ – абсолютная производная от вектора $\boldsymbol{\varphi}$, координаты (проекции) которого $\varphi_i = \varphi e_i$ одинаковы в системах координат $\xi$ и $X$, $\xi_i$ – орты опорной системы координат $\xi$, $(d\boldsymbol{\varphi}/dt)_{\mathrm{loc}} = (d\varphi_1/dt)\mathbf{x}_1 + (d\varphi_2/dt)\mathbf{x}_2 + (d\varphi_3/dt)\mathbf{x}_3$ – локальная производная от вектора $\boldsymbol{\varphi}$ ($\mathbf{x}_i$ – орты связанной с твердым телом системы координат $X$).

Уравнение (4.2) предложено Борцем (1971) [9].

Учтем, что векторное произведение $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varphi}$ соответствует матричному выражению $\omega_\xi s_v - s_v\omega_\xi$ или $\omega_x s_v - s_v\omega_x$ в трехмерных кососимметричных матрицах $s_v$, $\omega_\xi$ или $s_v$, $\omega_x$, а также то, что уравнение (4.1) содержит абсолютную производную вектора $\boldsymbol{\varphi}$, а уравнение (4.2) – локальную производную. Тогда вместо векторных кинематических уравнений (4.1) и (4.2) мы будем иметь матричные кинематические уравнения

$$\frac{ds_v}{dt} = \omega_\xi + \frac{1}{2}(\omega_\xi s_v - s_v\omega_\xi) + \frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\left(s_v^2\omega_\xi + \omega_\xi s_v^2 - 2s_v\omega_\xi s_v\right) \tag{4.3}$$

$$\frac{ds_v}{dt} = \omega_x - \frac{1}{2}(\omega_x s_v - s_v \omega_x) + \frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\left(s_v^2 \omega_x + \omega_x s_v^2 - 2 s_v \omega_x s_v\right)$$

$$\omega_x = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_\xi = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3^* & -\omega_2^* \\ -\omega_3^* & 0 & \omega_1^* \\ \omega_2^* & -\omega_1^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

представляющие собой матричные нелинейные, в общем случае нестационарные дифференциальные уравнения первого порядка относительно трехмерной кососимметрической матрицы $s_v$.

В этих уравнениях матрица $s_v$ имеет вид (3.6), элементами матрицы $\omega_\xi$ являются проекции $\omega_i^*$ вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости твердого тела на опорные координатные оси, а элементами матрицы $\omega_x$ – проекции $\omega_i$ этого вектора на связанные координатные оси.

Уравнение (4.4) приводится, например, Stuelpnagel (1964) [8] (см. также Переляев, [31]).

*4.2. Кинематические уравнения в ассоциированных кватернионах.* Используя соотношения $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi} = (1/2)(\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\omega})$, $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\varphi} = -\varphi^2$ (при этом орты трехмерного ортогонального базиса формально отождествляются с векторными мнимыми единицами Гамильтона), перейдем от векторных кинематических уравнений (4.3) и (4.4) к кватернионным кинематическим уравнениям

$$2d\boldsymbol{\varphi}/dt = 2\boldsymbol{\varphi}^{\bullet} = \left(1 + \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{\omega}_\xi + \boldsymbol{\omega}_\xi \times \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \boldsymbol{\varphi} \tag{4.5}$$

$$2d\boldsymbol{\varphi}/dt = 2\boldsymbol{\varphi}^{\bullet} = \left(1 + \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \boldsymbol{\varphi}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_\xi = \boldsymbol{\varphi}_x = \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\varphi}^{\bullet} = \varphi_1^{\bullet}\mathbf{i} + \varphi_2^{\bullet}\mathbf{j} + \varphi_3^{\bullet}\mathbf{k} \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_\xi = \omega_1^* \mathbf{i} + \omega_2^* \mathbf{j} + \omega_3^* \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi} = (1/2)(\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\omega})$$

Здесь кватернионы $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_\xi = \boldsymbol{\varphi}_x$, $\boldsymbol{\omega}_\xi$ и $\boldsymbol{\omega}_x$ – отображения эйлерова вектора конечного поворота твердого тела и вектора мгновенной угловой скорости твердого тела на опорную и связанную системы координат.

В нелинейных дифференциальных уравнениях (4.5) и (4.6) в качестве переменной выступает ассоциированный кватернион $\boldsymbol{\varphi}$ (кватернион с нулевой скалярной частью), связанный с кватернионом поворота $\boldsymbol{\lambda}$ формулой (3.16).

Запишем уравнения (4.5) и (4.6) в другом виде:

$$\begin{aligned} 4\frac{d\mathbf{s}_q}{dt} &= 4\mathbf{s}_q^{\bullet} = (1 + \kappa \operatorname{ctg} \kappa)\boldsymbol{\omega}_\xi + 2\boldsymbol{\omega}_\xi \times \mathbf{s}_q - \frac{1}{\kappa^2}(1 - \kappa \operatorname{ctg} \kappa)\mathbf{s}_q \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \mathbf{s}_q \\ 4\frac{d\mathbf{s}_q}{dt} &= 4\mathbf{s}_q^{\bullet} = (1 + \kappa \operatorname{ctg} \kappa)\boldsymbol{\omega}_x - 2\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{s}_q - \frac{1}{\kappa^2}(1 - \kappa \operatorname{ctg} \kappa)\mathbf{s}_q \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s}_q, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где кватернионная переменная

$$\mathbf{s}_q = s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k} = \boldsymbol{\varphi}/2 = (1/2)(\varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}) = (\varphi/2)(e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k})$$

$$\kappa = \varphi/2 = \left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)^{1/2}$$

соответствует половинному эйлерову вектору $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ конечного поворота тела и, как уже отмечалось, играет роль кососимметрического оператора, который ставится в соответствие такому ортогональному оператору, как кватернион поворота $\boldsymbol{\lambda}$, с помощью его экспоненциального представления (3.16).

*4.3. Кинематические уравнения в четырехмерных кососимметрических матрицах.* Кватернионам $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{s}_q$, $\boldsymbol{\omega}_\xi$, $\boldsymbol{\omega}_x$ с нулевыми скалярными частями соответствуют четырехмерные кососимметрические матрицы типа $n$ (см. (2.5)). Произведению кватернионов отвечает произведение кватернионных матриц типа $n$, взятых в обратном порядке. Поэтому от кватернионных кинематических уравнений (4.5)–(4.7) можно перейти к матричным кинематическим уравнениям. Так, кватернионному уравнению (4.7) соответствует матричное уравнение

$$4\frac{ds_q}{dt} = 4\dot{s}_q = (1 + \kappa\operatorname{ctg}\kappa)\,n_\omega - (s_q n_\omega - n_\omega s_q) - \frac{1}{\kappa^2}(1 - \kappa\operatorname{ctg}\kappa)\,s_q n_\omega s_q$$
$$\kappa = \det s_q = \left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)^{1/2}, \tag{4.8}$$

где матричная переменная представляет собой кососимметричную матрицу $s_q$ размерностей $4 \times 4$, которая связана с кватернионной матрицей вращения $n\{\boldsymbol{\lambda}\}$ с помощью своего экспоненциального представления (3.10) и имеет вид (3.14).

В уравнении (4.8) матрица $n_\omega$ представляет собой четырехмерную кососимметричную матрицу типа $n$, которая соответствует отображению $\boldsymbol{\omega}_x$ вектора угловой скорости твердого тела на связанный базис.

Матричное кинематическое уравнение (4.8) можно записать в векторно-матричной записи

$$4\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + (n_\omega - m_\omega)\begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} - \frac{4}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{sn}_\omega\begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$s_i = \varphi_i/2, \quad \varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 4\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)$$

$$n_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$(n_\omega - m_\omega) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & E_{1\times 3} \\ E_{3\times 1} & \omega_x \end{pmatrix}$$

Здесь $m_\omega$ и $n_\omega$ – четырехмерные кососимметричные матрицы типов $m$ и $n$ (Челноков 2006) [26], соответствующие отображению $\boldsymbol{\omega}_x$ вектора угловой скорости твердого тела на связный базис; первая строка и первый столбец матрицы $n_\omega - m_\omega$ равны нулю, а ее остаток (называемый ядром этой матрицы) равен удвоенной трехмерной кососимметричной матрице $\omega_x$, которая имеет вид первой из матриц, указанных после формулы (4.9).

Такая запись кинематических уравнений удобна с точки зрения построения алгоритмов численного интегрирования этих уравнений.

**5. Представление кососимметрических операторов с помощью формулы Кэли.** *5.1. Трехмерные кососимметрические матрицы, порождаемые формулой Кэли.* Рассмотрим трехмерную кососимметрическую матрицу $s_v$, связанную с матрицей $c$ направляющих косинусов формулой Кэли (Гантмахер, [1]):

$$c = (E - s_v)(E + s_v)^{-1}, \tag{5.1}$$

где матрица $s_v$ имеет, по-прежнему, вид (2.4).

Обратная связь имеет вид

$$s_v = (E - c)(E + c)^{-1} \tag{5.2}$$

Найдем кососимметрическую матрицу $s_v$, определяемую формулой (5.2). Учитывая соотношения

$$(E + c)^{-1} = (1/2)[E + (1 + \operatorname{tr} c)^{-1}(c^{\mathrm{T}} - c)]; \quad c^{\mathrm{T}} = (\operatorname{tr} c)(E - c) + c^2$$

$$\operatorname{tr} c = c_{11} + c_{22} + c_{33} = 1 + 2\cos\varphi, \quad 1 + \operatorname{tr} c = 2(1 + \cos\varphi) = 4\cos^2(\varphi/2),$$

из (5.1) получим известную формулу Stuelpnagel (1964) [8]:

$$s_v = (1 + \operatorname{tr} c)^{-1}[\operatorname{tr} cE - (1 + \operatorname{tr} c)c + c^2], \tag{5.3}$$

а также формулу

$$s_v = s_v\left\{-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\mathbf{e}\right\} = (1 + \operatorname{tr} c)^{-1}(c^{\mathrm{T}} - c) = -\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}s_v\{\mathbf{e}\} = -\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

которая устанавливает связь матрицы $s_v$ с эйлеровой парой ($\varphi$, $\mathbf{e}$).

