УДК 531.38

ГИРОСТАТ С ЭЛЕКТРОМОТОРОМ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

© 2022 г.

Б. И. Коносевич[1,*], Ю. Б. Коносевич[1,*]

[1]*Институт прикладной математики и механики, Донецк, ДНР*

**e-mail: konos.donetsk@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.01.2022 г.
После доработки 08.07.2022 г.
Принята к публикации 15.07.2022 г.

Предложена математическая модель однороторного гиростата с неподвижной точкой, находящегося в поле силы тяжести и снабженного электромотором, который поддерживает вращение ротора при наличии момента сил трения относительно его оси. Трение в сферическом шарнире, реализующем неподвижную точку, предполагается отсутствующим. Рассмотрены бестоковые модели асинхронного и синхронного электромоторов, многотоковая модель синхронного электромотора.
Для гиростата с электромотором получены две формы уравнений движения, которые соответствуют двум определениям тензора инерции. Проанализированы условия существования стационарных решений этих уравнений. Такие решения описывают стационарные движения гиростата – перманентные вращения вокруг вертикали и состояния покоя тела-носителя. Проведено сравнение найденных условий с аналогичными условиями для двух известных моделей гиростата – с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью, и с ротором, вращающимся по инерции без трения. Установлено, что в общем случае направления полуосей равномерного вращения гиростата с электромотором образуют в теле-носителе конус, совпадающий с конусом полуосей равномерного вращения для гиростата с равномерно вращающимся ротором.

Ключевые слова: гиростат, тензор инерции, асинхронный и синхронный электромотор, стационарное движение, конус полуосей равномерного вращения

DOI: 10.31857/S003282352206008X

1. Введение. Гиростатом называют механическую систему, состоящую из твердого тела, которое содержит массы, циклически движущиеся таким образом, что не изменяется распределение масс во всей системе [1]. Часто под гиростатом понимают систему твердых тел, состоящую из тела-носителя, в котором вокруг фиксированных в нем осей вращаются роторы, являющиеся динамически и статически уравновешенными относительно этих осей [2, 3]. История формирования понятия "гиростат" отражена в [4].

Задача о движении в поле силы тяжести гиростата с постоянным гиростатическим моментом, имеющего неподвижную точку, является непосредственным обобщением классической задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой. В книге [4] для гиростата приведены аналоги общих случаев интегрируемости этой классической задачи и ее точных частных решений. Здесь также представлены неклассические постановки задачи о движении гиростата с неподвижной точкой, в которых рассматривается его движение не только в поле силы тяжести, но и в поле потенциальных и гироскопических сил, в ньютоновском, кулоновском и магнитном полях.

Еще одна неклассическая постановка задачи о гиростате относится к случаю переменного гиростатического момента, явно зависящего от времени [3]. Расширение постановки задачи о гиростате позволяет получить для этой задачи большое число точных частных решений [4–8]. Такие решения находят путем задания класса инвариантных соотношений для системы уравнений движения или заданием структуры решения этих уравнений. При этом в случае гиростатического момента, явно зависящего от времени, эта зависимость определяется аналитической структурой получаемых решений, а не физическими свойствами момента сил, действующего со стороны статора на ротор относительно его оси.

Для получения точных частных решений используются различные редуцированные формы уравнений движения гиростата. В [9] отмечены случаи, когда редукция с использованием первых интегралов некорректна вследствие функциональной зависимости этих интегралов.

Кроме движений, определяемых формальным заданием класса решений уравнений движения, для гиростата с постоянным или явно зависящим от времени гиростатическим моментом выделяются и анализируются движения, обладающие определенными свойствами – это стационарные движения [2, 10–13], прецессионные, маятниковые, прецессионно-изоконические, асимптотические [14–18], а также хаотические движения [19–22]. Большое развитие получили топологические методы исследования движения гиростата [23–26].

В [27] получены условия устойчивости равномерных вращений тяжелого гиростата с неподвижной точкой. Для симметричного гиростата, закрепленного на оси симметрии, в [28] найдены условия устойчивости его регулярной прецессии в центральном ньютоновском поле. В [29] рассмотрена устойчивость стационарных движений гиростата в идеальной жидкости, а в [30] изучен вопрос о стабилизации программных движений гиростата с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

Современные исследования динамики гиростата, не имеющего неподвижной точки, посвящены, в основном, изучению вращательного движения спутника-гиростата, движущегося по орбите. В [31–34] проведен анализ достаточных и необходимых условий устойчивости относительных равновесий орбитального гиростата. Для спутника-гиростата, движущегося в центральном ньютоновском силовом поле по круговой орбите, в [35] предложен метод определения всех его равновесных ориентаций и проведен анализ достаточных условий их устойчивости. Периодические движения такого гиростата рассмотрены в [36–38]. В [39–41] изучаются динамика и устойчивость стационарных движений космических систем, в том числе и гиростатов, с тросовыми и шарнирными соединениями. Для однороторного спутника-гиростата, содержащего сферическую полость с жидкостью большой вязкости, в [42] получено приближенное решение уравнений его движения относительно центра масс. В [43, 44] рассмотрены вопросы устойчивости и стабилизации относительных равновесий спутника-гиростата с упругим стержнем. В [45] предложен алгоритм структурно-параметрической идентификации модели демпфированных колебаний упругого элемента спутника-гиростата.

