

---

---

УДК 532.59: 534.2: 537.2

## НЕЛИНЕЙНЫЕ МОНОПОЛЬНОЕ И ДИПОЛЬНОЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ СЛАБО ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2022 г. А. И. Григорьев<sup>1,\*</sup>, Н. Ю. Колбнева<sup>2,\*\*</sup>, С. О. Ширяева<sup>2,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

\*e-mail: grigorai@mail.ru

\*\*e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

\*\*\*e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 15.06.2022 г.

После доработки 08.08.2022 г.

Принята к публикации 12.08.2022 г.

В асимптотических расчетах второго порядка малости по малой безразмерной амплитуде осцилляций каплей естественного происхождения в материальной среде во внутриоблачном или приземном электрическом поле показывается, что среди прочих мод возбуждаются нулевая и первая моды осцилляций капли, не имеющие места в расчетах первого порядка малости. Рассчитывается интенсивность акустического излучения от них. Расчеты проводятся на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости.

Показано, что интенсивность монопольного акустического излучения от капли на шесть порядков более интенсивно, чем дипольного. Интенсивность монопольного излучения в используемом квадратичном по безразмерной амплитуде осцилляций приближении не зависит от радиуса капли и напряженности внешнего электростатического поля, интенсивность дипольного излучения от радиуса капли зависит существенно. Зависимость от напряженности внешнего электростатического поля появляется лишь в третьем порядке малости. Акустическое излучение от осциллирующих дождевых капель идет в слышимом диапазоне частот, а от облачных капель и капель тумана – в ультразвуковом диапазоне. Временная зависимость акустического излучения как монопольного так и дипольного от капли при начальном возбуждении конечного отрезка сплошного спектра мод имеет вид биений.

*Ключевые слова:* нелинейно осциллирующая капля, электростатическое поле, монопольное и дипольное акустические излучения

DOI: 10.31857/S0032823522060066

Известно [1–3], что осциллирующий конечный объем жидкости будет излучать акустические волны. Сказанное относится и к жидко-капельным аэрозолям естественного происхождения: туманам, облакам, дождям. В связи с изучением таких геофизических объектов [4–6] представляется актуальным провести исследование зависимости интенсивности акустического излучения от такого аэрозоля и его частоты от номера осциллирующей моды, и физико-химических характеристик среды.

При расчетах в первом порядке приближений по безразмерной амплитуде осцилляций центрально симметричная (нулевая) и трансляционная (первая) моды выпадают из рассмотрения в силу необходимости сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс [2]. Нулевая и первая моды появляются в спектре возбужденных мод

только в асимптотических расчетах более высоких порядков малости, чем первый, причем, трансляционная мода возбуждается лишь тогда, когда в спектре изначально возбужденных мод имеются две или больше с последовательными номерами [7]. Представляется интересным сравнить между собой интенсивности и частоты монопольного и дипольного излучений, а также сравнить их с общей интенсивностью акустического излучения, получаемого в линейных расчетах.

**1. Физическая постановка задачи.** Все исследование проведем на простейшем примере неподвижной слабо заряженной сферической капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости радиуса  $R$ , осциллирующей во внешнем однородном электростатическом поле напряженностью  $E_0$ . Обозначим плотность жидкости  $\rho_1$ , а коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред –  $\sigma$ . Внешнюю среду примем идеальной сжимаемой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ex}$  и плотностью  $\rho_2$ , в которой звук распространяется со скоростью  $v$ . В дальнейших рассуждениях малым зарядом капли будем пренебрегать (он нужен только для того чтобы обеспечить неподвижность капли).

Согласно экспериментальным данным [8] капля, помещенная в электрическое поле, вытягивается в сфероид, ориентированный осью симметрии  $z$  в направлении напряженности электрического поля  $E_0$ . Полагая центр масс капли неподвижным, найдем, что в вакууме [9]  $e^2 = 9E_0^2 R / 16\pi\sigma \equiv 9w$ , где  $e$  – эксцентриситет капли, а  $w$  – безразмерный параметр Тейлора, характеризующий устойчивость капли по отношению к индуцированному заряду [8]. Так как сфероидальность равновесной формы капли определяется наличием внешнего электростатического поля, будем считать  $E_0 \sim e$ .

В настоящей задаче, чтобы избежать рассмотрения нескольких крайних ситуаций, напряженность поля примем равной  $E_0 = 0.17$  СГСЭ, которая может реализоваться и в приземном слое и внутри облака. Размеры капель в туманах, облаках и в дожде изменяются от единиц микрон до долей миллиметра. В итоге, беря максимальное значение радиуса дождевой капли  $R = 3.5$  мм, найдем, что  $e^2$  во всех ситуациях будет меньше  $\approx 2 \times 10^{-5}$ , т.е. будет малым параметром.

Все расчеты задачи проведем в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , начало которой поместим в центре масс капли. Полярный угол  $\theta$  будем отсчитывать от направления вектора  $E_0$ . Для упрощения расчетов задачи ограничимся осесимметричной постановкой.

Из-за теплового движения молекул жидкости поверхность капли возмущается осцилляциями весьма малой амплитуды  $|\xi| \sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ , где  $\kappa$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура [10]. В результате капиллярного волнового движения создается искажение  $\xi(\theta, t)$  равновесной сфероидальной формы поверхности капли. При комнатных температурах для любых жидкостей величина тепловой амплитуды  $|\xi|$  составляет не более  $1 \times 10^{-8}$  см. Тогда для капель реальных жидкостей естественного происхождения (дождь, облака, туманы) с характерными размерами  $R > 1$   $\mu$ м амплитуда осцилляций много меньше радиуса:  $|\xi| \ll R$ . Однако при наличии внешних неконтролируемых силовых воздействий (коагуляция, дробление, лобовое сопротивление, трение о воздух и т.п.) амплитуда осцилляций может быть увеличена [11, 12]. В этой связи введем второй малый параметр  $\epsilon \sim e$ .

**2. Математическая формулировка задачи.** Форму капли как в начальный, так и во все последующие моменты времени будем считать осесимметричной. Уравнение возмущенной поверхности капли в любой момент можно записать в виде:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad (2.1)$$

где  $r(\theta)$  — функция, описывающая равновесную сфероидальную форму капли. В качестве второго малого параметра примем величину отношения амплитуды осцилляций к радиусу капли  $\varepsilon \equiv \max |\xi(\theta, t)|/R \ll 1$ , т.е. безразмерную амплитуду осцилляций. Величину  $\varepsilon$  определим ниже, исходя из требования асимптотичности необходимых разложений.

Волновые движения в капле и в сжимаемой окружающей среде будут потенциальными с потенциалами скоростей  $\psi_m(r, \theta, t)$ :  $\mathbf{V}_m(r, \theta, t) = \nabla \psi_m(r, \theta, t)$ , где  $\mathbf{V}_m(r, \theta, t)$  — поле скоростей внутри ( $m = 1$ ) и вне капли ( $m = 2$ ) [2].

Математическая формулировка задачи о расчете спектра капиллярных осцилляций незаряженной капли, нелинейно осциллирующей во внешнем электростатическом поле имеет вид:

$$\Delta \psi_1(r, \theta, t) = 0, \quad \Delta \Phi(r, \theta, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi_2(r, \theta, t) = 0 \quad (2.3)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi(r, \theta, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad (2.4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta} \left( \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right) \quad (2.5)$$

$$P_1(r, \theta, t) - P_2(r, \theta, t) + P_E(r, \theta, t) - P_\sigma(r, \theta, t) = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t) \quad (2.7)$$

Поведение гидродинамического потенциала внешней среды  $\psi_2(r, \theta, t)$  на бесконечности описывается условием излучения Зоммерфельда [3]:

$$r \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik \psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.8)$$

Кроме того, потребуем выполнения дополнительных интегральных условий: неизменности полного объема, отсутствия движения центра масс осциллирующей капли и равенства нулю ее суммарного заряда:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0 \quad (2.9)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi], \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали к возмущенной поверхности капли:  $F(r, \theta, t) = r - r(\theta, t)$ , рассчитывается на поверхности капли по формуле  $\mathbf{n} = \nabla F/|\nabla F|$ .

