ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 6, с. 801–813

УДК 531.38531.39

ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОГО ГИРОСТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

© 2022 г. Г. В. Горр[1,*], А. В. Мазнев[1,]**

[1] *Государственное бюджетное учреждение “Институт прикладной математики и механики”, Донецк, ДНР*

**e-mail: gvgorr@gmail.com*

***e-mail: aleksandr_maznev@rambler.ru*

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.
После доработки 11.07.2022 г.
Принята к публикации 25.07.2022 г.

Рассмотрен новый метод исследования прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Построено решение уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, описывающее регулярные прецессии гиростата относительно оси симметрии силовых полей.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, потенциальные и гироскопические силы, прецессии

DOI: 10.31857/S0032823522060054

1. Введение. Понятие “гиростат” возникло в результате моделирования движения либо системы связанных твердых тел (У. Томсон [1], А. Грей [2], распределение масс которой не изменяется в течение времени), либо движения твердых тел, содержащих идеальную жидкость (Н.Е. Жуковский [3]). Дальнейшее развитие исследований движения гиростата получено в статьях В.В. Румянцева [4], Й. Виттенбурга [5] и П.В. Харламова [6]. В.В. Румянцев полагал, что гиростат можно трактовать как систему связанных твердых тел, которая содержит динамически и статически уравновешенные роторы. П.В. Харламов рассматривал систему связанных твердых тел, несомые тела которых вращаются вокруг своих осей динамической симметрии, несущих центры масс роторов. Задачу о движении гиростата более общего вида исследовал Й. Виттенбург. Тематика динамики гиростата рассмотрена во многих публикациях (см., например, [7–12]).

В силу того, что уравнения движения гиростата, имеющего неподвижную точку, являются неавтономными дифференциальными уравнениями, то их интегрирование целесообразно проводить с помощью методов инвариантных соотношений (ИС), предложенных Т. Леви-Чивитой [13] и П.В. Харламовым [14] (особенности этих методов изучены в монографии автора статьи [15]). В монографии [10] показано, что они наиболее эффективны в задачах об условиях существования прецессионных движений твердого тела и гиростата. Понятие таких движений в динамике твердого тела введено Д. Гриоли [16], а обзор результатов, установленных в задачах о движении гиростата в полях сложной структуры, указан в [17, 18]. Основной особенностью проведенных ранее исследований условий существования прецессий является подход, основанный на применении прецессионной подвижной системы координат [19]. В статье [20] при изучении прецессий гиростата использована главная система координат.

Данная статья посвящена рассмотрению более общего класса прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил по сравнению с [11], так как, в отличие от [11], здесь предполагается, что вектор, который образует в процессе движения гиростата постоянный угол с осью симметрии силовых полей, занимает произвольное положение в главной системе координат. Построено новое решение уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, описывающее регулярную прецессию гиростата.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента: $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(t))$. Параметры λ_1 и λ_2 полагаем постоянными; $\lambda_3(t)$ – функция, зависящая от времени t. В гиростате введем главную систему координат $Oxyz$; O – неподвижная точка тела-носителя; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(t)$ – компоненты гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$ в этой системе координат; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – единичные векторы осей Ox, Oy, Oz. Уравнения движения гиростата запишем в векторной форме [20–23]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \left(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)\right) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции; $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, определяющая нелинейные по ν_i $(i = \overline{1,3})$ потенциальные силы; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени. Применение ссылок перед формулами (2.1) связано с аналогией задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении твердого тела в жидкости. Запишем первые интегралы уравнений (2.1)

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \left(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)\right) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{2.2}$$

где k – произвольная постоянная.

Система (2.1), (2.2) является неавтономной системой дифференциальных уравнений относительно переменных $\omega_i(t)$, $\nu_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$, $\lambda_3(t)$. Поэтому ее интегрирование может быть основано на нескольких подходах. В данной статье применяется подход [23]. Он состоит в том, чтобы уравнения (2.1), (2.2) рассматривать совместно с уравнениями

$$\dot{\lambda}_3(t) = L(t), \quad \lambda_3(t) = D_3[\omega(t) \cdot \mathbf{i}_3 + \dot{\kappa}(t)], \tag{2.3}$$

где D_3 – момент инерции ротора S_3 относительно оси вращения Oz; $\dot{\kappa}(t)$ – угловая скорость S_3; $L(t)$ – проекция сил и моментов, действующих на ротор S_3 со стороны тела-носителя.

Следуя [24], зададим для уравнений (2.1), (2.2) три инвариантных соотношения (ИС):

$$\omega_i = \nu_i \varepsilon(\nu_3) + \beta_i g(\nu_3) \quad (i = \overline{1,3}), \tag{2.4}$$

где $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, то есть вектор $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ является единичным вектором; $\varepsilon(\nu_3)$, $g(\nu_3)$ – дифференцируемые функции переменной ν_3. В векторном виде уравнения (2.4) можно записать так:

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon(\nu_3)\boldsymbol{\nu} + g(\nu_3)\boldsymbol{\beta} \tag{2.5}$$

При выполнении равенства (2.5) уравнение Пуассона из (2.1) таково: $\dot{\boldsymbol{\nu}} = g(\nu_3)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta})$. Отсюда в скалярном виде имеем:

$$\dot{\nu}_1 = g(\nu_3)\left(\beta_3\nu_2 - \beta_2\nu_3\right), \quad \dot{\nu}_2 = g(\nu_3)\left(\beta_1\nu_3 - \beta_3\nu_1\right), \quad \dot{\nu}_3 = g(\nu_3)\left(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2\right) \tag{2.6}$$

Система дифференциальных уравнений (2.6) допускает два первых интеграла

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1,\quad \beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2+\beta_3\nu_3=c_0, \tag{2.7}$$