При изучении большинства как прикладных, так и теоретических задач, гиростатический момент, часто даже не оговаривая это, предполагают постоянным, то есть полагают, что роторы либо вращаются по инерции без трения, либо они вращаются с постоянными относительными угловыми скоростями. Случай переменного гиростатического момента, не являющегося явно заданной функцией времени, имеет место при исследовании задач ориентации гиростата с помощью управляющих моментов, приложенных к роторам со стороны тела-носителя и зависящих от компонент вектора угловой скорости [46–48].

На практике быстро вращающийся ротор испытывает значительное тормозящее воздействие сил трения, и поэтому предположение о вращении роторов по инерции без трения нереализуемо для длительно работающих аппаратов с быстро вращающимися роторами, выполненных по схеме гиростата. Что касается предположения о вращении роторов с постоянными относительными угловыми скоростями, то устройством, которое с той или иной точностью обеспечивает реализацию этого предположения, является электромотор. Поэтому для обоснования правомерности применения модели гиростата с равномерно вращающимися роторами следует изучить модель гиростата, в которой роторы гиростата являются роторами электромоторов, а статоры электромоторов являются частью тела-носителя гиростата. Два основных типа электромоторов – асинхронный и синхронный.

После выхода статьи [49] явные модели электромоторов используются при изучении динамики гироскопа в кардановом подвесе. До недавнего времени в публикациях на эту тему рассматривались упрощенные модели электромоторов, которые явно не содержат электрических токов [49–56]. Поэтому их уместно назвать бестоковыми. В таких моделях суммарный момент M, создаваемый электромотором и силами трения относительно оси ротора (гироскопа), зависит от угловой скорости вращения ротора относительно статора в случае асинхронного электромотора, а в случае синхронного электромотора он зависит также от угла поворота ротора относительно вращающегося магнитного поля статора. В простейшем случае $M = -k_1\gamma - k_2\dot{\gamma}\ (k_1, k_2 > 0)$, где $\gamma = \varphi' - \Omega t$, φ' – угол поворота ротора электромотора S' относительно его статора, $\Omega > 0$ – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре. Для асинхронного электромотора в простейшем случае применяется линейная формула $M = -k_0\dot{\gamma}\ (k_0 > 0)$, где $\dot{\gamma} = \dot{\varphi}' - \Omega'$, Ω' – угловая скорость вращения ротора, при которой вращающий момент электромотора уравновешивает момент трения ($0 < \Omega' < \Omega$). В [49–56] для гироскопа в кардановом подвесе используются бестоковые модели электромоторов, основанные на нелинейных аналогах этих формул.

В [57] рассмотрена двухтоковая модель синхронного электромотора, частным случаем которой является двухтоковая модель асинхронного электромотора. В [58] предложена достаточно общая многотоковая модель синхронного электромотора в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей уравнения для электрических токов. На основе этой модели в [59] получено условие глобальной устойчивости такого электромотора, а в [60, 61] установлен необходимый и достаточный критерий устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного синхронным электромотором. Этот результат обобщает на случай многотоковой модели синхронного электромотора результат работ [54, 55].

Представляет интерес явно учесть наличие электромотора и при изучении динамики гиростата. Этому посвящена данная работа. В ней рассматривается тяжелый однороторный гиростат с неподвижной точкой, снабженный электромотором. Ротор электромотора является ротором гиростата, а статор электромотора является частью тела-носителя. Трение в сферическом шарнире, реализующем неподвижную точку, предполагается отсутствующим, а относительно оси ротора на него со стороны тела-носителя действуют момент сил трения и момент, создаваемый электромотором. Рассматриваются три модели электромотора: бестоковые модели асинхронного и синхронного электромотора и многотоковая модель синхронного электромотора.

Получены две формы дифференциальных уравнений движения гиростата, соответствующие двум определениям его тензора инерции для неподвижной точки. Дано сравнение условий существования стационарных вращений гиростата с электромотором с такими условиями для двух известных моделей гиростата без электромотора – с равномерно вращающимся ротором и с ротором, вращающимся по инерции без трения [2, 10].

2. Основные соотношения для механической части гиростата. При выводе уравнений движения гиростата с электромотором за основу взят подход, принятый в [2, 3].

2.1. Механическая часть гиростата. Рассматривается система двух твердых тел S^0 и S'. Тело S^0 с произвольным распределением масс имеет неподвижную точку O. Предполагается, что связь, реализующая неподвижную точку, является идеальной. В теле S^0 вокруг фиксированной в нем оси l вращается твердое тело S' (ротор), которое является статически и динамически уравновешенным относительно этой оси.

Система тел S^0 и S' находится в поле силы тяжести. Со стороны тела-носителя S^0 к ротору S' приложены равнодействующие сил реакции в подшипниках, на которых установлена ось l. Кроме того, относительно оси l действует момент сил трения M_2, зависящий от угловой скорости $\dot{\varphi}'$ вращения ротора S' относительно тела-носителя S^0. Для поддержания вращения ротора при наличии трения используется электромотор, так что тело S' является ротором электромотора, а статор электромотора составляет часть тела-носителя S^0. Момент, создаваемый электромотором относительно оси l, обозначается через M_1. Далее, через m^0 и m' обозначаются массы тел S^0 и S', а через C^0 и C' – их центры масс. Точка C' лежит на оси l.