Рассматривая случай многомодовой начальной деформации равновесной сфероидальной формы (см., напр., [7]), начальные условия сформулируем в виде начального возмущения, определяемого суперпозицией произвольного числа колебательных мод, и равенства нулю скорости всех точек на поверхности капли:

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = R \left( \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu) \right), \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0, \quad \sum_{j \in \Xi} h_j = 1, \quad (2.11)$$

где  $\Xi$  — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод осциллирующей капли;  $P_j(\mu)$  — полином Лежандра  $j$ -го порядка;  $j$  — целое число,  $\mu \equiv \cos \theta$ ;  $h_j$  — константа, учитывающая парциальный вклад  $j$ -й колебательной моды

в начальное искажение капли;  $\xi_0$  и  $\xi_1$  – константы, определяемые из интегральных условий (2.9) в начальный момент времени, имеющие смысл амплитуд нулевой и первой мод:

$$\xi_0 \equiv \varepsilon^2 \xi_{00} \approx -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^2}{(2j+1)} + O(\varepsilon^3), \quad \xi_1 \equiv \varepsilon^2 \xi_{10} \approx -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} + O(\varepsilon^3),$$

где  $o$  и  $O$  – символы порядка [13].

В приведенной постановке задачи (2.2)–(2.10):  $\Phi_s(t)$  – постоянное значение электрического потенциала вдоль поверхности капли;  $k = \frac{\omega_n}{v}$  – волновое число;  $P_{0m}$  – давления внутренней ( $m = 1$ ) и внешней ( $m = 2$ ) сред в равновесном состоянии;  $P_E = \frac{\varepsilon_{ex} (\nabla \Phi)^2}{8\pi}$  – давление электрического поля;  $P_\sigma = \sigma H$  – давление капиллярных сил,  $H$  – средняя кривизна возмущенной поверхности капли в данной точке;  $P_1 = P_{01} - \rho_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_1 (\nabla \Psi_1)^2$  – давление внутри капли;  $P_2 = P_{02} - \rho_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \Psi_2)^2 + \frac{\rho_2}{2v^2} \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right)^2$  – давление во внешней среде.

В уравнениях (2.2), (2.4), (2.7), (2.10) принято, что электрическое поле в окружающем каплю пространстве определяется электростатическим потенциалом  $\Phi(r, \theta, t)$ , связанным с напряженностью поля  $\mathbf{E}$  соотношением:  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi(r, \theta, t)$ .

Моделируя каплю проводником, получим, что характерное время перераспределения индуцированных внешним электрическим полем зарядов много меньше характерного гидродинамического времени осцилляций поверхности капли:

$$\frac{\varepsilon_{in}}{4\pi\chi} \ll \left( \frac{R^3 \rho_1}{\sigma} \right)^{1/2},$$

где  $\varepsilon_{in}$  – диэлектрическая проницаемость жидкой капли,  $\chi$  – удельная электропроводность жидкости. Принимая для оценки характеристики дождевой капли  $R = 0.25$  см,  $\rho_1 = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\sigma = 73$  дин/см,  $\varepsilon_{in} = 80$ ,  $\chi = 9 \times 10^6$  СГСЭ, получим, что время релаксации индуцированного заряда в жидкости меньше гидродинамического времени на четыре порядка величины.

Принимая во внимание, что составляющие гидродинамических потенциалов поля скоростей внутри и вне капли  $\psi_1^{(k)}(r, \theta, t)$ ,  $\psi_2^{(k)}(r, \theta, t)$  ( $k = 1, 2$ ) являются периодически функциями по времени  $\psi_m^{(k)}(r, \theta, t) \sim \exp(i\omega_n t)$  ( $m = 1, 2$ ), получим, что волновое уравнение (2.3) для  $\psi_2^{(k)}(r, \theta, t)$  примет вид однородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \psi_2^{(k)}(r, \theta, t) + k^2 \psi_2^{(k)}(r, \theta, t) = 0 \tag{2.12}$$

**3. Асимптотические разложения функций.** Для отыскания решения сформулированной задачи с точностью до слагаемых второго порядка малости по  $\varepsilon$  воспользуемся классическими методами теории возмущений [13]. В рамках метода многих масштабов перейдем от единственного времени  $t$  к его различным масштабам, выраженным через малый параметр  $\varepsilon$  в виде:  $T_m = \varepsilon^m t$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Искомые величины  $\xi(\theta, t)$ ,  $\psi_m(r, \theta, t)$ ,  $\Phi(r, \theta, t)$ , а также давления  $P_m(r, \theta, t)$ ,  $P_E(r, \theta, t)$ ,  $P_\sigma$  в динамическом

граничном условии (2.6), представим в виде зависимостей от двух временных масштабов  $T_0$ ,  $T_1$  и запишем их в виде асимптотических разложений по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\xi(\theta, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^3) \\ \psi_m(r, \theta, t) &= \varepsilon \psi_m^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \psi_m^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3) \quad (m = 1, 2) \\ \Phi(r, \theta, t) &= \varepsilon \left( \Phi^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0) \right) + O(\varepsilon^3) \\ P_m(r, \theta, t) &= P_m^{(eq)}(r, \theta) + \varepsilon P_m^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P_m^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3) \\ P_E(r, \theta, t) &= P_E^{(eq)}(r, \theta) + \varepsilon P_E^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P_E^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3) \\ P_\sigma(r, \theta, t) &= P_\sigma^{(eq)}(r, \theta) + \varepsilon P_\sigma^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P_\sigma^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3),\end{aligned}\tag{3.1}$$

где индекс “eq” относится к величинам, определяющим равновесное состояние капли. Здесь электрический потенциал  $\Phi(r, \theta, t)$  имеет асимптотическое разложение по целым степеням малого параметра  $\varepsilon$ , так как  $E_0 \sim e \sim \varepsilon$ . В данных разложениях  $\varepsilon \Phi^{(0)}(r, \theta) \equiv \Phi^{(eq)}(r, \theta)$  описывает потенциал электростатического поля в окрестности равновесной капли, а компонента  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$  является поправкой к электрическому потенциалу, связанному с возмущением поверхности капли.

Для удобства дальнейших разложений целесообразно ввести формальный параметр  $\beta_E \sim 1$ , определяемый соотношением:  $E_0 = \beta_E \varepsilon$ . В окончательных выражениях можно легко перейти к  $E_0$ , если положить  $\beta_E \varepsilon = E_0$ .

При переходе к переменным  $T_0$ ,  $T_1$  в уравнениях (2.5), (2.6), (2.11) производные по времени вычисляются следующим образом [13]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3)\tag{3.2}$$

Поправки волнового возмущения  $\xi^{(k)}(r, \theta, t)$  ( $k = 1, 2$ ) к форме поверхности капли запишем в виде ряда по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$\xi^{(k)}(\theta, t) = R \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(k)}(\theta, T_0, T_1) P_n(\mu)\tag{3.3}$$

Решения уравнений Лапласа (2.2) для поправок к гидродинамическому и электростатическому потенциалам  $\psi_1^{(k)}(r, \theta, t)$  ( $k = 1, 2$ ),  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$  при выполнении условий ограниченности (2.4) имеют вид:

$$\psi_1^{(k)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)}(r, \theta, T_0, T_1) r^n P_n(\mu)\tag{3.4}$$

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) r^{-(n+1)} P_n(\mu)\tag{3.5}$$

Решение уравнения Гельмгольца (2.12) при выполнении условия излучения Зоммерфельда (2.8) представляется в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\psi_2^{(k)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(r, \theta, T_0, T_1) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu),\tag{3.6}$$

где  $h_n^{(2)}(z)$  – сферическая функция Бесселя третьего рода [14].

**4. Разложение равновесного состояния.** Учтем, что наша задача содержит два малых параметра:  $e^2$  и  $\varepsilon$ , величины которых находятся в соотношении  $\varepsilon \sim e$ . Будем учитывать это обстоятельство в нижеследующих разложениях.