где c_0 – произвольная постоянная. Отметим, что случай $\beta_3=0$ рассмотрен в [11]. Из второго соотношения системы (2.7) следует, что $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu}=c_0$. В силу $|\boldsymbol{\beta}|=1$, $|\boldsymbol{\nu}|=1$ параметр $|c_0|<1$. Примем ν_3 за независимую вспомогательную переменную. Тогда из системы (2.7) получим

$$\begin{aligned}\nu_1(\nu_3)&=\frac{1}{\kappa_0^2}\Big[\beta_1(c_0-\beta_3\nu_3)+\beta_2\sqrt{F(\nu_3)}\Big]\\ \nu_2(\nu_3)&=\frac{1}{\kappa_0^2}\Big[\beta_2(c_0-\beta_3\nu_3)-\beta_1\sqrt{F(\nu_3)}\Big],\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\kappa_0^2=\beta_1^2+\beta_2^2$, а функция $F(\nu_3)$ является квадратичной функцией переменной ν_3:

$$F(\nu_3)=-\nu_3^2+2c_0\beta_3\nu_3+\left(\kappa_0^2-c_0^2\right) \tag{2.9}$$

Подставляя $\nu_1(\nu_3)$, $\nu_2(\nu_3)$ из (2.8) в третье уравнение системы (2.6), устанавливаем, что функция $\nu_3(t)$ находится путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3}\frac{d\nu_3}{g(\nu_3)\sqrt{F(\nu_3)}}=t-t_0 \tag{2.10}$$

Функции $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ определяются из системы (2.4) на основании равенств (2.8).

Покажем, что при выполнении условия $c_0<1$ решение (2.8)–(2.10) действительно. Из равенства (2.9) следует, что $F(\nu_3)<0$ при $|\nu_3|\geq 1$. Обозначив $\mu_0=\sqrt{1-c_0^2}$, из уравнения $F(\nu_3)=0$ имеем его корни в виде

$$(\nu_3)_{1,2}=c_0\beta_3\pm\mu_0\kappa_0, \tag{2.11}$$

которые принадлежат промежутку $\nu_3\in(-1;1)$. То есть при изменении ν_3 на отрезке $[(\nu_3)_2,(\nu_3)_1]$, исключая его концы, функция $F(\nu_3)$ положительна.

Рассмотрим случай $\varepsilon(\nu_3)=\varepsilon_0$, $g(\nu_3)=g_0$. Из равенств (2.4) получим

$$\omega_i=\varepsilon_0\nu_i+g_0\beta_i, \tag{2.12}$$

где ε_0 и g_0 – постоянные параметры. Введем обозначения

$$\begin{gathered}h_0=c_0\beta_1,\quad h_1=\frac{\mu_0\beta_2}{\kappa_0},\quad h_2=-\frac{\beta_1\beta_3\mu_0}{\kappa_0}\\ r_0=c_0\beta_2,\quad r_1=-\frac{\mu_0\beta_1}{\kappa_0},\quad r_2=-\frac{\beta_2\beta_3\mu_0}{\kappa_0}\\ a_0=c_0\beta_3,\quad a_2=\kappa_0\mu_0\end{gathered} \tag{2.13}$$

Тогда из соотношений (2.8)–(2.10) получим

$$\begin{aligned}\nu_1(\psi)&=h_0+h_1\cos\psi+h_2\sin\psi\\ \nu_2(\psi)&=r_0+r_1\cos\psi+r_2\sin\psi\\ \nu_3(\psi)&=a_0+a_2\sin\psi,\end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\psi = g_0 t$ (в силу периодичности (2.14) начальное значение t_0 положено равным нулю). Отметим вид обозначений (2.13) и соотношений при $\beta_3 = 0$, которые рассмотрены в [11] (очевидно $\kappa_0 = 1$):

$$h_0 = c_0\beta_1, \quad h_1 = \mu_0\beta_2, \quad h_2 = 0, \quad r_0 = c_0\beta_2$$
$$r_1 = -\mu_0\beta_1, \quad r_2 = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_2 = \mu_0 \tag{2.15}$$

$$\nu_1(\psi) = h_0 + h_1\cos\psi, \quad \nu_2(\psi) = r_0 + r_1\cos\psi, \quad \nu_3(\psi) = a_2\sin\psi \tag{2.16}$$

Постановка задачи, которая исследуется в данной статье, состоит в изучении условий существования решения (2.12), (2.14) у динамического уравнения из (2.1).

Отметим, что отличие данной задачи от задачи, которая рассматривалась в статье [11], заключается в том, что здесь полагается $\beta_3 \neq 0$, а λ_1, λ_2 – постоянные параметры. В статье [11] указанные параметры приняты равными нулю.

3. Редукция первого уравнения (2.1) на ИС (2.4), (2.8). Запишем это уравнение в скалярной форме

$$A_1\dot\omega_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3(t)\omega_2 + \omega_2 B_3\nu_3 - \omega_3 B_2\nu_2 +$$
$$+ s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 \tag{3.1}$$

$$A_2\dot\omega_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \lambda_3(t)\omega_1 - \lambda_1\omega_3 + \omega_3 B_1\nu_1 - \omega_1 B_3\nu_3 +$$
$$+ s_3\nu_1 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1 \tag{3.2}$$

$$\dot\lambda_3 + A_3\dot\omega_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + \omega_1 B_2\nu_2 - \omega_2 B_1\nu_1 +$$
$$+ s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 \tag{3.3}$$