С телом S^0 неизменно связана правая декартова система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в неподвижной точке, а с ротором S' неизменно связана система координат $C'\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ с началом в его центре масс и осью $C'\xi_1'$, направленной вдоль оси l вращения ротора. Единичные векторы осей координат $O\xi_1$, $C'\xi_1'$ и т. д. обозначаются через $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_1'$ и т.д. Вектор $\mathbf{h} = \mathbf{OC}'$ проведен из неподвижной точки O в центр масс C' ротора S', а вектор $\mathbf{c}^0 = \mathbf{OC}^0$ указывает положение центра масс C^0 тела-носителя S^0.

Пусть $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость тела S^0, $\mathbf{v}$ – единичный вектор направления силы тяжести, φ' – угол поворота ротора S' вокруг оси l относительно тела S^0. Единичный вектор оси l обозначается через $\mathbf{l}$, так что $\mathbf{l} = \boldsymbol{\xi}_1'$. Векторы $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}, \mathbf{l}, \mathbf{h}, \mathbf{c}^0$ задаются своими компонентами в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{\xi}_1 + \omega_2\boldsymbol{\xi}_2 + \omega_3\boldsymbol{\xi}_3, \quad \mathbf{v} = \nu_1\boldsymbol{\xi}_1 + \nu_2\boldsymbol{\xi}_2 + \nu_3\boldsymbol{\xi}_3 \\
\mathbf{l} = l_1\boldsymbol{\xi}_1 + l_2\boldsymbol{\xi}_2 + l_3\xi_3, \quad \mathbf{h} = h_1\boldsymbol{\xi}_1 + h_2\boldsymbol{\xi}_2 + h_3\boldsymbol{\xi}_3 \\
\mathbf{c}^0 = c_1^0\boldsymbol{\xi}_1 + c_2^0\boldsymbol{\xi}_2 + c_3^0\boldsymbol{\xi}_3
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Величины ω_i, ν_i $(i = 1,2,3)$, φ' являются функциями времени t и входят в число фазовых переменных системы дифференциальных уравнений движения рассматриваемой электромеханической системы, а величины l_i, h_i, c_i^0 $(i = 1,2,3)$ являются постоянными параметрами этой системы.

2.2. Момент количества движения и тензор инерции гиростата в неподвижной точке. Следуя [2, 3], получаем для вектора $\mathbf{x}$ момента количества движения гиростата относительно неподвижной точки выражение

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + m'\mathbf{h}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h}) + A'(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{l} + \dot{\varphi}')\mathbf{l} + B'\mathbf{l}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{l}) \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{A}^0$ – тензор инерции тела S^0 в точке O, A' – момент инерции ротора S' относительно оси l, B' – момент инерции ротора относительно любой оси, проведенной из его центра масс C' ортогонально l.

Выражение (2.2) записывают в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\omega} + A'\dot{\varphi}'\mathbf{l}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{A}^*$ – тензор инерции гиростата, определенный формулой

$$\mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + m'\mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + A'(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l} + B'\mathbf{l} \times (\omega \times \mathbf{l}) \tag{2.4}$$

Выражение (2.2) записывают также в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + A'p'\mathbf{l} \tag{2.5}$$

Здесь тензор $\mathbf{A}$ определен формулой

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + m'\mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + B'\mathbf{l} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}), \tag{2.6}$$

а величина p' является проекцией вектора $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} + \dot{\varphi}'\mathbf{l}$ абсолютной угловой скорости ротора S' на направление оси l:

$$p' = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} + \dot{\varphi}' = \omega_1 l_1 + \omega_2 l_2 + \omega_3 l_3 + \dot{\varphi}' \tag{2.7}$$

Согласно (2.4), компоненты тензора $\mathbf{A}^*$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выражаются по формулам

$$\begin{gathered} A_{11}^* = A_{11}^0 + m'\left(h_2^2 + h_3^2\right) + B'\left(l_2^2 + l_3^2\right) + A'l_1^2 \\ A_{12}^* = A_{12}^0 - m'h_1h_2 + (A' - B')l_1l_2 \ (1\ 2\ 3) \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь символ $(1\ 2\ 3)$ означает, что формулы для A_{22}^*, A_{33}^*, A_{23}^*, A_{31}^* получаются из формул (2.8) путем круговой перестановки индексов 1, 2, 3. Остальные три компоненты A_{21}^*, A_{32}^*, A_{13}^* тензора $\mathbf{A}^*$ равны его соответствующим компонентам с переставленными индексами.

Формула (2.6), определяющая тензор $\mathbf{A}$, отличается от формулы (2.4), определяющей тензор $\mathbf{A}^*$, отсутствием члена с A'. Поэтому компоненты A_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ тензора $\mathbf{A}$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выражаются по формулам, которые получаются из формул (2.8) путем отбрасывания членов, содержащих A'.

2.3. Уравнение вращения ротора. Для вывода дифференциального уравнения, описывающего вращение ротора S' вокруг оси l, воспользуемся векторным уравнением $d(\mathbf{A}' \cdot \boldsymbol{\omega}')/dt = \mathbf{M}$, которое выражает теорему об изменении момента количества движения ротора относительно его центра масс C'. Здесь $\mathbf{A}'$ – тензор инерции ротора в точке C', $\mathbf{M}$ – момент, создаваемый относительно точки C' силами, действующими на ротор со стороны тела-носителя S^0.