Подставляя разложения (3.1) в уравнения (2.2)–(2.10), проведем анализ равновесного состояния системы.

Чтобы найти потенциал  $\Phi^{(eq)}(r, \theta)$  в явном виде, сформулируем краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^{(eq)}(r, \theta) &= 0 \\ r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(eq)}(r, \theta) &\rightarrow -\varepsilon\beta_E r \cos \theta, \quad r = r(\theta): \quad \Phi^{(eq)}(r, \theta) = \text{const}, \\ \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}_0(r, \theta), \nabla\Phi^{(eq)}(r, \theta)) dS &= 0, \quad S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}_0$  – вектор единичной нормали к невозмущенной равновесной поверхности капли. Решение сформулированной задачи имеет вид:

$$\Phi^{(eq)}(r, \theta) = \varepsilon\beta_E r \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) P_1(\mu) \tag{4.1}$$

Уравнение равновесной формы капли с осью симметрии  $z$ , направленной коллинеарно электростатическому полю, можем записать в виде:

$$r(\theta) = R + h(\theta) \tag{4.2}$$

Функцию  $h(\theta)$ , учитывающую отклонение от сферической формы капли, представим в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$h(\theta) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu); \quad \mu = \cos \theta, \quad |h(\theta)| \ll 1, \tag{4.3}$$

где  $P_n(\mu)$  – осесимметричный полином Лежандра  $n$ -го порядка [14]. Ограничение нижнего индекса суммирования  $n$  определяется удовлетворением условий постоянства объема капли и отсутствия ее трансляционного движения.

В уравнении (4.3) амплитуды отдельных мод  $\alpha_n$  ( $n \geq 2$ ) будем искать в явном виде из условия (2.6) для равновесного состояния системы:

$$\Delta P + P_E^{(eq)} - P_\sigma^{(eq)} = 0, \quad \Delta P = P_1 - P_2; \quad P_E^{(eq)} = \frac{\varepsilon_{ex} (\nabla\Phi^{(eq)})^2}{8\pi}, \quad P_\sigma^{(eq)} = \sigma H_0, \tag{4.4}$$

где  $H_0$  – средняя кривизна равновесной, невозмущенной капиллярным волновым движением поверхности капли в данной точке.

Подставляя (4.1), (4.3) в (4.4), из баланса давлений в произвольной точке равновесной поверхности капли:

$$\Delta P + \frac{3\varepsilon_{ex}}{8\pi} \varepsilon^2 \beta_E^2 [1 + 2P_2(\mu)] - \frac{\sigma}{R} \left[ 2 + \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) \alpha_n P_n(\mu) \right] = 0, \tag{4.5}$$

приравниванием амплитудных коэффициентов  $\alpha_n$  при полиномах Лежандра одинакового порядка, учитывая (4.2) и переходя от формального параметра  $\beta_E$  к физическим обозначениям, легко найдем равновесную форму капли:

$$r(\theta) = R \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right); \quad e^2 = \frac{9\varepsilon_{ex} E_0^2 R}{16\pi\sigma} \tag{4.6}$$

Выражение (4.6) соответствует уравнению сфероида, вытянутого вдоль направления электрического поля, в сферической системе координат [15, 16].

**5. Задача первого порядка по  $\epsilon$ .** Подставляя в систему уравнений (2.5)–(2.7), (2.9)–(2.10) асимптотические разложения (3.1) с учетом (3.2) и собирая слагаемые первого порядка малости по  $\epsilon$ , получим задачу для отыскания амплитудных коэффициентов  $M_n^{(1)}$ ,  $A_n^{(1)}$ ,  $B_n^{(1)}$  в функциях  $\xi^{(1)}(\theta, t)$ ,  $\psi_m^{(1)}(r, \theta, t)$  ( $m = 1, 2$ ), связанных с линейными осцилляциями капли:

$$r = R: \quad \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi_m^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r} \quad (5.1)$$

$$-\rho_1 \frac{\partial \psi_1^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} + \frac{\sigma}{R} (2 + \hat{L}_\theta) \frac{\xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1)}{R} = 0$$

$$\hat{L}_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (5.2)$$

$$R^2 \int_0^\pi \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) \sin \theta d\theta = 0, \quad 2R^3 \int_0^\pi \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$

Подстановка разложений (3.3), (3.4) при  $k = 1$  в уравнения (5.1)–(5.2) позволяет найти соотношения между коэффициентами  $M_0^{(1)}$ ,  $M_1^{(1)}$ ,  $A_n^{(1)}$ ,  $B_n^{(1)}$  в виде:

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0, \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1) = 0, \quad D_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0$$

$$A_n^{(1)}(T_0, T_1) = \frac{1}{n} R^{-n+2} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} \quad (n \geq 1) \quad (5.3)$$

$$B_n^{(1)}(T_0, T_1) = R \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} \frac{1}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \quad (5.4)$$

Из динамического граничного условия (5.2) после несложных преобразований перейдем к однородному дифференциальному уравнению второго порядка, относительно амплитудных коэффициентов  $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$  при  $n \geq 2$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(1)}(T_0, T_1) + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = 0 \quad (5.5)$$

Общее решение дифференциального уравнения (5.5) представим в виде:

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1) = C_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + \bar{C}_n^{(1)}(T_1) \exp(-i\omega_n T_0); \quad n \geq 2$$

$$C_n^{(1)}(T_1) = c_n^{(1)}(T_1) \exp(ib_n^{(1)}(T_1)), \quad \bar{C}_n^{(1)}(T_1) = \bar{c}_n^{(1)}(T_1) \exp(-ib_n^{(1)}(T_1)), \quad (5.6)$$

где  $C_n^{(1)}(T_1)$ ,  $\bar{C}_n^{(1)}(T_1)$  – комплексно сопряженные величины. Зависимость функций  $c_n^{(1)}$ ,  $b_n^{(1)}$  от более медленного масштаба времени  $T_1$  найдем при рассмотрении задачи второго порядка малости по  $\epsilon$ .

В уравнении (5.5) квадрат частоты  $\omega_n^2$  осцилляций незаряженной сферической капли определяется соотношением:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} \frac{n(n-1)(n+2)}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n T_0^+(n)}, \quad T_0^+(n) = \frac{h_n^{(2)}(kR)}{R \cdot \partial_r \left( h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}} \quad (5.7)$$

Для отыскания амплитудных множителей  $F_n^{(1)}$ , входящих в разложение для поправки к электрическому потенциалу  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ , из уравнений (2.7), (2.10) выделим слагаемые, пропорциональные:

$$r = R: \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) - 3\beta_E \xi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) P_1(\mu) = \Phi_s^{(1)} \quad (5.8)$$

$$\frac{R^2}{2} \int_0^\pi \frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r} \sin \theta d\theta = 0 \quad (5.9)$$

Выпишем решение, найденное подстановкой разложений (3.3), (3.5) в систему уравнений (5.8), (5.9), в виде:

$$F_0^{(1)}(T_0) = 0, \quad F_n^{(1)}(T_0) = \beta_E \left[ M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1) l_1(n) + M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1) l_2(n) \right] \quad (n \geq 1) \quad (5.10)$$

$$l_1(n) = \frac{3n}{(2n-1)}, \quad l_2(n) = \frac{3(n+1)}{(2n+3)}$$

В (5.8)  $\Phi_s^{(1)} = 0$ .