Таким образом, трехмерная кососимметрическая матрица $s_v$, связанная с матрицей направляющих косинусов формулой Кэли, имеет вид (5.4). Из этой формулы следует, что элементами этой матрицы являются координаты $s_i$ вектора

$$\mathbf{s}_v = -\operatorname{tg}(\varphi/2)\mathbf{e}, \tag{5.5}$$

в то время как элементами трехмерной кососимметрической матрицы $s_v$, порождаемой экспоненциальным представлением матрицы направляющих косинусов, являются координаты вектора $\mathbf{s}_v = \boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ (см. формулу (3.6)).

Отметим, что трехмерная кососимметрическая матрица $s_v$, порождаемая формулой Кэли, и соответствующий ей вектор $\mathbf{s}_v$, как это видно из (5.4) и (5.5), не определены для угла $\varphi = \pi$.

В книге [1] (Гантмахер 1967) указывается, что в общем случае вместо формул (5.1) и (5.2) (при этом под $c$ и $s_v$ понимаются ортогональные и кососимметрические операторы любой размерности) можно взять формулы

$$c = -(E - s_v)(E + s_v)^{-1} \tag{5.6}$$

$$s_v = (E + c)(E - c)^{-1} \tag{5.7}$$

В нашем случае, как показано выше, кососимметричная матрица третьего порядка $s_v$ может быть представлена в виде (5.2) (кроме случая, когда $\varphi = \pi$). Можно показать, что представление матрицы $s_v$ через матрицу направляющего косинуса $c$ в виде (5.7) невозможно.

Отметим, что Hurtado (2008) [20] также рассматриваются вышеприведенные формулы Кэли, связывающие трехмерную кососимметрическую матрицу $s_v$ с ортогональной матрицей $c$ направляющих косинусов углов, и их обобщения с использованием скалярного параметра.

*5.2. Четырехмерные кососимметрические матрицы, порождаемые формулой Кэли.* Рассмотрим теперь связь кватернионной матрицы поворота $n$, являющейся ортогональной матрицей, имеющей вид матрицы (2.3), с кососимметрической матрицей $s_q$ размерами 4 × 4, имеющей вид матрицы (2.5). В соответствии с формулой Кэли [1] эта связь имеет вид

$$
\begin{gathered}
n = \left(E - s_q\right)\left(E + s_q\right)^{-1} \\
n = n\{\boldsymbol{\lambda}\} = n\{\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_v\} = n\{\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/2)\} \\
\mathbf{e}_q = \mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_x = \left(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}\right), \quad e_i = \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{e}\cdot\mathbf{x}_i
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$

Здесь и далее запись вида $n\{\boldsymbol{\lambda}\}$ означает, что кватернионная матрица $n$ сопоставляется (соответствует) кватерниону, записанному в фигурных скобках (в данном случае кватерниону поворота $\boldsymbol{\lambda}$); $\mathbf{e}$ – как и ранее, единичный вектор эйлеровой оси поворота твердого тела, $\mathbf{e}_\xi$ и $\mathbf{e}_x$ – его отображения на связанный $X$ и опорный $\xi$ базисы.

Обратная связь матриц $n$ и $s_q$ имеет вид

$$
s_q = (E - n)(E + n)^{-1} \tag{5.9}
$$

Рассмотрим матрицы

$$
\begin{gathered}
E - n = E - n\{\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/2)\} = 2\sin(\varphi/4) n\{\sin(\varphi/4) - e_q \cos(\varphi/4)\} \\
E + n = E + n\{\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/2)\} = 2\cos(\varphi/4) n\{\cos(\varphi/4) + e_q \sin(\varphi/4)\}
\end{gathered}
\tag{5.10}
$$

Здесь при записи этих матриц были учтены структура кватернионной матрицы типа $n$, определяемая формулой (2.3), и формулы

$$
\begin{gathered}
1 - \lambda_0 = 1 - \cos(\varphi/2) = 2\sin^2(\varphi/4), \quad 1 + \lambda_0 = 1 + \cos(\varphi/2) = 2\cos^2(\varphi/4) \\
\sin(\varphi/2) = 2\sin(\varphi/4)\cos(\varphi/4)
\end{gathered}
$$

Используя (5.10) и тригонометрические формулы

$$
\begin{gathered}
\sin(\varphi/4) = \cos(\pi/2 - \varphi/4) = -\cos(\pi/2 + \varphi/4) \\
\cos(\varphi/4) = \sin(\pi/2 - \varphi/4) = \sin(\pi/2 + \varphi/4),
\end{gathered}
$$

находим:

$$
\begin{gathered}
E - n = 2\sin(\varphi/4) n\{\cos(\pi/2 - \varphi/4) - \mathbf{e}_q \sin(\pi/2 - \varphi/4)\} \\
(E + n)^{-1} = [2\cos(\varphi/4) n\{\cos(\varphi/4) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/4)\}]^{-1} = \\
= [n\{\cos(\varphi/4) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/4)\}]^{-1}[\,2\cos(\varphi/4)E]^{-1} = \\
= [\,2\cos(\varphi/4)]^{-1} n\{\cos(\varphi/4) - \mathbf{e}_q \sin(\varphi/4)\}
\end{gathered}
\tag{5.11}
$$

Подставляя последние соотношения в (5.9), получаем выражение для кососимметрической матрицы $s_q$ через эйлерову пару ($\varphi$, $\mathbf{e}$):

$$
s_q = \left(E - n\right)\left(E + n\right)^{-1} = \operatorname{tg}(\varphi/4) n\{\cos(\pi/2) - \mathbf{e}_q \sin(\pi/2)\},
$$

или

$$
s_q = \operatorname{tg}(\varphi/4) n\left\{-\mathbf{e}_q\right\} = -\operatorname{tg}(\varphi/4) n\left\{\mathbf{e}_q\right\}, \quad s_i = -\operatorname{tg}(\varphi/4) e_i \tag{5.12}
$$

*Замечание.* При перемножении матриц $(E - n)$ и $(E + n)^{-1}$, определяемых (5.11), приходим к произведению

$$
n\{\cos(\pi/2 - \varphi/4) - \mathbf{e}_q \sin(\pi/2 - \varphi/4)\} n\{\cos(\varphi/4) - \mathbf{e}_q \sin(\varphi/4)\},
$$

двух кватернионных матриц типа $n$, которое можно рассматривать как формулу сложения двух конечных поворотов, совершаемых вокруг одной и той же оси, направление которой задается единичным вектором $-\mathbf{e}$, на углы $\pi - \varphi/2$ и $\varphi/2$. В результате сложения таких поворотов получаем результирующий поворот вокруг той же оси на угол, равный $\pi$, которому соответствует кватернионная матрица $n\{-\mathbf{e}_q\}$.

Таким образом, кососимметрическая матрица $s_q$ размерами $4 \times 4$, которая ставится в соответствие с помощью формулы Кэли (5.9) кватернионной матрице поворота типа $n$, имеет вид

$$s_q = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}\begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & 0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Учитывая (5.12), запишем формулу Кэли (5.8) для кватернионной матрицы $n$ в таком виде:

$$\begin{aligned} n = n\{\boldsymbol{\lambda}\} = n\{\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/2)\} = (E - s)(E + s)^{-1} = \\ = (E + \operatorname{tg}(\varphi/4)n\{\mathbf{e}_q\})(E - \operatorname{tg}(\varphi/4)n\{\mathbf{e}_q\})^{-1} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Таким образом, если трехмерная кососимметричная матрица $s_v$, связанная с матрицей направляющих косинусов формулой Кэли, соответствует вектору $\mathbf{s}_v = -\operatorname{tg}(\varphi/2)\mathbf{e}$, то четырехмерная кососимметричная матрица $s_q$, связанная с кватернионной матрицей вращения типа $n$ формулой Кэли, соответствует вектору $\mathbf{s}_v = -\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$. Обратим внимание на то, что если трехмерная кососимметричная матрица $s_v$ и соответствующий вектор $\mathbf{s}_v$ не определены для угла $\varphi = \pi$, то четырехмерная кососимметричная матрица $s_q$ и соответствующий вектор $\mathbf{s}_v$ не определены для угла $\varphi = 2\pi$.

Вместо формул (5.8) и (5.9), устанавливающих взаимно однозначное соответствие между кватернионной матрицей поворота $n$ и четырехмерной кососимметрической матрицей (обозначим ее через $s^*$), можно взять другие формулы:

$$n = -(E - s^*)(E + s^*)^{-1} \tag{5.15}$$

$$s^* = (E + n)(E - n)^{-1} \tag{5.16}$$

В этом случае четырехмерная кососимметрическая матрица $s^*$ будет определяться формулой

$$s^* = \operatorname{ctg}(\varphi/4)n\{\mathbf{e}\}, \tag{5.17}$$

или, в развернутом виде, формулой

$$s^* = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4}\begin{pmatrix} 0 & -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_1 & 0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

*Замечание*. Формулы (5.8), (5.9) и (5.15), (5.16) не взаимно исключают друг друга, как это было в случае формул (5.1), (5.2) и (5.6), (5.7) для матрицы направляющих косинусов и трехмерной кососимметрической матрицы, так как порядки рассматриваемых операторов (матриц $n$, $s_q$ и $s^*$) четные.

Таким образом, если четырехмерной кососимметрической матрице $s_q$, определяемой формулой Кэли (5.9), соответствует вектор $\mathbf{s}_v = -\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$, то четырехмерной кососимметрической матрице $s^*$, определяемой другой формулой Кэли (5.17), соответствует вектор $\mathbf{s}_v^* = \mathrm{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}$. При этом, если матрица $s_q$ и соответствующий ей вектор $\mathbf{s}_v$ не определены для угла $\varphi = 2\pi$, то матрица $s^*$ и соответствующий ей вектор $\mathbf{s}_v^*$ не определены для угла $\varphi = 0$.