Подставим значения (2.4) в уравнения (3.1)–(3.3). Принимая во внимание уравнения (2.6), получим

$$A_1\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\big(\beta_2\nu_3 - \beta_3\nu_2\big) + A_1\big(\nu_1\varepsilon'(\nu_3) + \beta_1 g'(\nu_3)\big)g(\nu_3)\big(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1\big) +$$
$$+ \nu_2\nu_3\big[\varepsilon^2(\nu_3)\big(A_2 - A_3\big) + \varepsilon(\nu_3)\big(B_3 - B_2\big) + C_3 - C_2\big] +$$
$$+ \nu_2\big[\beta_3\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\big(A_2 - A_3\big) - \beta_3 B_2 g(\nu_3) - s_3\big] +$$
$$+ \nu_3\big[\beta_2\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\big(A_2 - A_3\big) + \lambda_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 B_3 g(\nu_3) + s_2\big] +$$
$$+ \beta_2\beta_3 g^2(\nu_3)\big(A_2 - A_3\big) + \beta_3\lambda_2 g(\nu_3) = \lambda_3(t)\big(\nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3)\big) \tag{3.4}$$

$$A_2\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\big(\beta_3\nu_1 - \beta_1\nu_3\big) + A_2\big(\nu_2\varepsilon'(\nu_3) + \beta_2 g'(\nu_3)\big)g(\nu_3)\big(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1\big) +$$
$$+ \nu_1\nu_3\big[\varepsilon^2(\nu_3)\big(A_3 - A_1\big) + \varepsilon(\nu_3)\big(B_1 - B_3\big) + C_1 - C_3\big] +$$
$$+ \nu_1\big[\beta_3\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\big(A_3 - A_1\big) + \beta_3 B_1 g(\nu_3) + s_3\big] +$$
$$+ \nu_3\big[\beta_1\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\big(A_3 - A_1\big) - \beta_1 B_3 g(\nu_3) - \lambda_1\varepsilon(\nu_3) - s_1\big] +$$
$$+ \beta_1\beta_3 g^2(\nu_3)\big(A_3 - A_1\big) - \beta_3\lambda_1 g(\nu_3) = -\lambda_3(t)\big(\nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3)\big) \tag{3.5}$$

$$\dot\lambda_3(t) = A_3\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\big(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1\big) + A_3\big(\nu_3\varepsilon'(\nu_3) + \beta_3 g'(\nu_3)\big)\big(\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1\big) +$$
$$+ \nu_1\nu_2\big[\varepsilon^2(\nu_3)\big(A_1 - A_2\big) + \varepsilon(\nu_3)\big(B_2 - B_1\big) + C_2 - C_1\big] +$$

$$+ \nu_1 \left[\beta_2\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\left(A_1 - A_2\right) - \beta_2 B_1 g(\nu_3) - \lambda_2\varepsilon(\nu_3) - s_2\right] +$$
$$+ \nu_2 \left[\beta_1\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)\left(A_1 - A_2\right) + \lambda_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 B_2 g(\nu_3) + s_1\right] +$$
$$+ \beta_1\beta_2 g^2(\nu_3)\left(A_1 - A_2\right) + \left(\beta_2\lambda_1 - \beta_1\lambda_2\right)g(\nu_3) \tag{3.6}$$

Рассмотрим случай (2.12), (2.14), исключая производные $\dot{\omega}_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$, с учетом (2.6), представим уравнения (3.1)–(3.3) следующим образом:

$$\lambda_3(t) = \frac{1}{\omega_2}\Big[A_1\varepsilon_0 g_0\left(\beta_2\nu_3 - \beta_3\nu_2\right) + \left(A_2 - A_3\right)\omega_2\omega_3 + \omega_3\left(\lambda_2 - B_2\nu_2\right) +$$
$$+ \omega_2 B_3\nu_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + \left(C_3 - C_2\right)\nu_2\nu_3\Big] \tag{3.7}$$

$$\lambda_3(t) = \frac{1}{\omega_1}\Big[A_2\varepsilon_0 g_0\left(\beta_1\nu_3 - \beta_3\nu_1\right) + \left(A_1 - A_3\right)\omega_3\omega_1 + \omega_3\left(\lambda_1 - B_1\nu_1\right) +$$
$$+ \omega_1 B_3\nu_3 + s_1\nu_3 - s_3\nu_1 + \left(C_3 - C_1\right)\nu_3\nu_1\Big] \tag{3.8}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -A_3\varepsilon_0 g_0\left(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2\right) + \left(A_1 - A_2\right)\left[\varepsilon_0^2\nu_1\nu_2 + \varepsilon_0 g_0\left(\beta_2\nu_1 + \beta_1\nu_2\right) + \beta_1\beta_2 g_0^2\right] +$$
$$+ \left(\lambda_1 - B_1\nu_1\right)\left(\varepsilon_0\nu_2 + g_0\beta_2\right) - \left(\lambda_2 - B_2\nu_2\right)\left(\varepsilon_0\nu_1 + g_0\beta_1\right) + s_1\nu_2 -$$
$$- s_2\nu_1 + \left(C_2 - C_1\right)\nu_1\nu_2 \tag{3.9}$$

Из второго соотношения системы (2.2) следует

$$\lambda_3(t) = \frac{1}{\nu_3}\Big\{k_* - \nu_1^2\left(2\varepsilon_0 A_1 - B_1 + B_3\right) - \nu_2^2\left(2\varepsilon_0 A_2 - B_2 + B_3\right) - 2\varepsilon_0 A_3\nu_3^2 -$$
$$- 2\Big[\nu_1\left(\lambda_1 + \beta_1 g_0 A_1\right) + \nu_2\left(\lambda_2 + \beta_2 g_0 A_2\right) + \beta_3 g_0 A_3\nu_3\Big]\Big\}, \tag{3.10}$$

где $k_* = 2k_0 + B_3$. Исключим в (3.7), (3.8) функцию $\lambda_3(t)$:

$$\left(A_2 - A_1\right)\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\left[\varepsilon_0 g_0 A_1\left(\beta_2\nu_3 - \beta_3\nu_2\right) + s_2\nu_3 - s_3\nu_2\right] +$$
$$+ \omega_2\left[\varepsilon_0 g_0 A_2\left(\beta_3\nu_1 - \beta_1\nu_3\right) + s_3\nu_1 - s_1\nu_3\right] + \nu_3\left[\left(C_3 - C_2\right)\omega_1\nu_2 + \left(C_1 - C_3\right)\omega_2\nu_1\right] +$$
$$+ \omega_3\left[\omega_1\left(\lambda_2 - B_2\nu_2\right) - \omega_2\left(\lambda_1 - B_1\nu_1\right)\right] = 0 \tag{3.11}$$