**6. Задача второго порядка по  $\epsilon$ .** Для нахождения коэффициентов второго порядка  $M_n^{(2)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$  в функциях  $\xi^{(2)}(\theta, t), \Psi_m^{(2)}(r, \theta, t)$  ( $m = 1, 2$ ) приведем систему уравнений, получающуюся подстановкой в (2.5)–(2.7), (2.9)–(2.10) разложений (3.1) при выполнении дифференцирования (3.2) и группировкой слагаемых, пропорциональных  $\epsilon^2$ :

$r = R:$

$$\frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial \Psi_m^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_m^{(1)}}{\partial \theta} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_m^{(1)}}{\partial r^2} \quad (6.1)$$

$$P_1^{(2)}(r, \theta, t) - P_2^{(2)}(r, \theta, t) + P_E^{(2)}(r, \theta, t) - P_\sigma^{(2)}(r, \theta, t) = 0$$

$$P_1^{(2)}(r, \theta, t) = -\rho_1 \left[ \frac{\partial \Psi_1^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \Psi_1^{(1)}}{\partial T_1} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}}{\partial r \partial T_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Psi_1^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial \Psi_1^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (6.2)$$

$$P_2^{(2)}(r, \theta, t) = -\rho_2 \left[ \frac{\partial \Psi_2^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial T_1} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_2^{(1)}}{\partial r \partial T_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial T_0} \right)^2 \right]$$

$$P_\sigma^{(2)}(r, \theta, t) = \frac{\sigma}{R} \left[ -(2 + \hat{L}_\theta) \frac{\xi^{(2)}}{R} + 2 \frac{\xi^{(1)}}{R} (1 + \hat{L}_\theta) \frac{\xi^{(1)}}{R} \right] \quad (6.3)$$

$$R \int_0^\pi \left( R \xi^{(2)} + \left( \xi^{(1)} \right)^2 \right) \sin \theta d\theta = 0 \quad (6.4)$$

$$R^2 \int_0^\pi \left( 2R \xi^{(2)} + 3 \left( \xi^{(1)} \right)^2 \right) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (6.5)$$



Используя разложения (3.3), (3.4) при  $k = 1, 2$  и решения первого порядка малости (5.3), (5.4), из условий (6.1), (6.4), (6.5) найдем выражения для искомых амплитуд  $M_0^{(2)}$ ,  $M_1^{(2)}$ ,  $A_n^{(2)}$ ,  $B_n^{(2)}$  в виде:

$$M_0^{(2)}(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( M_k^{(1)}(T_0, T_1) \right)^2$$

$$M_1^{(2)}(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9k}{(2k-1)(2k+1)} M_k^{(1)}(T_0, T_1) M_{k-1}^{(1)}(T_0, T_1)$$

$$A_0^{(2)}(t) = 0$$

$$A_n^{(2)}(t) = R^2 \left( \frac{r}{R} \right)^n \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_1} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l_0(m, k, n) \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} M_k^{(1)}(T_0, T_1) \right] \quad (n \geq 1)$$

$$B_n^{(2)}(t) = R \frac{1}{\partial_r \left( h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}} \left[ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_1} + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} S_0(m, k, n) \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} M_k^{(1)}(T_0, T_1) \right] \quad (n \geq 0)$$

$$l_0(m, k, n) = -(m(m-1)K_{m,k,n} - \alpha_{m,k,n}) \frac{1}{nm}$$

$$S_0(m, k, n) = -R \frac{\partial^2_{r^2} \left( h_m^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}}{\partial_r \left( h_m^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}} K_{m,k,n} + \frac{1}{R} \frac{h_m^{(2)}(kr)}{\partial_r \left( h_m^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}} \alpha_{m,k,n}$$

$$K_{m,k,n} = \left[ C_{k0,m0}^{n0} \right]^2; \quad \alpha_{m,k,n} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \cdot C_{m-1,k1}^{n0},$$

где  $C_{mk,lp}^{nq}$  – коэффициенты Клебша–Гордана [14], имеющие отличные от нуля значения при  $|m-l| \leq n \leq m+l$ ,  $m+l+n$  – четное и  $k+p=q$ .

Подставим в баланс давлений второго порядка малости (6.2) исходные разложения (3.3)–(3.6) и решение (5.6), откуда получим неоднородное дифференциальное уравнение относительно амплитудных коэффициентов  $M_n^{(2)}(T_0)$  ( $n \geq 2$ ):

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(2)}(T_0) + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0) = G_0^+(n) \exp(i\omega_n T_0) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ G_1^+(m, k, n) C_m^{(1)}(T_1) C_k^{(1)}(T_1) \exp(i(\omega_m + \omega_k) T_0) + \right. \\ \left. + G_1^-(m, k, n) C_m^{(1)}(T_1) \bar{C}_k^{(1)}(T_1) \exp(i(\omega_m - \omega_k) T_0) \right\} + \text{к.с.}$$

$$\begin{aligned}
 G_0^+(n) &= i\omega_n G_0(n) \frac{\partial C_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1}, \quad G_0(n) = -\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n T_0^+(n)\right)^{-1} \left(2 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n T_0^+(n)\right) \\
 G_1^\pm(m, k, n) &= \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n T_0^+(n)\right)^{-1} \times \\
 &\times \left(\omega_m^2 \left(K_{m,k,n}(-m+1+n) + \frac{\alpha_{m,k,n}}{m} - \frac{\rho_2}{\rho_1} n \left(T_0^+(n) S_0(m, k, n) + K_{m,k,n}\right)\right) + \right. \\
 &\pm \omega_m \omega_k \left(K_{m,k,n}(1-m) + \frac{\alpha_{m,k,n}}{m} + \frac{2}{n} \left(K_{m,k,n} + \frac{\alpha_{m,k,n}}{mk}\right) - \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} n \left(K_{m,k,n} + \alpha_{m,k,n} T_0^+(m) T_0^+(k)\right) \right) - \\
 &\left. - \omega_m^2 \omega_k^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{R^2}{2V^2} n K_{m,k,n} T_0^+(m) T_0^+(k) - 2 \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} n K_{m,k,n} (1 - m(m+1))\right),
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\text{где } T_0^+(n) \approx -\frac{n+1}{n^2}, \quad S_0(m) \approx (m+1) \left( (m+1) \left( \frac{2}{m^2} + \frac{1}{m-1} \right) K_{m,k,n} - \frac{1}{m^2} \alpha_{m,k,n} \right).$$

В (6.6) аббревиатура “к.с.” означает слагаемые, комплексно-сопряженные к выписанным,  $\bar{C}_k^{(1)}$  – комплексно-сопряженная к  $C_k^{(1)}(T_1)$  величина.

Для того, чтобы в решении дифференциального уравнения (6.6) отсутствовали неравномерности (т.е. неограниченно нарастающие со временем члены), в правой части уравнения (6.6), имеющей смысл внешнего воздействия с частотой  $\omega_n$ , равной частоте осцилляций капли, необходимо исключить секулярные слагаемые, пропорциональные  $\exp(i\omega_n T_0)$ .

Таким образом, приравнявая нулю выражение:

$$G_0^+(n) = i\omega_n G_0(n) \frac{\partial C_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} = 0$$

и, применяя соотношение (5.7) для  $C_n^{(1)}(T_1)$ , выраженной через функции  $c_n^{(1)}(T_1)$ ,  $b_n^{(1)}(T_1)$ , несложно определить зависимость этих функций от временного масштаба  $T_1$ :

$$c_n^{(1)}(T_1) = c_n^{(0)}, \quad b_n^{(1)}(T_1) = b_n^{(0)}, \tag{6.7}$$

где постоянные интегрирования  $c_n^{(0)}$ ,  $b_n^{(0)}$  находятся из начальных условий (2.11).