Момент $\mathbf{M}$ равен сумме момента $\mathbf{M}_1 = M_1\mathbf{l}$, создаваемого электромотором относительно оси ротора l, момента $\mathbf{M}_2 = M_2\mathbf{l}$, создаваемого относительно этой оси силами трения, а также момента $\mathbf{M}_3$, создаваемого относительно точки C' равнодействующими сил реакций в цилиндрических шарнирах, с помощью которых ось l закреплена в теле S^0. В проекции на направление единичного вектора $\mathbf{l}$ получаем уравнение вращения ротора

$$A'\dot{p}' = M, \tag{2.9}$$

где $M = M_1 + M_2$. С учетом (2.7) оно записывается следующим образом

$$A'(\dot{\omega}_1 l_1 + \dot{\omega}_2 l_2 + \dot{\omega}_3 l_3 + \ddot{\varphi}') = M \tag{2.10}$$

3. Модели электромотора. Дадим краткие описания используемых в данной работе бестоковых моделей асинхронного и синхронного электромоторов [52, 62], а также многотоковой модели синхронного электромотора [58], и приведем соответствующие им выражения для момента M на оси ротора гиростата.

Для всех этих моделей электромотора момент, создаваемый силами трения вокруг оси ротора, предполагается монотонно убывающей и непрерывно дифференцируемой нечетной функцией $M_2(\dot{\varphi}')$ относительной угловой скорости ротора $\dot{\varphi}'$. Предполагается также, что в статоре электромотора имеются обмотки провода, на которые подается переменный электрический ток. В результате этого создается магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого $\mathbf{B}$ постоянен по модулю, ортогонален оси ротора и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью $\Omega > 0$.

3.1. Бестоковая модель асинхронного электромотора. В случае асинхронного электромотора вращающееся магнитное поле статора индуцирует магнитное поле в роторе, и в результате взаимодействия этих двух полей возникает момент $M_1(\dot{\varphi}')$, увлекающий ротор во вращение. Знак этого момента противоположен знаку разности $\dot{\varphi}' - \Omega$.

При $M_1(0) > -M_2(0)$ существует значение $\Omega' \in (0, \Omega)$ угловой скорости ротора $\dot{\varphi}'$, при котором момент трения уравновешивает вращающий момент асинхронного электромотора, то есть суммарный момент $M(\dot{\varphi}') = M_1(\dot{\varphi}') + M_2(\dot{\varphi}')$ для такого электромотора равен нулю при $\dot{\varphi}' = \Omega' < \Omega$. Вместо угловой скорости $\dot{\varphi}'$ удобно ввести переменную $\dot{\gamma} = \dot{\varphi}' - \Omega'$. Тогда суммарный момент M для бестоковой модели асинхронного электромотора становится функцией $M(\dot{\gamma})$ такой, что $\dot{\gamma} M(\dot{\gamma}) < 0$ $(\dot{\gamma} \neq 0)$, $M(0) = 0$.

3.2. Бестоковая модель синхронного электромотора. В рамках упрощенного подхода предполагается, что ротор S' синхронного электромотора имеет неизменно связанное с ним магнитное поле, вектор напряженности которого $\mathbf{B}'$ постоянен по модулю и ортогонален оси ротора. В результате взаимодействия магнитных полей статора и ротора возникает сила, которая стремится совместить концы векторов $\mathbf{B}$ и $-\mathbf{B}'$. Момент M_1, создаваемый этой силой относительно оси ротора, является синусоидальной функцией $M_1(\gamma) = -b_0 \sin\gamma$ $(b_0 > 0)$ угла $\gamma = \varphi' - \Omega t$ между векторами $\mathbf{B}$ и $-\mathbf{B}'$. В результате для суммарного момента $M = M_1 + M_2$ получаем формулу $M = M_2(\dot{\varphi}') - b_0 \sin\gamma$.

Поскольку функция $M_2(\dot{\varphi}')$ – нечетная и монотонно убывающая, при $\dot{\varphi}' = \Omega > 0$ она отрицательна, и поэтому, вводя обозначение $c_0 = -M_2(\Omega)$, имеем $c_0 > 0$. Пользуясь этим обозначением, запишем полученную формулу в виде

$$M = M(\gamma, \dot{\gamma}) = \Delta M_2(\dot{\gamma}) - b_0 \sin\gamma - c_0, \tag{3.1}$$

где $\Delta M_2(\dot{\gamma}) = M_2(\dot{\gamma} + \Omega) + c_0$. Момент $\Delta M_2(\dot{\gamma})$ – диссипативный, так как

$$\dot{\gamma}\Delta M_2(\dot{\gamma}) < 0 \quad (\dot{\gamma} \neq 0), \quad \Delta M_2(0) = 0 \tag{3.2}$$

3.3. Многотоковая модель синхронного электромотора. Рассмотрим многотоковую модель синхронного электромотора, предложенную в [58] и откорректированную в [59]. Так же, как и в п. 3.2, предполагаем, что в статоре электромотора создано магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого постоянен по модулю, ортогонален оси ротора и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью $\Omega > 0$.