Из формул (5.9) и (5.16) следует, что матрицы $s_q$ и $s^*$ связаны соотношением

$$s_q s^* = s^* s_q = E$$

*5.3. Ассоциированные кватернионы, порождаемые формулой Кэли.* Матричной формуле Кэли (5.8) соответствует кватернионная формула

$$\boldsymbol{\lambda} = (1 + \mathbf{s})^{-1} \circ (1 - \mathbf{s}), \tag{5.19}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – кватернион поворота (вращения):

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k})$$
$$\lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_i = \sin\frac{\varphi}{2}e_i,$$

а $\mathbf{s}$ – ассоциированный кватернион (кватернион, скалярная часть которого равна нулю):

$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}$$

Отметим, что в кватернионной формуле (5.19), в отличие от матричной формулы (5.8), произведение кватернионных множителей берется в обратном порядке.

Из кватернионного аналога формулы Кэли (5.19) следует формула для ассоциированного кватерниона $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = (1 - \boldsymbol{\lambda}) \circ (1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} \tag{5.20}$$

Преобразуем правые части формул (5.19) и (5.20). Получим

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda} = (1 + \mathbf{s})^{-1} \circ (1 - \mathbf{s}) = \left(1 + \left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)\right)^{-1}\left(1 - \left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right) - 2\mathbf{s}\right)\\ \mathbf{s} = (1 - \boldsymbol{\lambda}) \circ (1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} = -2\|1 + \boldsymbol{\lambda}\|^{-1}\boldsymbol{\lambda}_v\end{gathered} \tag{5.21}$$

С учетом соотношений

$$\|1 + \boldsymbol{\lambda}\|^{-1} = [2(1 + \lambda_0)]^{-1} = [2(1 + \cos(\varphi/2))]^{-1} = [4\cos^2(\varphi/4)]^{-1}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_v = \sin(\varphi/2)\mathbf{e}_q = 2\sin(\varphi/4)\cos(\varphi/4)\mathbf{e}_q$$

формула для кватерниона $\mathbf{s}$ принимает вид

$$\begin{gathered}\mathbf{s} = s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k} = (1 - \boldsymbol{\lambda}) \circ (1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} = -\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q = -\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4}(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k})\\ s_i = -\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4}e_i\end{gathered} \tag{5.22}$$

Можно убедиться, что подстановка формул (5.22) для $\mathbf{s}$ и $s_i$ в соотношение (5.21) дает формулу (2.1) для кватерниона поворота $\boldsymbol{\lambda}$.

Можно также показать, что кватернионы $(1 + \mathbf{s})^{-1}$ и $(1 - \mathbf{s})$, а также $(1 - \boldsymbol{\lambda})$ и $(1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1}$ в формулах (5.19) и (5.20) коммутативны. Поэтому эти формулы можно записать в виде

$$\boldsymbol{\lambda} = (1 - \mathbf{s}) \circ (1 + \mathbf{s})^{-1}, \quad \mathbf{s} = (1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ (1 - \boldsymbol{\lambda})$$

Рассмотрим другой кватернионный аналог матричной формулы Кэли:

$$\boldsymbol{\lambda} = -(1 + \mathbf{s}^*)^{-1} \circ (1 - \mathbf{s}^*) \tag{5.23}$$

Из соотношения (5.23) следует формула для ассоциированного кватерниона $\mathbf{s}^*$:

$$\mathbf{s}^* = (1 - \boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ (1 + \boldsymbol{\lambda}) \tag{5.24}$$

Преобразуем правые части формул (5.23) и (5.24). Получим

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda} = -(1 + \mathbf{s}^*)^{-1} \circ (1 - \mathbf{s}^*) = -(1 + (s_1^{*2} + s_2^{*2} + s_3^{*2}))^{-1}(1 - (s_1^{*2} + s_2^{*2} + s_3^{*2}) - 2\mathbf{s}^*) \\ \mathbf{s}^* = (1 - \boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ (1 + \boldsymbol{\lambda}) = 2\left\|1 - \boldsymbol{\lambda}\right\|^{-1} \boldsymbol{\lambda}_v\end{gathered} \tag{5.25}$$

С учетом соотношений

$$\left\|1 - \boldsymbol{\lambda}\right\|^{-1} = [2(1 - \lambda_0)]^{-1} = [2\sin^2(\varphi/4)]^{-1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_v = \sin(\varphi/2)\mathbf{e}_q = 2\sin(\varphi/4)\cos(\varphi/4)\mathbf{e}_q$$

формула для ассоциированного кватерниона $\mathbf{s}^*$ принимает вид

$$\begin{gathered}\mathbf{s}^* = s_1^*\mathbf{i} + s_2^*\mathbf{j} + s_3^*\mathbf{k} = (1 - \boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ (1 + \boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4}(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}) \\ s_i^* = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4}e_i\end{gathered} \tag{5.26}$$

Таким образом, четырехмерным кососимметрическим матрицам $s_q$ и $s^*$, порождаемым формулами Кэли, отвечают ассоциированные кватернионы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}^*$, определяемые формулами (5.22) и (5.26).

**6. Кинематические уравнения типа Риккати в кососимметрических операторах, порождаемых формулами Кэли.**

*6.1. Трехмерное матричное кинематическое уравнение типа Риккати.* Матричное кинематическое уравнение, использующее в качестве переменной трехмерную кососимметрическую матрицу $s_v$, определяемую формулой Кэли (5.2) или (5.4), можно получить, дифференцируя по времени соотношение $c(E+k) = (E-k)$, являющееся следствием (5.1), и учитывая кинематические уравнения Пуассона $dc/dt = \omega_x c = c\omega_\xi$. Это уравнение имеет вид уравнения, полученного Stuelpnagel (1964) [8] (см. также Переляев (2009) [31]).

$$\begin{gathered}2\dot{s}_v = -\omega_x + \omega_x s_v - s_v\omega_x + s_v\omega_x s_v \\ s_v = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_x = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{6.1}$$

Элементами трехмерной кососимметрической матрицы $\omega_x$ являются проекции $\omega_i$ вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости твердого тела на связанные с ним координатные оси.

*6.2. Кинематические уравнения типа Риккати в четырехмерных кососимметрических матрицах.* Для получения матричного кинематического уравнения, использующего в качестве переменной четырехмерную кососимметрическую матрицу $s_q$, определяемую формулой Кэли (5.9), или, в явном виде, формулой (5.13), продифференцируем по времени соотношение $n(E + s_q) = E - s_q$, являющееся следствием (5.8), и учтем матричное кинематическое уравнение $2\dot{n} = n_\omega n$ в параметрах Эйлера. Получим уравнение

$$2\dot{s}_q = -(E + n)^{-1} n_\omega (E - s_q)$$

Из второго выражения (5.11) и соотношения (5.12) находим: $(E+n)^{-1} = (1/2)(E+s_q)$. Поэтому последнее уравнение принимает вид следующего матричного кинематического уравнения вращательного движения твердого тела:

$$4s_q^{\bullet} = -(E + s_q)n_\omega(E - s_q)$$
$$s_q = \begin{pmatrix} 0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ s_1 & 0 & s_3 & -s_2 \\ s_2 & -s_3 & 0 & s_1 \\ s_3 & s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

После перемножения матриц в правой части уравнения (6.2), получим матричное кинематическое уравнение типа Риккати

$$4s_q^{\bullet} = -n_\omega + n_\omega s_q - s_q n_\omega + s_q n_\omega s_q \tag{6.3}$$

В этих уравнениях $n_\omega$ – четырехмерная кососимметрическая матрица типа $n$, сопоставляемая отображению $\boldsymbol{\omega}_x$ вектора угловой скорости твердого тела на связанные с ним координатные оси.

Правые части уравнений (6.1) и (6.3) по своей форме совпадают. Однако в кинематическом уравнении (6.3) в четырехмерных кососимметрических матрицах, в отличие от кинематического уравнения (6.1) в трехмерных кососимметрических матрицах, вместо коэффициента 2 перед производной $s_q^{\bullet}$ стоит коэффициент 4. Кососимметрические матрицы четвертого (четного) порядка имеют качественные преимущества перед трехмерными кососимметрическими матрицами третьего (нечетного) порядка, указанные во введении, которые делают использование матричного кинематического уравнения (6.2) или (6.3) более эффективным при проведении аналитических исследований и при построении высокоточных численных алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

Матричное уравнение (6.3) можно записать в более компактном виде. Вводя новую матричную переменную $\ell = E + s_q$ с элементами $\ell_0 = 1$, $\ell_i = s_i$ $(i = 1, 2, 3)$, получим уравнение

$$4\ell^{\bullet} = -2\ell n_\omega + \ell n_\omega \ell$$

Если новую матричную переменную ввести по-другому: $\ell = E - s_q$ (элементы этой переменной $\ell_0 = 1$, $\ell_i = -s_i$ $(i = 1, 2, 3)$), то вместо уравнения (6.3) получим уравнение

$$4\ell^{\bullet} = 2n_\omega \ell - \ell n_\omega \ell$$

Для кососимметрической матрицы $s_q$ размерами $4 \times 4$, которой соответствует вектор $\mathbf{s}_v = \operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$, вместо уравнений (6.2) и (6.3) будем иметь уравнения

$$4s_q^{\bullet} = \left(E - s_q\right) n_\omega \left(E + s_q\right)$$

$$4s_q^{\bullet} = n_\omega + n_\omega s_q - s_q n_\omega - s_q n_\omega s_q$$

Матричное кинематическое уравнение, использующее в качестве переменной четырехмерную кососимметрическую матрицу $s^*$, определяемую формулой Кэли (5.16), или, в явном виде, формулой (5.18), получается аналогично и имеет вид, полностью совпадающий с уравнением (6.2) или (6.3):

$$4s^{*\bullet} = -\left(E + s^*\right) n_\omega \left(E - s^*\right)$$

$$4s^{*\bullet} = -n_\omega + n_\omega s^* - s^* n_\omega + s^* n_\omega s^*$$

Таким образом, полученные матричные кинематические уравнения типа Риккати ковариантны по отношению к четырехмерным кососимметрическим матрицам $s_q$ и $s^*$.