Подставим в уравнение (3.11) ω_i из (2.12), ν_i $(i = \overline{1,3})$ из (2.14) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по ψ. Рассмотрим общий вид данного равенства:

$$\mathrm{D}a_2\left[\left(h_1 r_2 + h_2 r_1\right)\sin 3\psi + \left(h_2 r_2 - h_1 r_1\right)\cos 3\psi\right] + \ldots, \tag{3.12}$$

где

$$\mathrm{D} = \varepsilon_0^2\left(A_2 - A_1\right) + \varepsilon_0\left(B_1 - B_2\right) + \left(C_1 - C_2\right), \tag{3.13}$$

а многоточием обозначены члены, которые содержат тригонометрические функции меньших аргументов $(2\psi, \psi)$. В силу $a_2 \neq 0$, $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$, $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ (см. формулы (2.13)), из (3.12) следует $\mathrm{D} = 0$. На основании (3.13) найдем первое условие на параметры задачи

$$\varepsilon_0^2\left(A_2 - A_1\right) + \varepsilon_0(B_1 - B_2) + \left(C_1 - C_2\right) = 0 \tag{3.14}$$

Очевидно, что условие (3.14) имеет место и в случае $\beta_3 = 0$ [11], для которого справедливы формулы (2.15), (2.16). Как показано ниже, рассмотрение уравнения (3.14) носит вспомогательный характер. Но главным итогом такого подхода является получение условия (3.14), которое в значительной степени упрощает исследование уравнений (3.4)–(3.6) на решении (2.12), (2.14) с обозначениями (2.13).

Запишем уравнение (3.9) на ИС (2.14). Вначале введем обозначения

$$\begin{aligned} H_1 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_2 \left(A_1 - A_2 - A_3\right) - B_1 g_0 \beta_1 - \lambda_2 \varepsilon_0 - s_2 \\ H_2 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_1 \left(A_1 - A_2 + A_3\right) + B_2 g_0 \beta_2 + \lambda_1 \varepsilon_0 + s_1 \\ H_0 &= g_0 \left[\beta_1 \beta_2 g_0 \left(A_1 - A_2\right) + \lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1\right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

Тогда из (3.9) на основе указанного подхода и обозначений (3.15) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3(t) = \left(h_1 H_1 + r_1 H_2\right)\cos(g_0 t) + \left(h_2 H_1 + r_2 H_2\right)\sin(g_0 t) + \\ + \left(h_0 H_1 + r_0 H_2 + H_0\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

В силу ограниченности функции $\lambda_3(t)$ (см. формулы (2.11), (2.14), (3.7), (3.8)) из формулы (3.16) следует равенство $h_0 H_1 + r_0 H_2 + H_0 = 0$, или, в силу (2.13), (3.15), условие на параметры

$$\begin{aligned} c_0 \left\{g_0 \beta_1 \beta_2 \left[2\varepsilon_0 \left(A_1 - A_2\right) + B_2 - B_1\right] + \varepsilon_0 \left(\lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1\right) + s_1 \beta_2 - s_2 \beta_1\right\} + \\ + g_0 \left[g_0 \beta_1 \beta_2 \left(A_1 - A_2\right) + \lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Тогда из уравнения (3.16) получим

$$\lambda_3(t) = L_1 \sin\psi + L_2 \cos\psi + \lambda_0, \tag{3.18}$$

где λ_0 – постоянный параметр, а параметры L_1, L_2 имеют вид

$$L_1 = \frac{h_1 H_1 + r_1 H_2}{g_0}, \quad L_2 = -\frac{h_2 H_1 + r_2 H_2}{g_0} \tag{3.19}$$

Учтем в уравнениях (3.4), (3.5) равенства $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$, $g(\nu_3) = g_0$, функции $\nu_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ из (2.14) и для их преобразования воспользуемся условием (3.14). Введем обозначения

$$\begin{aligned} G_{23} &= C_3 - C_1 + \varepsilon_0^2 \left(A_1 - A_3\right) + \varepsilon_0 (B_3 - B_1) \\ G_2 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_3 \left(A_2 - A_1 - A_3\right) - s_3 - B_2 \beta_3 g_0 \\ R_1 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_3 \left(A_1 - A_2 - A_3\right) - s_3 - B_1 \beta_3 g_0 \\ G_3 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_2 \left(A_1 + A_2 - A_3\right) + s_2 + \varepsilon_0 \lambda_2 + \beta_2 g_0 B_3 \\ R_3 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_1 \left(A_1 + A_2 - A_3\right) + s_1 + \varepsilon_0 \lambda_1 + \beta_1 g_0 B_3 \\ G_0 &= \beta_3 g_0 \left[\lambda_2 + \beta_2 g_0 \left(A_2 - A_3\right)\right] \\ R_0 &= \beta_3 g_0 \left[\lambda_1 + \beta_1 g_0 \left(A_1 - A_3\right)\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Отметим, что при $\beta_3 = 0$ [11] первое, четвертое, пятое равенства из (3.20) не изменяются, а остальные равенства таковы:

$$G_2 = -s_3, \quad R_1 = -s_3, \quad G_0 = 0, \quad R_0 = 0 \tag{3.21}$$

Подставим в уравнения (3.4), (3.5) ИС (2.14) и учтем равенства $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$, $g(\nu_3) = g_0$ и значение $\lambda_3(\psi)$ из (3.18):

$$-\left(L_1 \sin\psi + L_2\cos\psi + \lambda_0\right)\left[\left(\varepsilon_0 r_0 + \beta_2 g_0\right) + \varepsilon_0\left(r_1\cos\psi + r_2\sin\psi\right)\right] + \\ + \left(r_0 + r_1\cos\psi + r_2\sin\psi\right)\left[G_{23}\left(a_0 + a_2\sin\psi\right) + G_2\right] + \\ + G_3\left(a_0 + a_2\sin\psi\right) + G_0 = 0 \tag{3.22}$$

$$-\left(L_1 \sin\psi + L_2\cos\psi + \lambda_0\right)\left[\left(\varepsilon_0 h_0 + \beta_1 g_0\right) + \varepsilon_0\left(h_1\cos\psi + h_2\sin\psi\right)\right] + \\ + \left(h_0 + h_1\cos\psi + h_2\sin\psi\right)\left[G_{23}\left(a_0 + a_2\sin\psi\right) + R_1\right] + \\ + R_3\left(a_0 + a_2\sin\psi\right) + R_0 = 0 \tag{3.23}$$