В роторе синхронного электромотора имеются две обмотки – демпферная обмотка и обмотка возбуждения. Демпферная обмотка обычно выполнена в виде “беличьего колеса”, то есть в виде двух металлических колец, соединенных металлическими стержнями, ортогональными плоскости каждого из этих колец. Обмотка возбуждения содержит большое число витков электрического провода, и на ее концы через угольные щетки подается постоянное напряжение.

Многотоковая модель синхронного электромотора [58] определяется системой дифференциальных уравнений [59]

$$
\begin{gathered}
A'\ddot{\gamma} = -\mu\dot{\gamma} + \Delta M_2(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin\gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right) - \\
- b_0 \sin\gamma - c_0 \\
L_1 \dot{x} = -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin\gamma \\
L_2 \dot{i}_n = -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right); \quad n = 1, 2, \ldots, n_2
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

с фазовым вектором $(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2})$, где $x, i_1, \ldots, i_{n_2}$ – электрические токи, n_2 – число стержней в демпферной обмотке. Здесь A' – осевой момент инерции ротора, R_1 и L_1 – активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения, а R_2 и L_2 – активное и индуктивное сопротивления стержней демпферной обмотки. В уравнения (3.3) также входят диссипативный момент $\Delta M_2(\dot{\gamma})$, постоянная $c_0 > 0$ и постоянные параметры $\mu, a_1, a_2, b_0 > 0$.

Для многотоковой модели синхронного электромотора правая часть первого из уравнений (3.3) представляет собой суммарный момент M, создаваемый относительно оси ротора силами, действующими на ротор со стороны статора:

$$
\begin{gathered}
M = M(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) = -\mu\dot{\gamma} + \Delta M_2(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin\gamma - \\
- a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right) - b_0 \sin\gamma - c_0
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

4. Первая форма уравнений движения гиростата с электромотором. В этом разделе получена система дифференциальных уравнений движения гиростата с электромотором. Она включает динамические и кинематические уравнения движения системы тел S^0 и S', в которых в качестве переменных взяты проекции ω_1, ω_2, ω_3 и ν_1, ν_2, ν_3 векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ на главные оси тензора инерции $\mathbf{A}$, определенного формулой (2.6). Кроме того, эта система включает уравнение вращения ротора, а в случае многотоковой модели электромотора – и уравнения для электрических токов.

4.1. Уравнения движения тела-носителя с ротором. Чтобы вывести уравнения движения системы тел S^0, S', воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения этой системы относительно неподвижной точки: $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{M}_O$. Здесь $\mathbf{x}$ – суммарный момент количества движения тел S^0, S' относительно неподвижной точки O, $\mathbf{M}_O$ – момент относительно точки O внешних сил, действующих на систему тел S^0 и S'. Момент $\mathbf{M}_O$ равен моменту, создаваемому относительно точки O силой $(m^0 + m')g\boldsymbol{\nu}$ веса обоих тел, приложенной в их общем центре масс C. Этот центр масс определяется вектором $\mathbf{c} = \mathbf{OC} = (m^0\mathbf{c}^0 + m'\mathbf{h})/m$, где $m = m^0 + m'$ – масса всей системы, $\mathbf{c}^0 = \mathbf{OC}^0$, $\mathbf{h} = \mathbf{OC}'$. Следовательно, $\mathbf{M}_O = mg\mathbf{c} \times \boldsymbol{\nu}$, и теорема об изменении момента количества движения выражается векторным уравнением

$$
d'\mathbf{x}/dt = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma \mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{4.1}
$$

где d'/dt – относительная производная по времени в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, $\mathbf{e} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$, $\Gamma = mg|\mathbf{c}|$. Компоненты единичного вектора $\mathbf{e}$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ обозначаются через e_1, e_2, e_3:

$$
\mathbf{e} = e_1\boldsymbol{\xi}_1 + e_2\boldsymbol{\xi}_2 + e_3\boldsymbol{\xi}_3 \tag{4.2}
$$

Запишем векторное уравнение (4.1) в проекциях на оси системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, связанной с телом-носителем S^0. В качестве этой системы координат выберем главные оси тензора инерции $\mathbf{A}$, определенного формулой (2.6). В таких осях для внедиагональных компонент этого тензора имеем $A_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$, а для его диагональных компонент примем обозначения $A_1 = A_{11}$, $A_2 = A_{22}$, $A_3 = A_{33}$. С помощью этих обозначений формула (2.5) записывается в виде

$$\mathbf{x} = \left(A_1\omega_1 + A'p'l_1\right)\xi_1 + \left(A_2\omega_2 + A'p'l_2\right)\xi_2 + \left(A_3\omega_3 + A'p'l_3\right)\xi_3$$

Тогда, принимая во внимание, что $A'\dot{p}' = M$ согласно (2.9), и пользуясь разложениями (2.1), (4.2), получаем из (4.1) три дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= \left(A_2 - A_3\right)\omega_2\omega_3 + A'p'\left(l_2\omega_3 - l_3\omega_2\right) + \\ &+ \Gamma\left(e_2\nu_3 - e_3\nu_2\right) - l_1 M\ \ (1\ 2\ 3) \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.2. Вывод первой формы уравнений движения гиростата с электромотором. Величина p' в уравнениях (4.3) выражается через переменные ω_1, ω_2, ω_3, φ' по формуле (2.7). В случае бестоковой модели асинхронного электромотора вместо $\dot{\varphi}'$ в п. 2.1 введена переменная $\dot{\gamma} = \dot{\varphi}' - \Omega'$, и тогда $p' = \omega_1 l_1 + \omega_2 l_2 + \omega_3 l_3 + \dot{\gamma} + \Omega'$. Для бестоковой и многотоковой моделей синхронного электромотора в п. 2.2, 2.3 введена переменная $\gamma = \varphi' - \Omega t$, пользуясь которой имеем для величины p' выражение $p' = \omega_1 l_1 + \omega_2 l_2 + \omega_3 l_3 + \dot{\gamma} + \Omega$.