Матричные кинематические уравнения типа Риккати можно записать в векторно-матричной записи. Так, уравнение (6.3) в такой записи имеет вид

$$4\begin{pmatrix}0\\ \dot{s}_1\\ \dot{s}_2\\ \dot{s}_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\ \omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} + (n_\omega - m_\omega)\begin{pmatrix}0\\ s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix} + s_q n_\omega \begin{pmatrix}0\\ s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}, \quad (n_\omega - m_\omega) = 2\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega_3 & -\omega_2\\ 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{pmatrix},$$

где матрицы $s_q$, $n_\omega$ и $m_\omega$ приведены после уравнений (6.2) и (4.9).

Такая запись кинематических уравнений удобна для построения алгоритмов численного интегрирования этих уравнений.

*6.3. Кинематические уравнения типа Риккати в ассоциированных кватернионах.* Для получения кинематических уравнений в порождаемых формулами Кэли ассоциированных кватернионах продифференцируем кватернионное соотношение

$$(1 + \mathbf{s}) \circ \boldsymbol{\lambda} = 1 - \mathbf{s},$$

вытекающее из соотношения (5.19), и подставим в полученный результат дифференцирования производную $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = (1/2)\boldsymbol{\lambda} \circ \omega_x$ из кватернионного кинематического уравнения в параметрах Эйлера. Получим после преобразований

$$2\dot{\mathbf{s}} = -(1 - \mathbf{s}) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ (1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} \tag{6.4}$$

Обратный кватернион

$$(1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} = \|1 + \boldsymbol{\lambda}\|^{-1}(1 + \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = [4\cos^2(\varphi/4)]^{-1}(1 + \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = (1/2)\big(1 - \mathrm{tg}(\varphi/4)\,\mathbf{e}_q\big) = (1/2)(1 + \mathbf{s})$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (6.4), получаем кватернионное кинематическое уравнение твердого тела

$$4\dot{\mathbf{s}} = -(1 - \mathbf{s}) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ (1 + \mathbf{s}) \tag{6.5}$$

В этом уравнении кватернионная переменная

$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k} = (1 - \boldsymbol{\lambda}) \circ (1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} = -\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q = -\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4}(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k})$$

является ассоциированным кватернионом, компонентами которого являются проекции вектора $-\mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$. Компоненты кватерниона $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$ – проекции вектора угловой скорости твердого тела на оси связанной с ним системы координат $X$.

Введем новую кватернионную переменную

$$\mathbf{S} = 1 - \mathbf{s} = 1 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k} = 1 + \mathrm{tg}\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q = \left(\cos\frac{\varphi}{4}\right)^{-1}\left(\cos\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}\right)$$

Тогда уравнение (6.5) примет вид

$$4\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \bar{\mathbf{S}}, \quad \mathbf{S} = 1 - \mathbf{s}, \quad \bar{\mathbf{S}} = 1 + \mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{S}} = -\dot{\mathbf{s}}$$

Выражение в квадратных скобках в правой части этого уравнения

$$\mathbf{S} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \bar{\mathbf{S}} = \left(\cos\frac{\varphi}{4}\right)^{-2}\left[\left(\cos\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q\right) \circ \omega_x \circ \left(\cos\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q\right)\right]$$

$$\left(\cos\frac{\varphi}{4}\right)^{-2} = 1 + \left(\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4}\right)^2 = 1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \|\mathbf{S}\|$$

описывает поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ в системе координат $X$ на угол, равный $\varphi/2$.

Уравнение (6.5) можно также записать в следующем виде

$$4\mathbf{s}^{\bullet} = -\left(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)\boldsymbol{\omega}_x^{+} = -\left(1 + \|\mathbf{s}\|\right)\boldsymbol{\omega}_x^{+}$$
$$\boldsymbol{\omega}_x^{+} = \left(\cos\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q\right) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \left(\cos\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q\right)$$

Приведенные формы уравнения (6.5) удобны для построения аналитических решений кинематических уравнений в частных случаях движения твердого тела и для их геометрических интерпретаций.

Перемножая кватернионы, стоящие в правой части уравнения (6.5), получаем следующее кватернионное кинематическое уравнение твердого тела, имеющее вид уравнения Риккати:

$$4\mathbf{s}^{\bullet} = -\boldsymbol{\omega}_x + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s} + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s} = -\boldsymbol{\omega}_x - 2\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{s} + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s} \tag{6.6}$$

Кватернионное уравнение (6.6) можно записать в более компактном виде. Вводя новую кватернионную переменную $\boldsymbol{\ell} = 1 + \mathbf{s}$ с элементами $\ell_0 = 1$, $\ell_i = s_i$ ($i = 1, 2, 3$), получим уравнение

$$4\boldsymbol{\ell}^{\bullet} = -2\boldsymbol{\omega}_x \circ \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \boldsymbol{\ell}$$

Если новую кватернионную переменную ввести по-другому: $\boldsymbol{\ell} = 1 - \mathbf{s}$ (элементы этой переменной $\ell_0 = 1$, $\ell_i = -s_i$ ($i = 1, 2, 3$)), то вместо уравнения (6.6) получим уравнение

$$4\boldsymbol{\ell}^{\bullet} = 2\boldsymbol{\ell} \circ \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\ell} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \boldsymbol{\ell}$$

Используя соотношение перепроектирования

$$\boldsymbol{\omega}_x = \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda},$$

в котором $\boldsymbol{\omega}_\xi$ – отображение вектора угловой скорости твердого тела на опорную (основную) систему координат $\xi$, уравнение (6.4) запишем в следующем виде

$$2\mathbf{s}^{\bullet} = -(1 - \mathbf{s}) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} \circ (1 + \mathbf{s})$$

С учетом соотношений

$$(1 - \mathbf{s}) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} = 1 + \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\lambda} \circ (1 + \mathbf{s}) = 1 - \mathbf{s}$$

последнее уравнение примет вид

$$4\mathbf{s}^{\bullet} = -(1 + \mathbf{s}) \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ (1 - \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} = -\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q, \quad \boldsymbol{\omega}_\xi = \omega_1^*\mathbf{i} + \omega_2^*\mathbf{j} + \omega_3^*\mathbf{k} \tag{6.7}$$

Это – кватернионное кинематическое уравнение твердого тела, переменная $\mathbf{s}$ в котором является ассоциированным кватернионом, а кватернион $\boldsymbol{\omega}_\xi$ составлен из проекций $\omega_i^*$ вектора угловой скорости твердого тела на опорную (основную) систему координат $\xi$.

Перемножая кватернионы, стоящие в правой части уравнения (6.7), получаем следующее кватернионное кинематическое уравнение типа Риккати:

$$4\mathbf{s}^{\bullet} = -\boldsymbol{\omega}_\xi + \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \mathbf{s} - \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_\xi + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \mathbf{s} = -\boldsymbol{\omega}_\xi + 2\boldsymbol{\omega}_\xi \times \mathbf{s} + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \mathbf{s} \tag{6.8}$$

Получим другие кватернионные кинематические уравнения, в которых переменной является ассоциированный кватернион $\mathbf{s}^* = \operatorname{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$. Из соотношения (5.23) имеем

$$(1 + \mathbf{s}^*) \circ \boldsymbol{\lambda} = -(1 - \mathbf{s}^*)$$

Дифференцируя это соотношение и учитывая кинематические уравнения в параметрах Эйлера

$$\boldsymbol{\lambda}^{\bullet} = (1/2)\,\boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x = (1/2)\,\boldsymbol{\omega}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda},$$

получим после преобразований

$$2\mathbf{s}^{*\bullet} = -(1+\mathbf{s}^*) \circ \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ (\boldsymbol{\lambda}-1)^{-1} = -(1+\mathbf{s}^*) \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} \circ (\boldsymbol{\lambda}-1)^{-1} \tag{6.9}$$

Обратный кватернион

$$(\boldsymbol{\lambda}-1)^{-1} = \|\boldsymbol{\lambda}-1\|^{-1}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}-1) = -(1/2)(1+\mathrm{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q) = -(1/2)(1+\mathbf{s}^*)$$

Поэтому, учитывая равенства

$$(1+\mathbf{s}^*) \circ \boldsymbol{\lambda} = -(1-\mathbf{s}^*), \quad \boldsymbol{\lambda} \circ (1+\mathbf{s}^*) = -(1-\mathbf{s}^*),$$

из уравнений (6.9) получаем следующие кватернионные кинематические уравнения, в которых переменной является ассоциированный кватернион $\mathbf{s}^*$:

$$4\mathbf{s}^{*\bullet} = -(1-\mathbf{s}^*) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ (1+\mathbf{s}^*) \tag{6.10}$$

$$4\mathbf{s}^{*\bullet} = -(1+\mathbf{s}^*) \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ (1-\mathbf{s}^*), \tag{6.11}$$

где

$$\mathbf{s}^* = s_1^*\mathbf{i} + s_2^*\mathbf{j} + s_3^*\mathbf{k} = \mathrm{ctg}\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q = \mathrm{ctg}\frac{\varphi}{4}(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k})$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_\xi = \omega_1^*\mathbf{i} + \omega_2^*\mathbf{j} + \omega_3^*\mathbf{k}$$

Перемножая кватернионы, стоящие в правых частях уравнений (6.10) и (6.11), получаем следующие кватернионные кинематические уравнения типа Риккати:

$$4\mathbf{s}^{*\bullet} = -\boldsymbol{\omega}_x + \mathbf{s}^* \circ \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s}^* + \mathbf{s}^* \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s}^* = -\boldsymbol{\omega}_x - 2\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{s}^* + \mathbf{s}^* \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s}^* \tag{6.12}$$

$$4\mathbf{s}^{*\bullet} = -\boldsymbol{\omega}_\xi + \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \mathbf{s}^* - \mathbf{s}^* \circ \boldsymbol{\omega}_\xi + \mathbf{s}^* \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \mathbf{s}^* = -\boldsymbol{\omega}_\xi + 2\boldsymbol{\omega}_\xi \times \mathbf{s}^* + \mathbf{s}^* \circ \boldsymbol{\omega}_\xi \circ \mathbf{s}^* \tag{6.13}$$

Из полученных кватернионных кинематических уравнений видно, что они ковариантны по отношению к ассоциированным кватернионам $\mathbf{s} = -\mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$ и $\mathbf{s}^* = \mathrm{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$ (имеют одинаковый вид).