Рассмотрим равенство нулю коэффициентов при функции $\sin 2\psi$, которые следуют из (3.22), (3.23):

$$r_1\left(a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1\right) - \varepsilon_0 r_2 L_2 = 0, \quad h_1\left(a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1\right) - \varepsilon_0 h_2 L_2 = 0 \tag{3.24}$$

Из системы алгебраических уравнений (3.24) в силу $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$ находим (полагаем $\beta_3 \neq 0$)

$$L_2 = 0, \quad a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1 = 0 \tag{3.25}$$

Запишем первое равенство из (3.25) на основании (2.13), (3.15), (3.19)

$$\beta_3\left\{\beta_1\beta_2 g_0\left[2\varepsilon_0\left(A_1 - A_2\right) + B_2 - B_1\right] + s_1\beta_2 - s_2\beta_1 + \varepsilon_0\left(\beta_2\lambda_1 - \beta_1\lambda_2\right)\right\} = 0 \tag{3.26}$$

При выполнении условия (3.26) при $\beta_3 \neq 0$ равенство (3.17) упрощается:

$$g_0\beta_1\beta_2\left(A_1 - A_2\right) + \lambda_1\beta_2 - \lambda_2\beta_1 = 0 \tag{3.27}$$

Отметим, что при $\beta_3 = 0$, в силу $r_2 = 0$ и $h_2 = 0$, имеет место только второе условие из (3.25), то есть в этом случае L_2 из системы (3.19) также равно нулю. Из (3.19) находим

$$L_1 = \frac{\mu_0}{\kappa_0 g_0}\left\{\varepsilon_0 g_0\left[\beta_1^2\left(A_1 - A_2 - A_3\right) - \beta_2^2\left(A_1 - A_2 + A_3\right)\right] - \\ - g_0\left(B_1\beta_2^2 + B_2\beta_1^2\right) - s_1\beta_1 - s_2\beta_2 - \varepsilon_0\left(\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2\right)\right\} \tag{3.28}$$

С помощью значений a_2 из (2.13), G_{23} из (3.20) и L_1 из (3.28) равенство $a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1 = 0$ запишем в виде

$$g_0\left\{\kappa_0^2\left(C_3 - C_1\right) + \varepsilon_0^2\left[\beta_1^2\left(2A_1 - A_2\right) + \beta_2^2 A_2\right] + \varepsilon_0\left(B_1\beta_2^2 + B_2\beta_1^2\right)\right\} + \\ + \varepsilon_0\left[\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \varepsilon_0\left(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_2\right)\right] = 0 \tag{3.29}$$

Таким образом, равенство (3.29) является четвертым условием на параметры задачи (при $\beta_3 \neq 0$). Первые три условия – равенства (3.14), (3.26), (3.27). Если $\beta_3 = 0$, то условия существования – равенства (3.17), (3.29).

Рассмотрим уравнения (3.22), (3.23). Запишем равенство нулю коэффициентов при $\cos\psi$:

$$\lambda_0\varepsilon_0 - \left(G_2 + \frac{a_0\varepsilon_0}{a_2}L_1\right) = 0, \quad \lambda_0\varepsilon_0 - \left(R_1 + \frac{a_0\varepsilon_0}{a_2}L_1\right) = 0 \tag{3.30}$$

Вычитая левые части уравнений (3.30), получим

$$\beta_3\left[2\varepsilon_0\left(A_1 - A_2\right) + \left(B_2 - B_1\right)\right] = 0 \tag{3.31}$$

При $\beta_3 = 0$ из (3.31) имеем тождество, а из (3.30), в силу (2.13), (3.20), устанавливаем значение параметра λ_0:

$$\lambda_0 = -\frac{s_3}{\varepsilon_0} \tag{3.32}$$

В случае $\beta_3 \neq 0$ из (3.31) следует

$$2\varepsilon_0(A_1 - A_2) + (B_2 - B_1) = 0, \tag{3.33}$$

а из первого равенства системы (3.30) найдем

$$\begin{aligned}\lambda_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 g_0 \kappa_0^2}\Big\{&\kappa_0^2 g_0\left[\varepsilon_0 g_0\beta_3\left(A_2 - A_1 - A_3\right) - s_3 - B_2\beta_3 g_0\right] + \\ &+ \varepsilon_0 c_0\beta_3\Big[\varepsilon_0 g_0\left(\beta_1^2\left(A_1 - A_2 - A_3\right) - \beta_2^2\left(A_1 - A_2 + A_3\right) - \right. \\ &\left. - g_0\left(B_1\beta_2^2 + B_2\beta_1^2\right) - s_1\beta_1 - s_2\beta_2 - \varepsilon_0\left(\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2\right)\right)\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.34}$$

Условие (3.33) позволяет упростить равенство (3.26)

$$s_1\beta_2 - s_2\beta_1 + \varepsilon_0\left(\lambda_1\beta_2 - \lambda_2\beta_1\right) = 0 \tag{3.35}$$

Запишем равенство нулю коэффициентов при $\sin\psi$ и свободных членах в уравнениях (3.22), (3.23):

$$\beta_2 g_0 L_1 - a_2 G_3 = 0, \quad \beta_1 g_0 L_1 - a_2 R_3 = 0 \tag{3.36}$$

$$\lambda_0\beta_2 g_0 - a_0 G_3 - G_0 = 0, \quad \lambda_0\beta_1 g_0 L_1 - a_0 R_3 - R_0 = 0 \tag{3.37}$$