Рассматривая случай синхронного электромотора как основной, подставляем это выражение в уравнения (4.3) и получаем следующие динамические уравнения для системы тел S^0, S'

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= \left(A_2 - A_3\right)\omega_2\omega_3 + A'\left(\omega_1 l_1 + \omega_2 l_2 + \omega_3 l_3 + \dot{\gamma} + \Omega\right)\times \\ &\times\left(l_2\omega_3 - l_3\omega_2\right) + \Gamma\left(e_2\nu_3 - e_3\nu_2\right) - l_1 M\ \ (1\ 2\ 3) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Они определяют изменение фазовых переменных ω_1, ω_2, ω_3.

Изменение фазовых переменных γ, $\dot{\gamma}$ определяет уравнение вращения ротора (2.10). Поскольку $\ddot{\varphi}' = \ddot{\gamma}$, это уравнение записывается в виде

$$A'\ddot{\gamma} = -A'\left(l_1\dot{\omega}_1 + l_2\dot{\omega}_2 + l_3\dot{\omega}_3\right) + M \tag{4.5}$$

Чтобы получить уравнения движения гиростата в нормальном виде, следует подставить в правую часть уравнения (4.5) выражения производных $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$, $\dot{\omega}_3$ через фазовые переменные, определяемые формулами (4.4).

Изменение компонент единичного вектора $\mathbf{v}$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ определяют известные кинематические уравнения

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2 \tag{4.6}$$

В случае бестоковой модели синхронного электромотора момент M является функцией $M = M\left(\gamma, \dot{\gamma}\right)$ переменных γ, $\dot{\gamma}$ и представляется по формуле (3.1). В этом случае уравнения (4.4), (4.5), (4.6) эквивалентны замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовым вектором $y = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \gamma,\ \dot{\gamma})$, которая описывает движение тяжелого однороторного гиростата с синхронным электроприводом ротора.

При использовании многотоковой модели синхронного электромотора момент M в (4.5) является функцией (3.4): $M\left(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2}\right)$ не только переменных γ, $\dot{\gamma}$, но и электрических токов $x, i_1, \ldots, i_{n_2}$. Поэтому в случае многотоковой модели синхронного электромотора первая форма уравнений движения гиростата определяется уравнениями (4.4), (4.5), (4.6), к которым добавляются уравнения системы (3.3), описывающие изменение электрических токов $x, i_1, \ldots, i_{n_2}$:

$$
\begin{aligned}
L_1 \dot{x} &= -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin\gamma \\
L_2 \dot{i_n} &= -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right); \quad n = 1, 2, \ldots, n_2
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Она имеет фазовый вектор $y = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \ldots, i_{n_2})$.

5. Вторая форма уравнений движения гиростата с электромотором. Выведем уравнения движения тяжелого гиростата с электромотором, в которых динамические и кинематические уравнения движения системы тел S^0 и S' записаны в проекциях на главные оси тензора инерции $\mathbf{A}^*$, определенного формулой (2.4).

5.1. Вывод второй формы уравнений движения гиростата с электромотором. С помощью тензора $\mathbf{A}^*$ момент количества движения гиростата выражается по формуле (2.3). В качестве осей системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, связанной с телом S^0, выберем главные оси тензора $\mathbf{A}^*$. Тогда для внедиагональных компонент этого тензора имеем $A^*_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$, а для его диагональных компонент принимаем обозначения $A^*_1 = A^*_{11}$, $A^*_2 = A^*_{22}$, $A^*_3 = A^*_{33}$. Проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{v}$ на главные оси тензора $\mathbf{A}^*$ обозначим через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ν_1, ν_2, ν_3. Формула (2.3) в этом случае записывается следующим образом

$$
\mathbf{x} = (A^*_1\omega_1 + A'\dot{\varphi}'l_1)\boldsymbol{\xi}_1 + (A^*_2\omega_2 + A'\dot{\varphi}'l_2)\boldsymbol{\xi}_2 + (A^*_3\omega_3 + A'\dot{\varphi}'l_3)\boldsymbol{\xi}_3 \tag{5.1}
$$

Подставив выражение (5.1) в векторное уравнение (4.1) и воспользовавшись разложениями (2.1), (4.2), получаем вторую форму динамических уравнений

$$
\begin{aligned}
A^*_1\dot{\omega}_1 + A'\ddot{\gamma}l_1 = (A^*_2 - A^*_3)\omega_2\omega_3 + A'(\dot{\gamma} + \Omega)(l_2\omega_3 - l_3\omega_2) + \\
+ \Gamma(e_2\nu_3 - e_3\nu_2) \quad (1\ 2\ 3)
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