Перейдем от кватернионного кинематического уравнении (6.6) к соответствующему векторному кинематическому уравнению, используя известную формулу кватернионной алгебры: $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – кватернионы с нулевыми скалярными частями, центральная точка и символ $\times$ – символы скалярного и векторного произведений.

Получим

$$4\mathbf{s}^{\bullet} = -(\boldsymbol{\omega}_x \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} + \mathbf{s} \times (\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{s}) - 2\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{s} - \boldsymbol{\omega}_x$$

Двойное векторное произведение $\mathbf{s} \times (\boldsymbol{\omega}_y \times \mathbf{s}) = k^2\boldsymbol{\omega}_y - (\boldsymbol{\omega}_y \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}$. Поэтому последнее дифференциальное уравнение примет вид

$$4\mathbf{s}^{\bullet} = (s^2-1)\boldsymbol{\omega}_x - 2(\boldsymbol{\omega}_x \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - 2\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{s}, \quad s^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$$

Обозначим $\boldsymbol{\theta} = -\,\mathbf{s} = \mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{4}(e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k})$. Тогда полученное выше уравнение примет вид

$$\boldsymbol{\theta}^{\bullet} = \frac{1}{4}(1-\boldsymbol{\theta}^2)\boldsymbol{\omega}_x - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_x \cdot \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} \tag{6.14}$$

В этом уравнении $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\omega}_x$ могут трактоваться как векторы, определенные своими проекциями в связанной с твердым телом системе координат $X$, а производная является локальной производной, характеризующей изменение вектора $\boldsymbol{\theta}$ в связанной системе координат.

Отметим, что векторы конечных поворотов $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ и соответствующие им векторные кинематические уравнения рассматривались Пановым (1987, 1995) [10, 11] и Shuster (1993) [13]. Полученное уравнение (6.14) совпадает с векторным кинематическим уравнением (2.6.30), приведенным в книге Панова [11] (1995, с. 66). Это векторное уравнение было получено Пановым в 1983 году. Оно было также получено Schuster (1993, уравнение (338)) [13].

Кватернионное кинематическое уравнение (6.5) или (6.6), а также матричное кинематическое уравнение (6.2) или (6.3) в четырехмерных кососимметрических операторах, полученные нами, имеют качественные преимущества перед векторным кинематическим уравнением (6.14) и его матричным аналогом в трехмерных кососимметрических операторах. Эти преимущества обусловлены качественными преимуществами кососимметрических операторов четвертого (четного) порядка (ассоциированного кватерниона и кватернионной кососимметрической матрицы четвертого порядка) перед кососимметрическими операторами третьего (нечетного) порядка (кососимметрической матрицей третьего порядка и трехмерным вектором). Эти преимущества были указаны во введении.

Указанные во введении свойства четырехмерных кососимметрических операторов позволяют более эффективно строить приближенные аналитические решения кинематических уравнений в четырехмерных кососимметрических операторах и их алгоритмы численного интегрирования (алгоритмы ориентации) в сравнении с использованием векторного кинематического уравнения (6.14) и его матричного аналога в трехмерных кососимметрических операторах.

**7. Алгоритмы ориентации в четырехмерных кососимметрических операторах.** Векторное кинематическое уравнение (6.14) использовалось (Панов (1984, 1995) [10, 11]; Сомов и др. (2008) [35]; Сомов (2009) [36]; Сомов, Бутырин (2012) [37]; Сомов и др. (2014) [38]) для построения алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) в инерциальной системе координат (в том числе для построения алгоритмов определения ориентации спутников), а также для полетной калибровки космического телескопа, БИНС космического аппарата.

Матричное дифференциальное уравнение Stuelpnagel (6.1) (1964) [8] и эквивалентное ему векторное дифференциальное уравнение Bortz (4.2) (1971) [9] также широко используются для построения современных алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью БИНС (Savage (1998) [39], Бранец (2009) [40]).

Предложенные нами матричные кинематические уравнения вращательного движения твердого тела (6.2) и (6.3), в которых в качестве переменной используется четырехмерная кососимметрическая матрица $s_q$, имеют преимущества перед кинематическим уравнением Stuelpnagel (6.1), в котором в качестве переменной используется трехмерная кососимметрическая матрица $s_v$, из-за качественных преимуществ кососимметрических матриц четвертого (четного) порядка перед трехмерными кососимметрическими матрицами третьего (нечетного) порядка.

Предложенные кватернионные кинематические уравнения (6.5) и (6.6), использующие в качестве переменной ассоциированный кватернион $\mathbf{s}$ и соответствующие матричным уравнениям (6.2) и (6.3), существенно проще векторного кинематического уравнения Bortz (4.2), поскольку, в отличие от него, они не содержат тригонометрических функций и операций деления. Поэтому кинематические уравнения (6.2) и (6.3), а также (6.5) и (6.6) более удобны для построения высокоточных алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью БИНС в сравнении с кинематическими уравнениями Stuelpnagel и Bortz.

Как уже отмечалось, кватернионные уравнения (6.5) и (6.6) также более удобны для построения высокоточных алгоритмов БИНС в сравнении с векторным кинематическим уравнением Панов–Shuster (6.14) из-за их большей компактности и преимуществ четырехмерных кососимметрических операторов перед трехмерными векторами.

Наряду с описанными выше кинематическими уравнениями вращательного движения твердого тела для решения теоретических и прикладных задач (задач ориентации, навигации и управления движением различного рода движущихся объектов) широко используется классическое кватернионное кинематическое уравнение $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\cdot}} = (1/2)\boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x$ (Бранец и Шмыглевский (1973, 1992) [33, 34], Челноков (2006) [26]). В этом линейном кинематическом уравнении переменной служит классический кватернион поворота $\boldsymbol{\lambda}$, имеющий норму, равную единице.

Отметим аддитивное вхождение матрицы угловых скоростей в матричные кинематические уравнения (6.3) (Челноков) и (6.1) (Stuelpnagel), кватерниона угловой скорости – в кватернионное кинематическое уравнение (6.6) (Челноков), а вектора угловой скорости – в векторное кинематическое уравнение Bortz (4.2). Поэтому первое приближение решений этих уравнений на шаге интегрирования, построенное методом последовательного приближения Пикара, есть приращение интеграла на шаге интегрирования от вектора абсолютной угловой скорости объекта. Это приращение непосредственно измеряется на борту движущегося объекта большинством современных датчиков угловой скорости. Поэтому эти уравнения более удобны для построения сверхбыстрых циклов алгоритмов определения ориентации движущегося объекта (Savage (1998) [39], Бранец (2009) [40]), использующих интегральную первичную информацию о движении объекта, в сравнении с классическим кватернионным кинематическим уравнением. При этом кватернион ориентации $\boldsymbol{\lambda}$ вычисляется в быстрых циклах алгоритмов определения ориентации, использующих в качестве входной информации результаты вычислений сверхбыстрых циклов этих алгоритмов.

Известно, что компонента $\lambda_0^*$ скалярной части и компоненты $\lambda_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) векторной части $\boldsymbol{\lambda}_v^*$ кватерниона приращения $\boldsymbol{\lambda}^*$ кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$, вычисляемые на шаге интегрирования, отличаются на несколько порядков: величина $\lambda_0^*$ близка к единице, в то время как величины $\lambda_i^*$ имеют порядок, равный $10^{-5}$ и меньше (в зависимости от вида углового движения объекта и шага интегрирования). Близость компоненты $\lambda_0^*$ к единице может приводить к потере точности определения ориентации при малой ограниченной разрядной сетке бортового вычислителя. Поэтому во многих известных алгоритмах величины $\lambda_j^*$ вычисляются через промежуточные кинематические параметры $\varphi_i$, являющиеся проекциями вектора $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ эйлерова конечного поворота объекта на связанные с ним координатные оси. Нами величины $\lambda_j^*$ предлагается вычислять в силу выше указанных причин через другие промежуточные кинематические параметры $s_i = -\mathrm{tg}(\varphi/4)e_i$, которые являются компонентами ассоциированного кватерниона $\mathbf{s} = -\mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$.

Нами были построены новые алгоритмы вычисления кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации движущегося объекта в инерциальной системе координат по интегральной первичной информации об абсолютной угловой скорости объекта с помощью метода последовательного приближения Пикара. Для построения алгоритмов были использованы формулы Кэли и предложенное нами кватернионное кинематическое уравнение типа Риккати (6.6). Алгоритмы построены по общей рекуррентной схеме, имеющей в кватернионной записи следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\lambda}(t_n) = \boldsymbol{\lambda}(t_{n-1}) \circ \boldsymbol{\lambda}^* \\
\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_v = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \lambda_0^* + \lambda_1^*\mathbf{i} + \lambda_2^*\mathbf{j} + \lambda_3^*\mathbf{k}
\end{gathered} \tag{7.1}
$$

Здесь $\lambda_j^*$ – приращения параметров Эйлера $\lambda_j$ на шаге интегрирования $h = t_n - t_{n-1}$.

Приращения $\lambda_j^*$ вычисляются через компоненты $s_i$ ассоциированного кватерниона $\mathbf{s} = -\mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$ по формуле

$$
\boldsymbol{\lambda}^* = (1 - s^2 - 2\mathbf{s})/(1 + s^2), \quad \mathbf{s} = s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}, \quad s^2 = \mathbf{s}\cdot\mathbf{s} = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{7.2}
$$

В свою очередь переменные $s_i$ находятся по одному из построенных нами алгоритмов численного интегрирования (с нулевыми начальными условиями) кватернионного кинематического уравнения типа Риккати (6.6).

Соотношение, связывающее кватернион поворота $\boldsymbol{\lambda}^*$ с ассоциированным кватернионом $\mathbf{s}$, и дифференциальное уравнение (6.6) для кватерниона $\mathbf{s}$ гораздо проще соотношения, связывающего кватернион поворота $\boldsymbol{\lambda}^*$ с вектором поворота $\boldsymbol{\varphi}$, и дифференциального уравнения (4.2) для вектора $\boldsymbol{\varphi}$ (уравнения Bortz).