На основании обозначений (2.13), (3.20), (3.28) из уравнений (3.36) устанавливаем условие (3.35) и равенство

$$\begin{aligned}&g_0\left[2\varepsilon_0\left(\beta_1^2 A_1 + \beta_2^2 A_2\right) + \beta_1^2\left(B_2 + B_3\right) + \beta_2^2\left(B_1 + B_3\right)\right] + \\ &\quad + 2\left[s_1\beta_1 + s_2\beta_2 + \varepsilon_0\left(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{3.38}$$

Из уравнений (3.37) в результате линейной комбинации получим

$$\beta_3\left[\beta_1\beta_2 g_0\left(A_2 - A_1\right) + \lambda_2\beta_1 - \lambda_1\beta_2\right] = 0 \tag{3.39}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{g_0\kappa_0^2}\left[a_0\left(\beta_2 G_3 + \beta_1 R_3\right) + \beta_2 G_0 + \beta_1 R_0\right] \tag{3.40}$$

Отметим, что при $\beta_3 = 0$ из (3.39) имеем тождество, а из уравнения (3.40), в силу $a_0 = 0$, $G_0 = 0$, $R_0 = 0$, находим $\lambda_0 = 0$. Тогда из равенства (3.32) устанавливаем условие

$$s_3 = 0 \tag{3.41}$$

Если в (3.39) $\beta_3 \neq 0$, то получим условие (3.27).

Распишем значение λ_0 из (3.40), используя значения a_0 из (2.13), G_3, R_3, G_0, R_0 из (3.20):

$$\lambda_0 = \frac{\beta_3}{g_0\varkappa_0^2}\Big\{c_0\Big[\varepsilon_0 g_0\varkappa_0^2\Big(A_1 + A_2 - A_3\Big) + g_0\varkappa_0^2 B_3 + s_1\beta_1 + s_2\beta_2 + \varepsilon_0\Big(\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2\Big)\Big] + \\ + g_0\Big[\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + g_0\beta_2^2\Big(A_2 - A_3\Big) + g_0\beta_1^2\Big(A_1 - A_3\Big)\Big]\Big\} \tag{3.42}$$

Приравняем правые части равенств (3.34) и (3.42):

$$s_3 = \frac{\beta_3}{\varkappa_0^2}\Big\{\varepsilon_0 g_0\Big[\beta_1^2\Big(A_2 - 2A_1\Big) - \beta_2^2 A_1\Big] - \varkappa_0^2 g_0 B_2 - \varepsilon_0\Big(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2\Big)\Big\} \tag{3.43}$$

Перечислим все условия существования решения (2.12), (2.14) уравнений (2.1) при $\beta_3 \neq 0$: (3.14), (3.25), (3.27), (3.29), (3.33), (3.35), (3.37), (3.38), (3.43). Для удобства исследования запишем их вместе (кроме равенства (3.43))

$$\varepsilon_0^2\Big(A_2 - A_1\Big) + \varepsilon_0(B_1 - B_2) + C_1 - C_2 = 0 \tag{3.44}$$

$$s_1\beta_2 - s_2\beta_1 + \varepsilon_0\Big(\beta_2\lambda_1 - \beta_1\lambda_2\Big) = 0 \tag{3.45}$$

$$\beta_1\beta_2 g_0\Big(A_1 - A_2\Big) + \lambda_1\beta_2 - \lambda_2\beta_1 = 0, \quad 2\varepsilon_0\Big(A_1 - A_2\Big) + B_2 - B_1 = 0 \tag{3.46}$$

$$g_0\Big[2\varepsilon_0\Big(\beta_1^2 A_2 + \beta_2^2 A_1\Big) + \beta_1^2(B_2 + B_3) + \beta_2^2(B_1 + B_3)\Big] + \\ + 2\Big[s_1\beta_1 + s_2\beta_2 + \varepsilon_0\Big(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2\Big)\Big] = 0 \tag{3.47}$$

$$g_0\Big\{\varkappa_0^2\Big(C_3 - C_1\Big) + \varepsilon_0^2\Big[\beta_1^2\Big(2A_1 - A_2\Big) + \beta_2^2 A_2\Big] + \varepsilon_0\Big(\beta_1^2 B_2 + \beta_2^2 B_1\Big)\Big\} + \\ + \varepsilon_0\Big[\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \varepsilon_0\Big(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_2\Big)\Big] = 0 \tag{3.48}$$

Для сравнения результатов, полученных в данной статье, приведем условия [11], найденные при $\beta_3 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Условие (3.44) сохраняется, условие (3.45) преобразуется к виду

$$s_1\beta_2 - s_2\beta_1 = 0, \tag{3.49}$$

а параметры s_3 и λ_0 равны нулю. Условия (3.46) необходимо опустить. Равенство (3.17) принимает вид

$$c_0\beta_1\beta_2\Big[2\varepsilon_0\Big(A_1 - A_2\Big) + B_2 - B_1\Big] + g_0\beta_1\beta_2\Big(A_1 - A_2\Big) = 0 \tag{3.50}$$

В равенствах (3.47), (3.48) необходимо положить $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Функция $\lambda_3(\psi)$ при $L_2 = 0$ имеет вид

$$\lambda_3(\psi) = L_1 \sin\psi, \tag{3.51}$$

а в случае (3.43)–(3.48) она такова

$$\lambda_3(\psi) = L_1 \sin\psi + \lambda_0 \tag{3.52}$$

4. Анализ условий (3.43)–(3.48). *Случай 1.* Положим, что выполняются равенства

$$\beta_2\lambda_1 - \beta_1\lambda_2 = 0, \quad \beta_2 s_1 - \beta_1 s_2 = 0 \tag{4.1}$$

Введем параметры l_1 и l_2 по формулам

$$\lambda_1 = \beta_1 l_1, \quad \lambda_2 = \beta_2 l_1, \quad s_1 = \beta_1 l_2, \quad s_2 = \beta_2 l_2 \tag{4.2}$$