Вращение ротора описывается дифференциальным уравнением (4.5). После подстановки в него выражений производных $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$, $\dot{\omega}_3$, определяемых уравнениями (5.2), приходим к следующему уравнению вращения ротора

$$
\begin{aligned}
A'\left(1 - \frac{A'l_1^2}{A^*_1} - \frac{A'l_2^2}{A^*_2} - \frac{A'l_3^2}{A^*_3}\right)\ddot{\gamma} = -A'\Bigg[\frac{l_1}{A^*_1}(A^*_2 - A^*_3)\omega_2\omega_3 + \\
+ \frac{l_2}{A^*_2}(A^*_3 - A^*_1)\omega_3\omega_1 + \frac{l_3}{A^*_3}(A^*_1 - A^*_2)\omega_1\omega_2\Bigg] - A'^2(\dot{\gamma} + \Omega)\times \\
\times\left[\frac{l_1}{A^*_1}(l_2\omega_3 - l_3\omega_2) + \frac{l_2}{A^*_2}(l_3\omega_1 - l_1\omega_3) + \frac{l_3}{A^*_3}(l_1\omega_2 - l_2\omega_1)\right] - \\
- A'\Gamma\left[\frac{l_1}{A^*_1}(e_2\nu_3 - e_3\nu_2) + \frac{l_2}{A^*_2}(e_3\nu_1 - e_1\nu_3) + \frac{l_3}{A^*_3}(e_1\nu_2 - e_2\nu_1)\right] + M
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

Ниже доказана нереализуемость сингулярного случая, когда коэффициент при $\ddot{\gamma}$ в уравнении (5.3) равен нулю. Подставив определяемое этим уравнением выражение $\ddot{\gamma}$ в уравнения (5.2), получим уравнения нормального вида, определяющие изменение переменных ω_1, ω_2, ω_3, которые не приводим из-за их громоздкости.

Изменение переменных ν_1, ν_2, ν_3 описывается уравнениями (4.6).

Итак, вторая форма уравнений движения гиростата с электромотором определяется системой уравнений (5.2), (5.3), (4.6) с добавлением уравнений (4.7) в случае многотоковой модели электромотора.

5.2. Доказательство нереализуемости условия сингулярности. Коэффициент при $\ddot{\gamma}$ в уравнении (5.3) запишем в виде $A'D$, где

$$D = 1 - \frac{A'l_1^2}{A_1^*} - \frac{A'l_2^2}{A_2^*} - \frac{A'l_3^2}{A_3^*} \tag{5.4}$$

Равенство $D = 0$ является условием сингулярности второй формы уравнений движения гиростата с электромотором.

В качестве системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, связанной с телом-носителем S^0, пользуемся системой координат, оси которой являются главными осями тензора $\mathbf{A}^*$. Диагональные компоненты A_{ii}^* $(i = 1,2,3)$ тензора $\mathbf{A}^*$ в этой системе координат обозначены через A_i^*, а его внедиагональные компоненты равны нулю. Компоненты тензора $\mathbf{A}$ в неглавной для него системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ обозначим через $\tilde{A}_{ij}$ $(i, j = 1,2,3)$.

Согласно определениям (2.4), (2.6) тензоров $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}$, величины $\tilde{A}_{ij}$ $(i, j = 1,2,3)$ выражаются по формулам, которые получаются из формул (2.8) для компонент A_{ij}^* $(i, j = 1,2,3)$ тензора $\mathbf{A}^*$ путем отбрасывания членов, содержащих $A'l_il_j$. Следовательно, $\tilde{A}_{ii} = A_i^* - A'l_i^2$ $(i = 1,2,3)$, $\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ji} = -A'l_il_j$ $(i, j = 1,2,3;\ i \neq j)$. Поэтому определитель матрицы $\tilde{A}$ с элементами $\tilde{A}_{ij}$ $(i, j = 1,2,3)$ представляется в виде

$$\det\tilde{A} = A_1^*A_2^*A_3^*\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\varepsilon_1^2}{A_1^*} & -\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{A_1^*} & -\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{A_1^*} \\ -\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{A_2^*} & 1 - \dfrac{\varepsilon_2^2}{A_2^*} & -\dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{A_2^*} \\ -\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{A_3^*} & -\dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{A_3^*} & 1 - \dfrac{\varepsilon_3^2}{A_3^*} \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon_i = l_i\sqrt{A'}$ $(i = 1,2,3)$. Вычислив здесь определитель, с учетом формулы (5.4) для D получаем

$$\det\tilde{A} = A_1^*A_2^*A_3^*\left(1 - \frac{\varepsilon_1^2}{A_1^*} - \frac{\varepsilon_2^2}{A_2^*} - \frac{\varepsilon_3^2}{A_3^*}\right) = A_1^*A_2^*A_3^*D$$

Таким образом, равенство $D = 0$, являющееся условием сингулярности второй формы уравнений движения гиростата с электромотором, означает вырожденность матрицы $\tilde{A}$, элементами которой служат компоненты тензора инерции $\mathbf{A}$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, главной для тензора $\mathbf{A}^*$. Свойство вырожденности матрицы, составленной из компонент тензора $\mathbf{A}$, сохраняется при ортогональных преобразованиях координат. Поэтому при $D = 0$ после перехода к главным осям тензора $\mathbf{A}$ должно равняться нулю произведение его главных диагональных компонент, которые положительны согласно их определению. Следовательно, условие $D = 0$ нереализуемо.