Приведем два алгоритма из построенных нами алгоритмов вычисления переменных $s_i$.

*Одношаговый алгоритм третьего порядка точности*

$$
\begin{gathered}
\mathbf{s} = -a\gamma + b\gamma \times \gamma^* + c\gamma \circ \gamma^* \circ \gamma \\
\gamma = \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_3 k = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\omega}_x(t)dt, \quad \gamma^* = \gamma_1^* i + \gamma_2^* j + \gamma_3^* k = \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \boldsymbol{\omega}_x(t)dt \\
\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k \\
h = t_n - t_{n-1} = t_{n-1} - t_{n-2}
\end{gathered} \tag{7.3}
$$

*Двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности*

$$
\begin{gathered}
\mathbf{s} = -(a + b\gamma'^2)\gamma' - (a + b\gamma''^2)\gamma'' - e\gamma' \times \gamma'' \\
\gamma' = \gamma_1'\mathbf{i} + \gamma_2'\mathbf{i} + \gamma_3'\mathbf{i} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+h/2} \boldsymbol{\omega}_x(t)dt, \quad \gamma'' = \gamma_1''\mathbf{i} + \gamma_2''\mathbf{j} + \gamma_3''\mathbf{k} = \int_{t_{n-1}+h/2}^{t_{n-1}+h} \boldsymbol{\omega}_x(t)dt, \\
h = t_n - t_{n-1}
\end{gathered} \tag{7.4}
$$

В этих алгоритмах $a$, $b$, $c$, $e$ – числовые коэффициенты.

Порядок точности алгоритма, например, третий, означает, что накопленная методическая погрешность алгоритма пропорциональна $h^3$, где $h$ – шаг интегрирования.

Термин "одношаговый" или "двухшаговый", или "четырехшаговый" алгоритм означает, что шаг интегрирования равен дискретности или равен удвоенной дискретности, или равен учетверенной дискретности выдачи интегральной первичной информации гироскопов.

Нами (совместно с Челноковой) исследованы с помощью математического моделирования хорошо известные алгоритмы вычисления ориентации в инерциальной системе координат (Edwards 1973 [41]; Бранец и Шмыглевский 1973, 1992 [33, 34]; Бесараб 1974 [42]; Панов 1995 [11]; Savage 1998 [39]; Челноков 2006 [26]; Бранец 2009 [40]): метод средней скорости, имеющий второй порядок точности; одношаговые и двухшаговые алгоритмы третьего порядка точности; двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности; четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности, полученный из алгоритма Панова 6-го порядка точности для вычисления вектора $\boldsymbol{\varphi}$.

Также исследованы наши новые одношаговые и двухшаговые алгоритмы третьего и четвертого порядков точности (Челноков и Переляев (2014) [21]; Челноков, Переляев и Челнокова (2016) [22]) и алгоритмы (7.1)–(7.3) и (7.1), (7.2), (7.4). Эти алгоритмы построены автором статьи с использованием кватернионного кинематического уравнения типа Риккати (6.6).

В качестве входной информации в алгоритмах используется интегральная информация об абсолютной угловой скорости объекта (величины $\gamma_i$). Выходная информация алгоритмов – параметры Эйлера $\lambda_j$ (компоненты кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации движущегося объекта в инерциальной системе координат).

Одна из отличительных черт проведенного исследования заключается в изучении точности (вычислительного дрейфа) алгоритмов ориентации при наличии высокочастотных (имеющих порядок 100 гц или 400 гц) колебаниях основания с учетом частоты съема первичной интегральной информации 1000 гц или 2000 гц. При моделировании движения объекта предполагается, что он совершает по каждой из угловых переменных $\psi$, $\vartheta$, $\gamma$ (типа самолетных углов) отдельные гармонические колебания или совершает по каждой из угловых переменных композицию нескольких гармонических колебаний с разными амплитудами и частотами. Задание таких законов движения объекта позволяет наиболее полно выявить точностные возможности исследуемых алгоритмов (традиционно при исследовании алгоритмов ориентации движение объекта задается в виде конического движения, т.е. моделируется колебательное движение объекта по двум, а не трем угловым переменным). Вычисления проводились с 32-х или 64-х разрядной сеткой (последняя использовалась при моделировании алгоритмов четвертого порядка точности). Шаг интегрирования $h$ выбирался из интервала [0.0005 с–0.1 с]. Время движения объекта (интегрирования) – 600 с (10 мин.).

Моделирование проводилось (Челноковой) как для отдельных низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта (частоты колебаний $f_\psi = f_\gamma = 1$ Гц, $f_\vartheta = 0.5$ Гц) с малыми ($\psi_+ = 1$ град, $\vartheta_+ = 2$ град, $\gamma_+ = 3$ град) и большими ($\psi_+ = 15$ град, $\vartheta_+ = 5$ град, $\gamma_+ = 15$ град) амплитудами (а также для других вариантов отдельных низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта с бóльшими амплитудами и частотами), так и для композиций высокочастотных и низкочастотных гармонических колебаний объекта, в частности, для следующих параметров гармоник: первая высокочастотная гармоника: частоты – $f_\psi = 380$ Гц, $f_\vartheta = 400$ Гц, $f_\gamma = 420$ Гц; амплитуды (одинаковые) – $\psi_+ = \vartheta_+ = \gamma_+ = 2.5$ угл. сек или $\psi_+ = \vartheta_+ = \gamma_+ = 25$ угл. сек; вторая высокочастотная гармоника: частоты – $f_\psi = 60$ Гц, $f_\vartheta = 80$ Гц, $f_\gamma = 100$ Гц; амплитуды – $\psi_+ = 1$ угл. мин, $\vartheta_+ = 1.5$ угл. мин, $\gamma_+ = 2$ угл. мин или $\psi_+ = 10$ угл. мин, $\vartheta_+ = 15$ угл. мин, $\gamma_+ = 20$ угл. мин; третья низкочастотная гармоника: частоты – $f_\psi = f_\vartheta = f_\gamma = 1$ Гц (одинаковые) или $f_\psi = 1$ Гц, $f_\vartheta = 2$ Гц, $f_\gamma = 3$ Гц; амплитуды – $\psi_+ = 6$ град, $\vartheta_+ = 8$ град, $\gamma_+ = 10$ град.

Приведем основные выводы, касающиеся точностных характеристик указанных алгоритмов ориентации для описанных угловых движений объекта.

1. Из всех рассмотренных алгоритмов наименьшие методические погрешности имеет наш новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности (7.4), построенный на основе нового кватернионного дифференциального кинематического уравнения типа Риккати (6.5) или (6.6). Этот алгоритм обладает лучшей вычислительной устойчивостью и имеет простую структуру.

При шаге интегрирования $h = 0.01$ с его погрешности для моделируемых низкочастотных угловых движений объекта с большими амплитудами составляют $1.29 \times 10^{-5}$ град, $3.93 \times 10^{-6}$ град и $1.45 \times 10^{-5}$ град по переменным $\psi$, $\vartheta$ и $\gamma$ соответственно, что на 1–2 порядка меньше (для этого же шага интегрирования), чем погрешности всех других рассмотренных одно- и двухшаговых алгоритмов. При шаге интегрирования $h = 0.001$ с погрешности двухшагового алгоритма (7.4) для этих угловых движений объекта составляют величины $4.13 \times 10^{-7}$ град, $1.47 \times 10^{-7}$ град и $5.40 \times 10^{-7}$ град по переменным $\psi$,

$\vartheta$ и $\gamma$ соответственно, а при шаге интегрирования $h = 0.002$ с эти погрешности составляют величины $1.66 \times 10^{-6}$ град, $5.87 \times 10^{-7}$ град и $2.16 \times 10^{-6}$ град соответственно.

2. Из всех рассмотренных одношаговых алгоритмов ориентации наименьшую методическую погрешность имеет наш новый одношаговый алгоритм третьего порядка точности (7.3).

3. Хорошо известный и часто используемый четырехшаговый алгоритм 4-го порядка точности Панова (1995) [11] имеет точность, сопоставимую с точностью нашего нового двухшагового алгоритма четвертого порядка точности (7.4), если фигурирующие в этом алгоритме трансцендентные функции (синус, косинус, квадратный корень) вычисляются по высокоточным алгоритмам (реализуемым, например, в стандартных подпрограммах вычисления этих функций). Однако наш новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности имеет преимущество в смысле объема необходимых вычислений в 1.5–2 раза в силу его большей простоты. Кроме этого, новый двухшаговый алгоритм позволяет выполнять определение ориентации с большей частотой (в сравнении с четырехшаговым алгоритмом) и, следовательно, с большей точностью.

4. Вычислительные дрейфы всех алгоритмов для высокочастотных колебаний объекта с малыми амплитудами (наиболее интересный для практики случай) имеют порядок $10^{-6}$ град.

5. Наличие высокочастотных составляющих в угловых колебаниях объекта может приводить к потере вычислительной устойчивости алгоритмов ориентации при неверном выборе шага интегрирования. Так, для второй из рассмотренных композиций высокочастотных и низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта потеря вычислительной устойчивости алгоритмов ориентации наблюдалась уже при шаге интегрирования, равном 0.002 с.

**Заключение.** В статье рассмотрены трехмерные и четырехмерные кососимметрические операторы, порожденные экспоненциальными представлениями таких ортогональных операторов, как матрица направляющих косинусов углов, кватернионная матрица вращения и кватернион вращения Гамильтона. Приведены трехмерные векторные и матричные кинематические уравнения для вектора вращения Эйлера $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$, включая векторное уравнение (Bortz) и матричное уравнение (Stuelpnagel). Получены новые четырехмерные кинематические уравнения в ассоциированных кватернионах и в кватернионных кососимметрических матрицах, компонентами которых являются проекции вектора вращения $\boldsymbol{\varphi}/2$.