В силу (4.1) уравнение (3.45) становится тождеством. Из системы (3.46) и уравнения (3.44) получим

$$A_2 = A_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1 \tag{4.3}$$

На основании условий (4.2), (4.3) из (3.43), (3.47), (3.48) установим окончательные условия

$$\begin{gathered} s_3 = -\beta_3\left[g_0\left(A_1\varepsilon_0 + B_1\right) + \varepsilon_0 l_1\right], \quad g_0 = -\frac{2\left(\varepsilon_0 l_1 + l_2\right)}{2\varepsilon_0 A_1 + B_1 + B_3} \\ g_0\left[\varepsilon_0\left(\varepsilon_0 A_1 + B_1\right) + C_3 - C_1\right] + \varepsilon_0\left(\varepsilon_0 l_1 + l_2\right) = 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

При наличии равенств (4.2)–(4.4) параметр λ_0 из (3.42) примет вид

$$\lambda_0 = \frac{\beta_3}{g_0}\left\{c_0\left[g_0\left(\varepsilon_0\left(2A_1 - A_3\right) + B_3\right) + l_2 + \varepsilon_0 l_1\right] + g_0\left(A_1 - A_2\right)\right\} \tag{4.5}$$

Из формулы (3.28) следует

$$L_1 = -\frac{\mu_0\kappa_0}{g_0}\left[g_0\left(\varepsilon_0 A_3 + B_1\right) + l_2 + \varepsilon_0 l_1\right] \tag{4.6}$$

То есть в формуле (3.52) параметры λ_0, L_1 имеют значения (4.5), (4.6). Из условий (4.1) следует, что векторы, которые являются проекциями векторов $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{s}$, коллинеарны друг другу и лежат в плоскости равных главных моментов инерции, то есть векторы $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{s}$ принадлежат этой плоскости.

Общий случай. Очевидно, что в этом случае выполняется условие $A_2 \neq A_1$. Данное ограничение позволяет из уравнения (3.44) и второго уравнения из (3.46) определить значение параметра ε_0 и условие на параметры, характеризующие матрицы A, B, C:

$$\varepsilon_0 = -\frac{B_1 - B_2}{2\left(A_1 - A_2\right)}, \quad \left(B_1 - B_2\right)^2 - 4\left(A_1 - A_2\right)\left(C_2 - C_1\right) = 0 \tag{4.7}$$

Уравнение (3.45) параметризуем следующим образом:

$$s_1 = \beta_2 d_0 - \varepsilon_0\lambda_1, \quad s_2 = \beta_1 d_0 - \varepsilon_0\lambda_2, \tag{4.8}$$

где d_0 – параметр. Из первого уравнения системы (3.46) найдем значение g_0:

$$g_0 = \frac{\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1}{\beta_1\beta_2\left(A_1 - A_2\right)} \tag{4.9}$$

Равенства (4.8), в силу (4.7), (4.9), можно применять для нахождения параметра d_0:

$$d_0 = \frac{\kappa_0^2\left(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1\right)}{4\beta_1\beta_2\left(A_2 - A_1\right)}\left[A_1\left(B_1 + B_3\right) - A_2\left(B_2 + B_3\right)\right] \tag{4.10}$$

Если проведем анализ равенств (4.7)–(4.10), то приходим к выводу о том, что они не содержат параметры β_3 и c_0. Поэтому условие (3.43), в силу (4.7)–(4.10), можно использовать для определения этого параметра через параметры уравнений движения гиростата и параметры β_1, β_2. Выписывать значение β_3 нецелесообразно, так как окончательный результат имеет достаточно громоздкий вид. Уравнение (3.48) можно интерпретировать как условие на C_1 и C_3.

Рассмотрим значение параметра λ_0 из равенства (3.42). Очевидно, что он зависит от уже найденных значений (3.47)–(3.50) и параметра β_3, а также от постоянной c_0, которая характеризует ИС из (2.11). То есть в построенном решении (2.12), (2.14) уравнений (2.1) параметр c_0 можно считать произвольной постоянной, то есть данное ИС является первым интегралом уравнения Пуассона из (2.1). Функция $\lambda_3(\psi)$ и в общем случае имеет вид (3.52), а значения параметров L_1 и λ_0 выражаются по формулам (4.5), (4.6).

Рассмотрим уравнения (2.3). Подставим в них функцию (3.52):

$$L(t) = L_1 g_0 \cos(g_0 t) \tag{4.11}$$

$$\dot{\kappa}(t) = \frac{1}{\mathrm{D}_3}\left[\left(L_1 - a_2\varepsilon_0\mathrm{D}_3\right)\sin\left(\beta_0 g_0 t\right) - a_0\varepsilon_0\mathrm{D}_3 g_0\beta_3\right] \tag{4.12}$$

Из формулы (4.11) определяется проекция сил и моментов, действующих на ротор S_3 со стороны тела-носителя. Соотношение (4.12) служит для нахождения скорости вращения этого ротора. Таким образом, уравнения (2.1) проинтегрированы на решении (2.12), (2.14).

Заключение. Установлено новое решение уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которое описывает регулярную прецессию гиростата с переменным гиростатическим моментом. Оно получено при более общих условиях, чем решение в [11]. В силу этого в данной статье проведен сравнительный анализ указанных решений, что позволило упростить и получение решения [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomson W.* On the motion of rigid sonds in a liquid circulating irrotationally throngh perforations in them or in any fixed solid // Proc. Roy Soc. Edinburg. 1872. V. 7. P. 668–674.
2. *Gray A.A.* Treatise on Gurostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. New York: Repr. by Dover Publ., 1959. 530 p.
3. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 1. М., 1949. С. 31–152.
4. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат., мех. 1970. № 2. С. 83–96.
5. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
6. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
7. *Kane T.R., Fowler R.C.* Equivalence of two gyrostatic stability problems // J. Appl. Mech. 1970. V. 37 (4). P. 1146–1147.
8. *Roberson R.E.* The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // J. Appl. Mech. 1971. V. 38 (3). P. 707–708.
9. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Движение системы соосных тел переменной массы // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 999–1009.
10. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: Изд-е ГУ "Институт прикладной математики и механики", 2017. 250 с.
11. *Горр Г.В., Белоконь Т.В.* О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 2. С. 139–151.