В итоге, при использовании условия (6.7) для амплитуд  $M_n^{(1)}(t)$  будет справедливо соотношение:

$$M_n^{(1)}(t) = 2c_n^{(0)} \cos(\omega_n t + b_n^{(0)}) \tag{6.8}$$

Общее решение уравнения (6.6) при  $n \geq 2$  с учетом исключенных секулярных членов будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
 M_n^{(2)}(T_0) &= C_n^{(2)} \exp(i\omega_n T_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \beta_1^+(m, k, n) C_m^{(1)} C_k^{(1)} \exp(i(\omega_m + \omega_k) T_0) + \right. \\
 &\left. + \beta_1^-(m, k, n) C_m^{(1)} \bar{C}_k^{(1)} \exp(i(\omega_m - \omega_k) T_0) \right\} + \text{к.с.}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$C_n^{(2)} = c_n^{(2)} \exp(ib_n^{(2)}), \quad \beta_1^\pm = \frac{G_1^\pm(m, k, n)}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_k)^2}$$

Подстановка разложения (3.1) в (2.11) при использовании (3.2) позволяет привести начальные условия первого порядка малости по  $\varepsilon$ :

$$t = 0: \quad \xi^{(1)}(\theta, t) = R \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu), \quad \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_0} = 0 \quad (6.10)$$

Из решения системы (6.10) с учетом (3.3) при  $k = 1$  и (6.7) действительные коэффициенты  $c_n^{(0)}$ ,  $b_n^{(0)}$  примут вид:

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \Xi} h_j \delta_{n,j}, \quad b_n^{(0)} = 0 \quad (6.11)$$

Для отыскания явного вида коэффициентов  $c_n^{(2)}$ ,  $b_n^{(2)}$  в решении (6.9) зададим начальные условия второго порядка малости по  $\varepsilon$ :

$$t = 0: \quad \xi^{(2)}(\theta, t) = R(\xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu)), \quad \frac{\partial \xi^{(2)}(\theta, t)}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_1} = 0$$

(напомним, что константы  $\xi_1$  и  $\xi_1$  пропорциональны  $\varepsilon^2$ ). Из выписанных начальных условий найдем:

$$c_n^{(2)} = -\sum_{j \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \frac{h_j h_q}{4} (\beta_1^+(j, q, n) + \beta_1^-(j, q, n)), \quad b_n^{(2)} = 0 \quad (6.12)$$

Наконец, подставляя (6.11), (6.12) в решения первого и второго порядков (6.8), (6.9), уравнение осциллирующей поверхности капли (2.1) приобретет следующий вид:

$$r(\theta, t) = R \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j^{(1)}(t) P_j(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) \right) \\ M_0^{(1)}(t) = M_1^{(1)}(t) = 0, \quad M_j^{(1)}(t) = \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j t) \quad (6.13)$$

$$M_0^{(2)}(t) = -\sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^2}{(2j+1)} (\cos(\omega_j t))^2 \\ M_1^{(2)}(t) = -\sum_{j \in \Xi} \frac{9j h_{j-1} h_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_{j-1} t) \cos(\omega_j t) \\ M_n^{(2)}(t) = \sum_{j \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \frac{h_j h_q}{2} \left[ \beta_1^+(j, q, n) (\cos((\omega_j + \omega_q)t) - \cos(\omega_n t)) + \right. \\ \left. + \beta_1^-(j, q, n) (\cos((\omega_j - \omega_q)t) - \cos(\omega_n t)) \right] \quad (n \geq 2) \quad (6.14)$$

Заметим, что амплитудные коэффициенты  $M_0^{(2)}(t)$ ,  $M_1^{(2)}(t)$  в (6.13), (6.14) рассчитываются из условий сохранения объема капли (6.4) и отсутствия движения ее центра масс (6.5).

**7. Монопольное акустическое излучение.** Наличие в спектре капиллярных осцилляций второго порядка амплитуды нулевой моды  $\alpha_0(t) = R\varepsilon^2 M_0^{(2)}(t)$ , соответствующей радиальным пульсациям капли, превращает ее в источник звуковых волн монопольного типа.

Согласно (6.13) частота осцилляций центрально-симметричной моды ( $n = 0$ ) в два раза выше частоты колебательной моды начальной деформации капли:  $\omega_0 = 2\omega_j$ .

Выражение для интенсивности монопольного излучения, связанного с центрально-симметричной (нулевой) модой во втором порядке малости по  $\epsilon$ , при условии  $\lambda \gg R$  ( $\lambda$  – длина излучаемой акустической волны), определяется ([6], с. 402) или ([3], с. 206), формулой:

$$I_0 = \frac{2\pi\rho_2 R^4 \omega^2 U_0^2}{v \left(1 + \frac{\omega^2 R^2}{v^2}\right)} \quad (7.1)$$

В (7.1) амплитуда радиальной скорости  $U_0$  движения точек поверхности капли находится в виде:

$$U_0 = \frac{\partial\alpha_0(t)}{\partial t} = R\epsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^2 \omega_j}{(2j+1)} \sin(2\omega_j t) \quad (7.2)$$

Подставляя (7.2) в (7.1) и придавая синусу его максимальное значение, с учетом того, что  $\omega R/v \ll 1$ , запишем окончательное выражение интенсивности монопольного излучения:

$$I_0 = \frac{2\pi\rho_2 R^6 \epsilon^4}{v} \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^4 \omega_j^4}{(2j+1)^2} \quad (7.3)$$

Используя полученное аналитическое выражение (7.3), оценим по порядку величины мощность монопольного звукового излучения от различных жидко-капельных объектов искусственного и естественного происхождения.

Источниками акустического излучения в конвективных облаках являются мелкие осциллирующие капли с типичными размерами от 3 до 30 мкм и максимальной концентрацией в облаке. Число таких капелек в 1 см<sup>3</sup> облака  $\sim 10^3$  [18, 19]. Известно, что в процессе развития кучево-дождевых облаков в результате слияния внутриоблачных капель образуются мелкие дождевые капли размером  $0.01 \leq R \leq 0.025$  см, относящиеся к мороси, и укрупненные дождевые капли при  $0.025 \leq R \leq 0.35$  см. Более крупные капли, радиус которых превышает 0.35 см, при падении в воздухе разбиваются из-за аэродинамического сопротивления [20, 21]. Заметим, что осцилляции рассматриваемых облачных и дождевых капель могут быть вызваны коагуляцией неодинаковых по размеру капель из-за разностей их скоростей падения, дроблением на более мелкие в результате электростатической неустойчивости, а также электрического взаимодействия крупных заряженных капель с малыми электрически нейтральными [18]. Для нижеследующих оценок величину отношения амплитуды начальной деформации равновесной формы капли к ее радиусу примем, равную  $|\xi|/R \sim \epsilon$ . В анализируемом случае для характерных значений напряженности внешнего электрического поля величина параметра Тейлора много меньше критического значения  $w_{кр} \approx 0.05$  [9]. Из этого следует, что большая часть капель находится далеко от предела электрогидродинамической неустойчивости по отношению к индуцированным зарядам.

Для получения численных оценок примем характеристики единичной капли и внешней среды:  $\epsilon = 0.001$ ,  $\epsilon_{ex} = 1$ ,  $h_j = 1$ ,  $\sigma = 73$  дин/см,  $\rho_1 = 1$  г/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$  г/м<sup>3</sup>,  $v = 3.3 \times 10^4$  см/с,  $E_0 = 0.17$  СГСЭ ( $\sim 2 \times 10^{-4} E_{0кр}$  ( $E_{0кр}$  – критическое значение напряженности поля) при  $R = 3$  мкм и  $\sim 7 \times 10^{-3} E_{0кр}$  при  $R = 0.35$  см). При принятых выше значениях физических величин и радиусе дождевой капли  $R = 0.35$  см квадрат эксцентриситета капли  $e^2 = 9E_0^2 R / 16\pi\sigma \approx 2.5 \times 10^{-5}$ .

В соответствии с (7.3) положим, что возбуждение центрально-симметричной моды во втором порядке малости по  $\epsilon$  связано с наличием изначально возбужденной колебательной моды  $j = 2$ . Из (7.3) несложно видеть, что изменение интенсивности монополюсного излучения от одной капли при изменении ее радиуса и напряженности внешнего электрического поля пренебрежимо мало. Интенсивность монополюсного излучения капли при принятом выше соотношении между малыми параметрами и значениях входящих в (7.3) физических величин  $I_0 \sim 3 \times 10^{-15}$  эрг/с.

### 8. Дипольное акустическое излучение.

Появление во втором порядке малости по  $\epsilon$  амплитуды первой моды  $\alpha_1(t) = R\epsilon^2 M_1^{(2)}(t)$ , соответствующей поступательному движению, приводит к генерации звуковых волн дипольного типа.