Рассмотрено представление трехмерных и четырехмерных кососимметрических матриц, а также ассоциированных кватернионов с помощью формул Кэли. Показано, что если трехмерной кососимметрической матрице $s_v$, связанной с матрицей направляющих косинусов формулой Кэли, соответствует вектор $\mathbf{s}_v = -\mathrm{tg}(\varphi/2)\mathbf{e}$, то четырехмерной кососимметрической матрице $s_q$, связанной той или иной формулой Кэли с кватернионной матрицей поворота типа $n$, соответствует вектор $\mathbf{s}_v = -\mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ или вектор $\mathbf{s}_v = \mathrm{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}$. Также показано, что четырехмерным кососимметрическим матрицам $s_q$ и $s^*$, порождаемым формулами Кэли, отвечают ассоциированные кватернионы $\mathbf{s}_q = -\mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$ и $\mathbf{s}^* = \mathrm{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$.

Рассмотрены кинематические уравнения вращения в кососимметрических операторах типа Риккати: трехмерное матричное кинематическое уравнение, предложенное Stuelpnagel, и новые четырехмерные матричные кинематические уравнения, предложенные нами. В этих уравнениях в качестве переменных используются трехмерная кососимметрическая матрица и четырехмерные кососимметрические матрицы, определяемые формулами Кэли. Кососимметрические матрицы четвертого (четного) порядков имеют качественные преимущества перед трехмерными кососимметрическими матрицами третьего (нечетного) порядков. Это делает использование наших матричных кинематических уравнений более эффективным при проведении аналитических исследований и при построении высокоточных численных алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы в сравнении с уравнением Stuelpnagel.

Получены новые различные кватернионные кинематические уравнения вращения в ассоциированных кватернионах **s** и **s***: уравнения, правые части которых имеют вид кватернионных произведений трех кватернионов, один из которых (центральный) является кватернионом угловой скорости твердого тела, а также уравнения типа Риккати. Эти кватернионы **s** и **s*** порождаются кватернионными аналогами формул Кэли. Показано, что полученные кватернионные кинематические уравнения ковариантны по отношению к ассоциированным кватернионам **s** и **s***. Также показано, как из одного из полученных нами кинематических уравнений в ассоциированных кватернионах получается векторное кинематическое уравнение Панов–Shuster относительно векторной переменной $\mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$. Вектор и ассоциированный кватернион имеют качественно различные свойства, хотя имеют одинаковое количество ненулевых компонент, равное 3. В кватернионном исчислении, в отличие от векторного исчисления, операция деления определена (существует), и она легко алгоритмизируется, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Это делает использование кинематических уравнений в ассоциированных кватернионах в задачах ориентации более эффективным, чем использование векторных уравнений.

Нами получены новые алгоритмы вычисления параметров Эйлера. Они построены с помощью метода последовательного приближения Пикара, использования формул Кэли и кинематического уравнения типа Риккати в ассоциированных кватернионах. В алгоритмах используется измеренная на борту движущегося объекта интегральная первичная информация об абсолютной угловой скорости объекта (квазикоординаты). Новые, предложенные нами алгоритмы, имеют простую структуру, позволяют определять инерциальную ориентацию объекта в параметрах Эйлера более точно, чем другие, рассмотренные известные алгоритмы, и обладают лучшей вычислительной устойчивостью.

*Развитие исследования.* Построенная нами теория может быть обобщена на общее пространственное движение твердого тела, которое представляет собой композицию вращательного (углового) и поступательного (орбитального) движений. Это обобщение может быть выполнено с помощью дуальных векторов, дуальных матриц и бикватернионов Клиффорда (дуальных кватернионов) (Clifford (1873) [43], Котельников (1895, 1970, 1950) [44]– [46], Диментберг (1978) [47], Челноков (2006) [8]).

Также, на наш взгляд, перспективно построение и реализация на бортовых компьютерах новых дуальных алгоритмов ориентации и навигации с использованием новых дуальных матричных и бикватернионных кинематических уравнений. К таким алгоритмам относятся дуальные алгоритмы вычисления параметров ориентации и координат объекта в инерциальной системе координат, а также параметров инерциальной ориентации и проекций вектора кажущейся скорости объекта на инерциальные и связанные с объектом координатные оси по информации гироскопов и акселерометров. Такие дуальные кватернионные уравнения и алгоритмы, построенные с использованием дуальных матричных и кватернионных аналогов формул Кэли и принципа перенесения Котельникова–Штуди, рассматриваются нами в работе [48] (Челноков 2016).

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-21-00218.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
2. *Hamilton W.R.* Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges & Smith, 1853. 382 p.

3. *Euler L.* Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile // Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1770. V. 15. P. 75–106.
4. *Rodrigues O.* Des lois geometriques qui regissent les deplacements d'un systems olide dans l'espase, et de la variation des coordonnee sprovenant de ses deplacement sconsideeres independamment des causes qui peuvent les produire // J. des Mathematiques Pureset Appliquess. 1840. V. 5. P. 380–440.
5. *Gibbs J.W.* Scientific Papers. New York: Dover, 1961.
6. *Gibbs J.W.* Vector Analysis. New York: Scribners, 1901.
7. *Wiener. T.F.* Theoretical Analysis of Gimballess Inertial Reference Equipment Using Delta-Modulated Instruments. Ph.D. Diss. Dep. Aeron.&Astron. Massachusetts Inst. of Technol. Cambridge. MA, 1962.
8. *Stuelpnagel J.* On the parameterization of the three-dimensional rotation group // SIAM Rev. 1964. V. 6. № 4. P. 422–429.
9. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Trans. on Aerosp.&Elect. Syst. AES-7. 1971. V. 1. P. 61–66.
10. *Панов А.П.* О выборе параметров и кинематических уравнений вращения для численного интегрирования в ЦВМ // Кибернетика и выч. техн. 1984. Вып. 62. С. 104–111.
11. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наук. думка, 1995. 279 с.
12. *Marandi S.R., Modi V.J.* A preferred coordinate system and the associated orientation representation in attitude dynamics // Acta Astron. 1987. V. 15. № 11. P. 833–843. https://doi.org/10.1016/0094-5765(87)90038-5
13. *Shuster M.D.* A survey of attitude representations // J. Astron. Sci. 1993. V. 41. № 4. P. 439–517.
14. *Tsiotras P., Longuski J.M.* A new parameterization of the attitude kinematics // J. Astron. Sci. 1995. V. 43. № 3. P. 243–262.
15. *Schaub H., Tsiotras P., Junkins J.L.* Principal rotation representations of proper N × N orthogonal matrices // Int. J. Engng. Sci. 1995. V. 33. № 15. P. 2277–2295.
16. *Schaub H., Junkins J.L.* Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the rodrigues parameters // J. Astron. Sci. 1996. V. 44. № 1. P. 1–19.
17. *Tsiotras P., Junkins J.L., Schaub H.* Higher order cayley transforms with applications to attitude representations // J. Guidance, Control, & Dyn. 1997. V. 20. № 3. P. 528–534.
18. *Schaub H., Robinett R.D., Junkins J.L.* New penalty functions for optimal control formulation for spacecraft attitude control problems // J. Guidance, Control, & Dyn. 1997. V. 20. № 3. P. 428–434.
19. *Schaub H.* Novel coordinates for nonlinear multibody motion with applications to spacecraft dynamics and control. Ph.D. Diss. Aerosp. Engng. Texas AM Univ. College Station. TX, 1998.
20. *Hurtado, John E.* Interior Parameters, Exterior Parameters, and a Cayley-Like Transform // J. Guidance, Control, & Dyn. 2008.
21. *Chelnokov Y.N., Perelyaev S.E.* New equations and algorithms for orientation and navigation of strapdown inertial navigation systems with four-dimensional skew-symmetric operators // 21st St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. ICINS 2014. Proce. 21. 2014. P. 365–369.
22. *Челноков Ю.Н., Переляев С.Е., Челнокова Л.А.* Исследование алгоритмов определения инерциальной ориентации движущегося объекта // Изв. Сарат. унив. Новая серия: Мат. Мех. Информ. 2016. Т. 16. № 1. С. 80–95.
23. *Челноков Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига–Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11–20.
24. *Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Сравнительный анализ точности алгоритмов определения ориентации объекта в параметрах Родрига–Гамильтона и направляющих косинусах // Космич. исслед. 1979. Т. 17. Вып. 3. С. 371–377.

25. *Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела // Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. 1981. Вып. 11. С. 122–129.

26. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 511 с.

27. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ НКТИ СССР, 1937. 500 с.

28. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.

29. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.

30. *Ickes B.F.* A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions // AIAA J. 1970. № 8. P. 13–17.

31. *Переляев С.Е.* О соответствии между трехмерными и четырехмерными параметрами трехмерной группы вращения // Изв. РАН. МТТ. 2009. Т. 44. № 2. С. 204–213.

32. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.

33. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

34. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.

35. *Somov Ye.I., Butyrin S.A., Skirmunt V.K.* In-flight alignment calibration of a space telescope and a star tracker cluster // Proc. Jubilee 15th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”. St. Petersburg. 2008. P. 139–143.

36. *Somov Ye.I.* Multiple algorithms for filtration, integration and calibration of a strapdown inertial system for a spacecraft attitude determination // Proc. 16th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”. St. Petersburg. 2009. P. 110–112.

37. *Somov Ye.I., Butyrin S.A.* In-flight alignment of a space telescope and a star tracker cluster at a scanning observation of the Earth marked objects // Proc. 19th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”. St. Petersburg. 2012. P. 242–244.

38. *Somov E.I., Butyrin S.A., Gasizadeh Ch.M.* Flight calibration of SINS of a small information satellite with correction from solar and magnetic sensors // XXI St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. Coll. of Mater. St. Petersburg. 2014. P. 18–21.

39. *Savage P.G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Pt. 1: Attitude algorithm // J. Guidance, Control&Dyn. 1998. V. 21. № 1. P. 19–28.

40. *Бранец В.Н.* Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: МФТИ, 302 с.

41. *Edwards A.* Strapdown inertial navigation systems // Rocket Techn. 1973. № 5. P. 50–57.

42. *Бесараб П.Н.* Определение параметров пространственной ориентации движущегося объекта // ЖВММФ. 1974. Т. 14. № 1. С. 240–246.

43. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // Proc. London Math. Soc. 1873. № 4. P. 381–395.

44. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань: 1895. 215 с.

45. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.