12. *Горр Г.В.* Об одном подходе в исследовании движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 1–14.
13. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х тт. Т. 2., ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
14. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 15–24.
15. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2017. 421 с.
16. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26. fasc. 3–4. P. 271–281.
17. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 394 с.
18. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
19. *Горр Г.В., Балаклицкая Т.В.* О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. Вып. 49. С. 55–65.
20. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rötation Korpers in einer Flüssigkeit // J. für die reine und angew. Math. 1870. 71. S. 237–262.
21. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // J. Mèc. Thèor. Appl. 1986. V. 5. № 5. P. 755–762.
22. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: 1893. 234 с.
23. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // ПМТФ. 1963. № 4. С. 17–29.
24. *Горр Г.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // ПММ. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214.
25. *Gorr G.V.* On Three Invariant of the Equations of Motion of a Body in a Potential Field of Force // Mech. Solids. 2019. V. 54. Suppl. 2. P. S104–S114.

Precessions of a Gyrostat under the Action of Potential and Gyroscopic Forces in the Case of a Variable Gyrostatic Momentum

G. V. Gorr[a,#] and A. V. Maznev[a,##]

[a] *State Budgetery Institution “Institute of Applied Mathematics and Mechanics”, Donetsk, DPR*
[#] *e-mail: gvgorr@gmail.com*
[##] *e-mail: aleksandr_maznev@rambler.ru*

A new method for investigations of gyrostat precessions under the action of potential and gyroscopic forces in the case of a variable gyrostatic momentum is presented. The solution of Kirchhoff–Poisson equations, which describes the regular precessions of the gyrostat about the symmetry axis of the force fields, is constructed.

Keywords: gyrostat, gyrostatic momentum, potential and gyroscopic forces, precessions

REFERENCES

1. *Thomson W.* On the motion of rigid sonds in a liquid circulating irrotationally throngh perforations in them or in any fixed solid // Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1872, no. 7, P. 668–674.
2. *Gray A.A.* Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. N.Y.: Repr. by Dover Publ., 1959. 530 p.
3. *Zhukovsky N.E.* On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous dropping liquid // in: Coll. works. Vol. 1. Moscow: 1949. P. 31–152. (in Russian)
4. *Rumyantsev V.V.* About orientation control and satellite stabilization by rotors // Moscow Univ. Bull. Ser. Math., Mech., 1970, iss. 2, pp. 83–96. (in Russian)

5. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Moscow: Mir, 1980. 292 p. (in Russian)

6. *Kharlamov P.V.* On the equations of motion of a system of solids // Mech. Rigid Body, 1972, vol. 4, pp. 52–73. (in Russian)

7. *Kane T.R., Fowler R.C.* Equivalence of two gyrostatic stability problems // JAMM, 1970, vol. 37 (4), pp. 1146–1147.

8. *Roberson R.E.* The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // JAMM, 1971, vol. 38 (3), pp. 707–708.

9. *Aslanov V.S., Doroshin A.V.* The motion of a system of coaxial bodies of variable mass // JAMM, 2004, vol. 68, iss. 6, pp. 999–100. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.11.012

10. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* The Movement of the Gyrostat with a Variable Gyrostatic Moment. Donetsk: Gov. Inst. “Institute of Applied Mathematics and Mechanics”, 2017. 250 p. (in Russian)

11. *Gorr G.V., Belokon T.V.* On solutions of equations of motion of a gyrostat with variable gyrostatic moment // JAMM, 2021, vol. 85, iss. 2, pp. 139–151.

12. *Gorr G.V.* An approach in studying gyrostat motionwith variable gyrostatic moment // Vestn. Udmurt. univ. Matem. Mekh. Komp’ut. Nauki, 2021, vol. 31, iss. 1. pp. 1–14.

13. *Levy-Civita T., Amaldi W.* Course in Theoretical Mechanics. 2 vols, Vol. 2, Pt. 2. Moscow: Inostr. Lit., 1951. 555 p. (in Russian)

14. *Kharlamov P.V.* On invariant relations of a system of differential equations // Mech. Rigid Body, 1974, iss. 6, pp. 15–24. (in Russian)

15. *Gorr G.V.* Invariant Relations of Equations of Rigid Body Dynamics (Theory, Results, Comments). Moscow; Izevsk: Inst. for Comput. Res., 2017. 421 c. (in Russian)

16. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. di matem. pura ed appl., 1947, ser. 4, vol. 24, fasc. 3–4, pp. 271–281.

17. *Gorr G.V., Maznev A.V.* The Dynamics of a Gyrostat Having a Fixed Point. Donetsk: Donetsk Nat. Univ., 2010. 364 p. (in Russian)

18. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Naukiva Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)

19. *Gorr G.V., Balaklitskaya T.V.* On motion of the principal axes of inertia of a rigid body, having a fixed point, in the case of precession relative to the vertical // Mech. Rigid Body, 2019, vol. 49, pp. 55–65.

20. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit // J. für die reine und angew. Math., 1870, Bd. 71. S. 237–262.

21. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // J. Mecan. Theor. Appl., 1986, vol. 5, no. 5, pp. 755–762.

22. *Steklov V.A.* On Motion of a Solid Body in the Liquid. Kharkov: 1893. 234 p. (in Russian)

23. *Kharlamov P.V.* On motion in the fluid of a body bounded by a multiply connected surface // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 1963, no. 4, pp. 17–29. (in Russian)

24. *Gorr G.V.* On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force // JAMM, 2019, vol. 83, iss. 2, pp. 202–214. (in Russian)

25. *Gorr G.V.* On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force // Mech. Solids, 2019, vol. 54, Suppl. 2. pp. S104–S114.