Из (6.14) следует, что возбуждение первой (трансляционной) моды ( $n = 1$ ) имеет место, когда в спектре изначально возбужденных мод присутствуют две колебательные моды с последовательно возрастающими номерами  $j - 1, j$ .

В случае, когда равновеликий радиус  $R$  капли сравним по величине с  $(\nu/\omega_n)^{1/2}$ , и при выполнении условий  $\lambda \gg R$ ,  $R(\omega_n/2\nu)^{1/2} \ll 1$ , интенсивность дипольного акустического излучения, порождаемого осцилляциями трансляционной моды во втором порядке, находится в соответствии с известным выражением [6], стр. 401:

$$I_1 = \frac{3\pi\rho_2 R^2 \nu^2 \omega^2 U_1^2}{2\nu^3}, \quad (8.1)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость окружающей каплю сжимаемой среды.

В (8.1) амплитудное значение скорости движения  $U_1$  поверхности капли представляется в виде:

$$U_1 = \frac{\partial\alpha_1(t)}{\partial t} = R\epsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{9jh_{j-1}h_j}{2(2j-1)(2j+1)} \times \\ \times ((\omega_j + \omega_{j-1}) \sin(\omega_j + \omega_{j-1})t + (\omega_j - \omega_{j-1}) \sin(\omega_j - \omega_{j-1})t) \quad (8.2)$$

Для проведения качественной оценки по порядку величины в (8.2) заменим синусы на их максимальные значения, и из (8.1) получим:

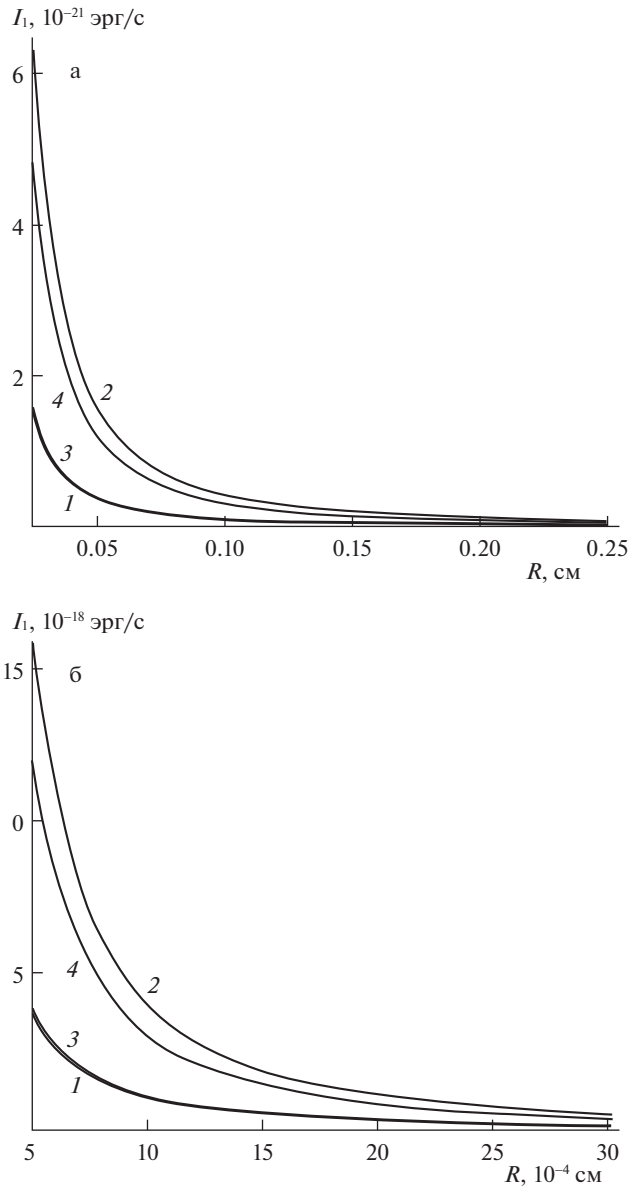
$$I_1 = \frac{3\pi\rho_2 R^4 \nu^2 \epsilon^4}{2\nu^3} \sum_{j \in \Xi} \left( \frac{9jh_{j-1}h_j}{2(2j-1)(2j+1)} \right)^2 \left( (\omega_j + \omega_{j-1})^4 + (\omega_j - \omega_{j-1})^4 \right) \quad (8.3)$$

В отличие от монополюсного излучения дипольное зависит от радиуса. На рис. 1 приведены и графики зависимости интенсивности дипольного акустического излучения  $I_1$  дождевых и облачных капель от радиуса. Видно, что интенсивность дипольного излучения от облачных капель примерно на три порядка больше, чем от дождевых.

На рис. 2 приведены зависимости частот осцилляций центрально-симметричной моды, связанной с монополюсным излучением (кривая 1), и трансляционной моды, определяющей дипольное излучение (кривые 2, 3), от размера дождевой капли. Видно, что увеличение радиуса приводит к быстрому снижению частоты.

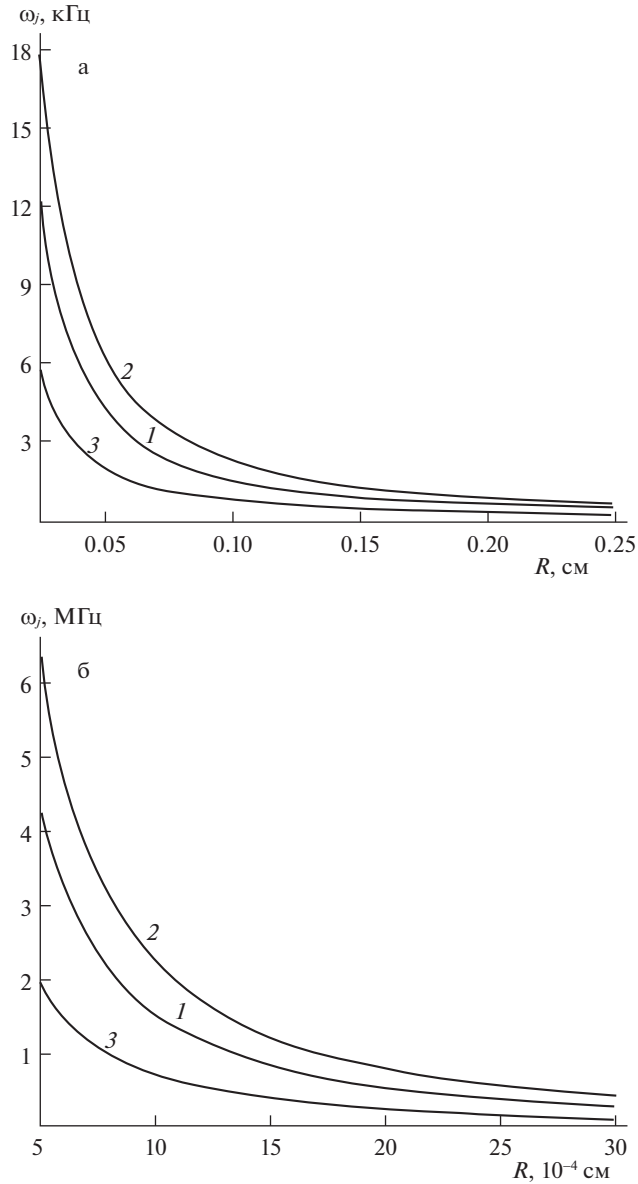
Из рис. 2 следует, что облачные капли излучают на ультразвуковых частотах в диапазоне от десятых долей МГц до 6 МГц. Но дождевые капли генерируют акустические волны в диапазоне слышимых человеческим ухом звуковых частот от десятых долей кГц до 18 кГц.