46. *Котельников А.П.* Теория векторов и комплексные числа // в: Сб. статей. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.: Гостехиздат, 1950. С. 7–47.

47. *Диментберг Ф.М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.

48. *Челноков Ю.Н.* Уравнения кинематики твердого тела в четырехмерных кососимметрических операторах и их приложения в инерциальной навигации // ПММ. Т. 80. Вып. 6. 2016. С. 637–652.

## Orientation and Kinematics of Rotation: Quaternion and Four-dimensional Skew-symmetric Operators, Equations and Algorithms

**Yu. N. Chelnokov**[a,#]

[a]*Institute of Precision Mechanics and Control Problems RAS, Saratov, Russia*
[#]*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

This paper derives the theory of three-dimensional and four-dimensional skew-symmetric rotation operators, generated by exponential representations of orthogonal operators or their representations using Cayley formulas. The generating orthogonal operators include the direction cosine matrix, the quaternion matrix of Euler parameters, and the Hamilton rotation quaternion. New matrix and quaternion kinematic equations for the rotation of a rigid body in four-dimensional skew-symmetric matrices and in quaternions with zero scalar parts (in associated quaternions) are proposed. It is shown that they are advantageous in comparison with the known kinematic equations of rotation in three-dimensional skew-symmetric matrices and with the vector kinematic equations. As a topical application of the proposed equations, the construction of high-precision algorithms for determining the orientation of a moving object in an inertial coordinate frame using a strapdown inertial navigation system is considered. Skew-symmetric matrices of the fourth (even) order and associated quaternions have qualitative advantages over skew-symmetric matrices of the third (odd) order and vectors. This makes the use of our proposed kinematic equations of rotation in orientation and navigation problems more efficient in comparison with the traditionally used equations in three-dimensional skew-symmetric operators.

*Keywords:* three-dimensional and four-dimensional orthogonal and skew-symmetric rotation operators, matrices, vectors, quaternions, exponential representations of orthogonal operators, Cayley formulas, kinematic equations of rotation, orientation algorithms

## REFERENCES

1. *Gantmakher F.R.* The Theory of Matrices. Moscow: Nauka, 1967.
2. *Hamilton W.R.* Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853.
3. *Euler L.* Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile // Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1770, vol. 15, pp. 75–106.
4. *Rodrigues O.* Des lois geometriques qui regissent les deplacements d'un systems olide dans l'espase, et de la variation des coordonnee sprovenant de ses deplacement sconsideeres independamment des causes qui peuvent les produire // J. des Mathematiques Pureset Appliquess, 1840, vol. 5. pp. 380–440.
5. *Gibbs J.W.* Scientific Papers. N.Y.: Dover, 1961.
6. *Gibbs J.W.* Vector Analysis. N.Y.: Scribners, 1901.
7. *Wiener. T.F.* Theoretical Analysis of Gimballess Inertial Reference Equipment Using Delta-Modulated Instruments. Ph.D. Diss. Dep. Aeron.&Astron. Massachusetts Inst. of Technol. Cambridge. MA, 1962.
8. *Stuelpnagel J.* On the parameterization of the three-dimensional rotation group // SIAM Rev., 1964, vol. 6, no. 4, pp. 422–429. https://doi.org/10.1137/1006093
9. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Trans. on Aerosp.&Elect. Syst. AES-7, 1971, vol. 1, pp. 61–66.
10. *Panov A.P.* On choosing the kinematic parameters and equations of rotation for numerical integration on a computer // Kibern. Vychisl. Tekh., 1987, vol. 62, pp. 104–111.
11. *Panov A.P.* Mathematical Background of Inertial Orientation Theory. Kiev: Nauk. Dumka, 1995.
12. *Marandi S.R., Modi V.J.* A preferred coordinate system and the associated orientation representation in attitude dynamics // Acta Astron., 1987, vol. 15, no. 11, pp. 833–843. https://doi.org/10.1016/0094-5765(87)90038-5
13. *Shuster M.D.* A survey of attitude representations // J. Astron. Sci., 1993, vol. 41, no. 4, pp. 439–517.
14. *Tsiotras P., Longuski J.M.* A new parameterization of the attitude kinematics // J. Astron. Sci., 1995, vol. 43, no. 3, pp. 243–262.

15. *Schaub H., Tsiotras P., Junkins J.L.* Principal rotation representations of proper N×N orthogonal matrices // Int. J. Engng. Sci., 1995, vol. 33, no. 15, pp. 2277–2295. https://doi.org/10.1016/0020-7225(95)00070-E
16. *Schaub H., Junkins J.L.* Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the rodrigues parameters // J. Astron. Sci., 1996, vol. 44, no. 1, pp. 1–19.
17. *Tsiotras P., Junkins J.L., Schaub H.* Higher order cayley transforms with applications to attitude representations // J. Guidance, Control & Dyn., 1997, vol. 20, no. 3, pp. 528–534. https://doi.org/10.2514/2.4072
18. *Schaub H., Robinett R.D., Junkins J.L.* New penalty functions for optimal control formulation for spacecraft attitude control problems // J. Guidance, Control & Dyn., 1997, vol. 20, no. 3, pp. 428–434. https://doi.org/10.2514/2.4093
19. *Schaub H.* Novel coordinates for nonlinear multibody motion with applications to spacecraft dynamics and control. Ph.D. Diss. Aerosp. Engng. Texas AM Univ. College Station. TX, 1998.
20. *Hurtado J.E.* Interior Parameters, Exterior Parameters, and a Cayley-Like Transform // J. Guidance, Control & Dyn. 2008. https://doi.org/10.2514/1.39624
21. *Chelnokov Y.N., Perelyaev S.E.* New equations and algorithms for orientation and navigation of strapdown inertial navigation systems with four-dimensional skew-symmetric operators // 21st St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. ICINS 2014. Proc. 21, 2014, pp. 365–369.
22. *Chelnokov Yu.N., Perelyaev S.E., Chelnokova L.A.* An investigation of algorithms for estimating the inertial orientation of a moving object // Izv. Saratov Univ. Ser. Math. Mech. Inform., 2016, vol. 16(1), pp. 80–95. (in Russian) https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-80-95
23. *Chelnokov Yu.N.* On determining vehicle orientation in the Rodrigues-Hamilton parameters from its angular velocity // Mech. Solids, 1977, vol. 37 (3), pp. 8–16.
24. *Plotnikov P.K., Chelnokov Yu.N.* Comparative error analysis of algorithms for determining vehicle attitude in Rodrigues-Hamilton parameters and direction cosines // Cosmic Res., 1979, vol. 17 (3), pp. 308–313.
25. *Plotnikov P.K., Chelnokov Yu.N.* Application of quaternionic matrices in the theory of finite rotation of a rigid body // in: Coll. Papers on Sci.&Meth. Articles on Theor. Mech. Moscow: Vysshaya Shkola, 1981. Iss. 11, pp. 122–131.
26. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of Solid Bodies and its Applications. Geometry and Kinematics of Motion. Moscow: Fizmatlit, 2006.
27. *Whittaker E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1927.
28. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 1961.
29. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N.Y.: McGraw-Hill, 1960.
30. *Ickes B.F.* A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions // AIAA J., 1970, vol. 8, pp. 13–17.
31. *Perelyaev S.E.* On the correspondence between the three- and four-dimensional parameters of the three-dimensional rotation group // Mech. Solids, 2009, vol. 44 (2), pp. 204–213.
32. *Zhuravlev V.Ph.* Foundations of Theoretical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2008.
33. *Branets V.N., Shmyglevskii I.P.* Application of Quaternions in Problems of Orientation of a Rigid Body. Moscow: Nauka, 1973.
34. *Branets V.N., Shmyglevskii I.P.* Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems. Moscow: Nauka, 1992.
35. *Somov Ye.I., Butyrin S.A., Skirmunt V.K.* In-flight alignment calibration of a space telescope and a star tracker cluster // Proc. Jubilee 15th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI "Elektropribor". St. Petersburg. 2008, pp. 139–143.
36. *Somov Ye.I.* Multiple algorithms for filtration, integration and calibration of a strapdown inertial system for a spacecraft attitude determination // Proc. 16th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI "Elektropribor", St. Petersburg, 2009, pp. 110–112.
37. *Somov Ye.I., Butyrin S.A.* In-flight alignment of a space telescope and a star tracker cluster at a scanning observation of the Earth marked objects // Proc. 19th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI "Elektropribor", St. Petersburg, 2012, pp. 242–244.

38. *Somov E.I., Butyrin S.A., Gasizadeh Ch.M.* Flight calibration of SINS of a small information satellite with correction from solar and magnetic sensors // XXI St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. Coll. of Mater. St. Petersburg, 2014, pp. 18–21.
39. *Savage P.G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Pt. 1: Attitude algorithm // J. Guidance, Control&Dyn., 1998, vol. 21, no. 1, pp. 19–28.
40. *Branets V.N.* Lectures on the Theory of Inertial Navigation Control Systems. Moscow: MFTI, 2009.
41. *Edwards A.* Strapdown inertial navigation systems // Rocket Techn., 1973, no. 5, pp. 50–57.
42. *Besarab P.N.* Estimation of the orientation parameters of a moving object // J. Comp. Math.&Math. Phys., 1974, vol. 14 (1), pp. 240–246.
43. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // Proc. London Math. Soc., 1873, vol. 4, pp. 381–395.
44. *Kotelnikov A.P.* Screw Calculus and Some Applications to Geometry and Mechanics. Kazan: 1895.
45. *Kotelnikov A.P.* Screws and complex numbers // Izv. Fiz-mat. Obshch. Kazan. Univ., 1896, vol. 2 (6), pp. 23–33.
46. *Kotelnikov A.P.* Theory of Vectors and Complex Numbers Some Applications of Lobachevskii's Ideas in Mechanics and Physics. Moscow: Gostekhizdat, 1950.
47. *Dimentberg F.M.* Theory of Screws and Its Applications. Moscow: Nauka, 1978.
48. *Chelnokov Yu.N.* Kinematic equations of a rigid body in four-dimensional skew-symmetric operators and their application in inertial navigation // JAMM, 2016, vol. 80 (6), pp. 449–458. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.06.003