Если задаться вопросом о временной зависимости интенсивности монополюсного и дипольного излучений, то оказывается, что она зависит качественно и количественно от количества мод, возбужденных в начальный момент времени. На рис. 3 приведены



**Рис. 1.** Зависимость интенсивности дипольного акустического излучения  $I_1$  от эквивалентного радиуса  $R$  слабо заряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле напряженностью  $E_0 = 0.17$  СГСЭ. Кривая 1 соответствует начальной деформации вида  $\varepsilon(P_2(\mu) + P_3(\mu))/2$ , 2 –  $\varepsilon(P_3(\mu) + P_4(\mu))/2$ , 3 –  $\varepsilon(P_2(\mu) + P_3(\mu) + P_4(\mu))/3$ , 4 –  $\varepsilon(P_3(\mu) + P_4(\mu) + P_5(\mu))/3$ , а) дождевой, б) облачной.

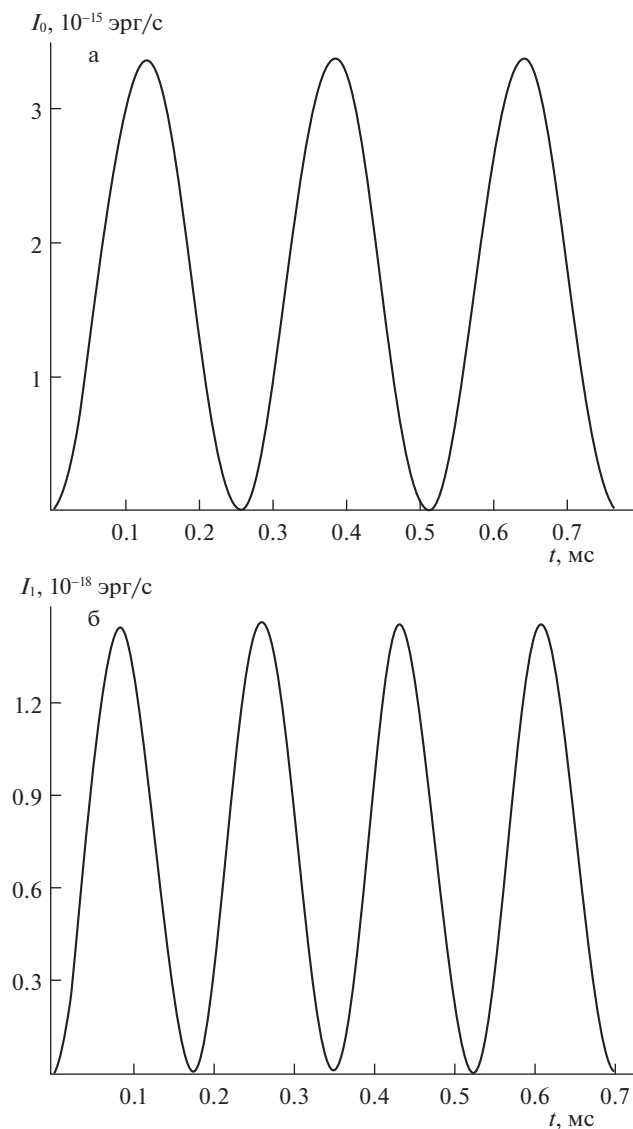
зависимости интенсивности излучения монопольной компоненты излучения от времени при простейшей начальной деформации типа  $\varepsilon P_2(\mu)$  и дипольной компоненты также при простейшей начальной деформации вида  $\varepsilon(P_2(\mu) + P_3(\mu))/2$ . Из сравнения



**Рис. 2.** Зависимость частот осцилляций капель от их радиуса  $R$ . Кривая 1 соответствует частоте центрально-симметричной моды:  $2\omega_2$ , 2 – частоте трансляционной моды:  $\omega_3 + \omega_2$ , 3 – частоте трансляционной:  $\omega_3 - \omega_2$ . а) для дождевых капель, б) для облачных капель.

рис. 3, а и 3, б следует, что интенсивность монопольного излучения на шесть порядков превышает интенсивность дипольного и происходит на больших частотах, но в качественном отношении графики тривиальны.

Если взять более сложные начальные деформации (см. рис. 4), то временной ход зависимости интенсивности монопольного и дипольного излучений становится более

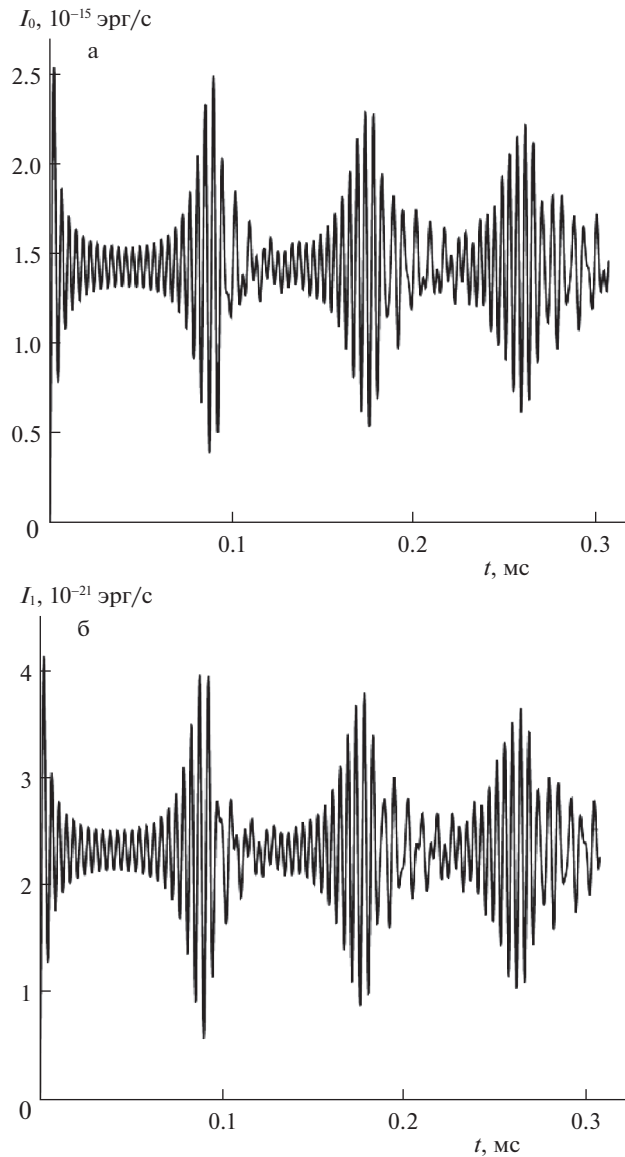


**Рис. 3.** Зависимость от времени  $t$  акустического излучения  $I_0$  незаряженной дождевой капли радиусом  $R = 250$  мкм, осциллирующей во внешнем электростатическом поле напряженностью  $E_0 = 0.17$  ГЭСЭ: а) монополюсного акустического излучения при начальной деформации равновесной формы капли вида  $\varepsilon P_2(\mu)$ , б) дипольного акустического излучения при начальной деформации капли вида  $\varepsilon (P_2(\mu) + P_3(\mu))/2$ .

сложным, приобретая качественный вид биений. Амплитуда звукового сигнала начинает заметно зависеть от времени, хотя монополюсное излучение по-прежнему на шесть порядков более интенсивно.

Проведенные оценки справедливы и для туманов с характерными размерами капель 2–10 мкм [22], излучающих акустические волны в ультразвуковом диапазоне частот.





**Рис. 4.** Зависимость от времени  $t$  акустического излучения  $I_0$  незаряженной дождевой капли радиусом  $R = 250$  мкм, осциллирующей во внешнем электростатическом поле напряженностью  $E_0 = 0.17$  СГСЭ, при изначальном возбуждении первых 30 мод: а) монопольного, б) дипольного.

Естественно задаться вопросом о причине возбуждения центрально симметричной и трансляционной мод в асимптотических расчетах более высоких порядков по малому параметру  $\epsilon$ , чем первый. Представляется, что такой причиной может быть сам применяемый асимптотический метод, оставляющий в расчетах порядка  $n$  (где  $n$  — целое число) погрешность  $\sim \epsilon^n$ , которая частично (на величину  $\sim \epsilon$ ) исправляется в расчетах следующего порядка малости. В этом случае появление в расчетах второго по-

рядка малости в спектре возбуждаемых мод центрально симметричной и трансляционной носит компенсационный характер.

**Заключение.** В асимптотических расчетах второго порядка малости по отношению амплитуды начальной деформации к радиусу незаряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, показано, что возбуждение нулевой моды приводит к генерации в среде акустических волн монополярного типа. Присутствие в спектре изначально возбужденных мод двух и более с последовательными номерами приводит к появлению трансляционной (первой) моды в спектре возбуждающихся во втором порядке мод — генерирующей излучение акустических волн дипольного типа. Для дождевых капель, излучающих в диапазоне слышимых звуковых волн, монополярная компонента излучения на 6 порядков величины интенсивнее, чем дипольная составляющая. В случае излучения монополярного характера граница между ультразвуковыми и слышимыми звуковыми волнами смещается в область больших размеров капель (более чем в 1.5 раза) в сравнении с дипольным акустическим излучением. Кроме того, в отличие от электромагнитного излучения [23] влияние индуцированного заряда на интенсивность акустического излучения весьма мало.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стретт Дж. В. (*Лорд Рэлей*) Теория звука. Т. II. М.: Гостехтеориздат, 1955. 476 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
3. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
4. Little C. G. On the detectability of fog, cloud, rain, and snow by acoustic echo-sounding methods // J. Atm. Sci. 1972. V. 29. P. 748–755.
5. Foster M. P., Pflaum J. C. The behavior of cloud droplets in an acoustic field: a numerical investigation // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. № D1. P. 747–758.
6. Тулайкова Т. В., Мищенко А. В., Амирова С. Р. Акустические дожди. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
7. Ширяева С. О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при начальном возбуждении соседних мод // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–19.
8. Taylor G. I. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. London. 1964. V. A280. P. 383–397.
9. Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белавина Е. И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
10. Френкель Я. И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
11. Стерлядкин В. В. Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
12. Beard K. V., Tokay A. A field study of small raindrop oscillations // Geophys. Res. Lett. 1991. V. 18. № 12. P. 2257–2260.
13. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
14. Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука. 1975. 436 с.
15. Григорьев А. И., Синкевич О. А. К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электрическом поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
16. Cheng K. J. Capillary oscillations of drop in an electric field // Phys. Lett. A. 1985. V. A112. № 11. P. 392–396.
17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.

18. Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеиздат. 1983. 280 с.
19. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеиздат. 1989. 647 с.
20. Боровиков А.М., Гайворонский Е.Г. Физика облаков. Л.: Гидрометеиздат. 1961. 459 с.
21. Тверской П.Н. Курс метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1962. 700 с.
22. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли — пыли, дымы и туманы. Л.: Химия, 1969. 428 с.
23. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Капиллярные волны и дипольное электромагнитное излучение, создаваемое нелинейными осцилляциями незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле // Коллоидный ж. 2022. Т. 84. № 2. С. 141–163.

### Nonlinear Monopole and Dipole Acoustic Radiation of a Weakly Charged Drop, Which Oscillates in a Homogeneous Electrostatic Field

A. I. Grigoriev<sup>a, #</sup>, N. Yu. Kolbneva<sup>b, ##</sup>, and S. O. Shiryayeva<sup>b, ###</sup>

<sup>a</sup>*Isinlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: grigori@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru*

<sup>###</sup>*e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

In the asymptotic calculations of the second order of smallness, according to the small dimensionless amplitude of oscillations of droplets of natural origin in the material environment in the intra-cloud or ground-level electric field, it is shown that, among other modes, the zero and first modes of oscillations of the droplet that do not take place in the calculations of the first order of smallness are excited. The intensity of acoustic radiation from them is calculated. Calculations are carried out on the model of an ideal non-compressible electrically conductive fluid.

It has been shown that the intensity of monopole acoustic radiation from a drop is six orders of magnitude more intense than dipole radiation. The intensity of monopole radiation in the approximation oscillations used quadratic by dimensionless amplitude does not depend on the radius of the drop and the intensity of the external electrostatic field, the intensity of dipole radiation depends significantly on the radius of the drop. Dependence on the intensity of the external electrostatic field appears only in the third order of smallness. Acoustic radiation from oscillating rain drops goes in the audible frequency range, and from cloud and fog drops — in the ultrasonic range. The time dependence of acoustic radiation of both monopole and dipole on the drop at the initial excitation of the final segment of the continuous spectrum of modes has the form of beats.

*Keywords:* nonlinear oscillating drop, electrostatic field, monopole and dipole acoustic radiation

### REFERENCES

1. Strett J.W. (*Lord Rayleigh*) The Theory of Sound. Moscow: Gostekhteorizdat, 1955. 476 p.
2. Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986. 733 p.
3. Lependine L.F. Acoustics. Moscow: Vysshaya Shkola, 1978. 448 p.
4. Little C.G. On the detectability of fog, cloud, rain, and snow by acoustic echo-sounding methods // J. Atm. Sci., 1972, vol. 29, pp. 748–755.
5. Foster M.P., Pflaum J.C. The behavior of cloud droplets in an acoustic field: a numerical investigation // J. Geophys. Res., 1988, vol. 93, no. D1, pp. 747–758.
6. Tulaykova T.V., Mishchenko A.V., Amirova S.R. Acoustic Rains. Moscow: Fizmatkniga, 2010. 160 p.
7. Shiryayeva S.O. Nonlinear oscillations of the charged drop at the initial excitation of neighboring modes // J. Techn. Phys., 2002, vol. 72, iss. 4, pp. 15–19.

8. *Taylor G.I.* Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. London, 1964, vol. A280, pp. 383–397.
9. *Grigoriev A.I., Shiryaeva S.O., Belavina E.I.* The equilibrium form of a charged drop in electric and gravitational fields // J. Techn. Phys., 1989, vol. 59, iss. 6, pp. 27–34.
10. *Frenkel J.I.* To the theory of Tonks about the rupture of the surface of a liquid by a constant electric field in a vacuum // ЖЭТФ, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 348–350.
11. *Sterlyadkin V.V.* Full-scale measurements of precipitation drop oscillations// Izv. AN SSSR. Ser. FAO, 1988, vol. 24, no. 6, pp. 613–621.
12. *Beard K.V., Tokay A.* A field study of small raindrop oscillations // Geophys. Res. Lett., 1991, vol. 18, no. 12, pp. 2257–2260.
13. *Naife A.H.* Perturbation Methods. Moscow: Mir, 1976. 455 p.
14. *Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Kherson V.K.* Quantum Theory of Angular Momentum. Leningrad: Nauka, 1975. 436 p.
15. *Grigoriev A.I., Sinkevich O.A.* To the mechanism of development of instability of a liquid drop in an electric field // Fluid Dtn., 1985, no. 6, pp. 10–15.
16. *Cheng K.J.* Capillary oscillations of drop in an electric field // Phys. Lett. A., 1985, vol. A112, no. 11, pp. 392–396.
17. *Gradstein I.S., Ryzhik I.M.* Tables of Integrals, Sums, Series and Works. Moscow: Nauka, 1963. 1108 p.
18. *Mazin I.P., Schmeter S.M.* Clouds. Structure and Physics of Formation. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1983. 280 p.
19. *Mazin I.P., Hrgian A.H., Imyanitov I.M.* Handbook of Clouds and Cloudy Atmosphere. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1989. 647 p.
20. *Borovikov A.M., Gayvoronsky E.G.* Physics of Clouds. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1961. 459 p.
21. *Tverskoy P.N.* Course of Meteorology. Physics of Atmosphere. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1962. 700 p.
22. *Green H., Lane W.* Aerosols – Dust, Smoke and Fog. Leningrad: Khimiya Publ., 1969. 428 p.
23. *Grigoriev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryaeva S.O.* Capillary waves and dipole electromagnetic radiation generated by nonlinear oscillations of an uncharged drop in an external homogeneous electrostatic field// Colloid J., 2022, vol. 84, no. 2, pp. 141–163.