6. Условия существования стационарных движений гиростата с электромотором. В этом разделе найдены условия, при которых система дифференциальных уравнений движения тяжелого однороторного гиростата с электромотором имеет стационарные решения. Они описывают стационарные движения гиростата – состояния покоя и равномерные вращения тела-носителя S^0 вокруг вертикали. Если для вывода таких условий воспользоваться первой формой уравнений движения гиростата (п. 4.2), то это приведет к труднообозримым соотношениям из-за наличия большого числа членов с $A'\omega_i\omega_j$ в правых частях динамических уравнений (4.4). Поэтому удобнее вывести такие условия на основе второй формы уравнений движения гиростата.

В качестве основной будем рассматривать модель гиростата, включающую многотоковую модель синхронного электромотора. Она описывается системой дифференциальных уравнений (4.5), (4.6), (4.7), (5.2). Стационарные решения этой системы определяются набором постоянных значений фазовых переменных

$$\omega_1^0,\ \omega_2^0,\ \omega_3^0,\ \nu_1^0,\ \nu_2^0,\ \nu_3^0,\ \gamma^0,\ \dot\gamma^0,\ x^0,\ i_1^0,\ \ldots,\ i_{n_2}^0$$

Поскольку $\dot\gamma^0 = d\gamma^0/dt = 0$, из уравнений (4.7) для электрических токов следует, что

$$x^0,\ i_1^0,\ \ldots,\ i_{n_2}^0 = 0 \tag{6.1}$$

Поэтому в случае многотоковой модели синхронного электромотора стационарные решения уравнений движения гиростата определяются фазовым вектором

$$y^0 = \left(\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, \nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0, \gamma^0, 0, 0, 0, \ldots, 0\right), \tag{6.2}$$

компоненты которого – постоянные величины.

При таких значениях фазовых переменных уравнение вращения ротора (4.5) удовлетворяется при условии $M = 0$, которое с учетом определения (3.4) момента M и отмеченного в (3.2) равенства $\Delta M_2(0) = 0$ эквивалентно тригонометрическому уравнению

$$b_0 \sin\gamma^0 + c_0 = 0 \quad (b_0, c_0 > 0) \tag{6.3}$$

Далее предполагается, что $c_0/b_0 < 1$. Тогда уравнение (6.3) определяет два счетных набора стационарных значений γ^0 угла γ для многотоковой модели синхронного электромотора:

$$\gamma^0 = \gamma_{1s} = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad \gamma^0 = \gamma_{2s} = \gamma^{(1)} + 2\pi s \quad (s = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

Здесь

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2)$$

Рассмотрим теперь кинематические уравнения (4.6). При постоянных значениях фазовых переменных они принимают вид соотношений

$$\omega_3^0\nu_2^0 - \omega_2^0\nu_3^0 = 0, \quad \omega_1^0\nu_3^0 - \omega_3^0\nu_1^0 = 0, \quad \omega_2^0\nu_1^0 - \omega_1^0\nu_2^0 = 0,$$

которые означают равенство нулю векторного произведения $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}$, то есть выполнение условий

$$\omega_1^0 = \omega^0\nu_1^0, \quad \omega_2^0 = \omega^0\nu_2^0, \quad \omega_3^0 = \omega^0\nu_3^0 \quad (\omega^0 = \mathrm{const}) \tag{6.4}$$

Отсюда следует

Утверждение 1. Стационарное решение (6.2) дифференциальных уравнений движения тяжелого однороторного гиростата с синхронным электромотором либо соответствует состоянию покоя тела-носителя S^0 (при $\omega^0 = 0$), либо оно описывает равномерное вращение тела S^0 в неподвижном пространстве с некоторой угловой скоростью $\omega^0 \neq 0$ вокруг неизменно связанной с этим телом и установленной по вертикали вниз полуоси, направление которой в теле S^0 определяет единичный вектор с компонентами ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0.

Обратившись, наконец, к динамическим уравнениям (5.2), потребуем, чтобы они выполнялись при постоянном значении γ^0 угла γ, постоянных значениях ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0 компонент единичного вектора вертикали и постоянных значениях (6.4) компонент вектора угловой скорости. В результате получаем три соотношения

$$\begin{gathered}(A_2^* - A_3^*){\omega^0}^2\nu_2^0\nu_3^0 + A'\Omega\omega^0(l_2\nu_3^0 - l_3\nu_2^0) + \Gamma(e_2\nu_3^0 - e_3\nu_2^0) = 0 \\ (A_3^* - A_1^*){\omega^0}^2\nu_3^0\nu_1^0 + A'\Omega\omega^0(l_3\nu_1^0 - l_1\nu_3^0) + \Gamma(e_3\nu_1^0 - e_1\nu_3^0) = 0 \\ (A_1^* - A_2^*){\omega^0}^2\nu_1^0\nu_2^0 + A'\Omega\omega^0(l_1\nu_2^0 - l_2\nu_1^0) + \Gamma(e_1\nu_2^0 - e_2\nu_1^0) = 0\end{gathered} \tag{6.5}$$

Таким образом, приходим к следующему выводу.

Утверждение 2. Пусть $y = y^0$ — стационарное решение второй формы уравнений движения однороторного тяжелого гиростата в случае многотоковой модели синхронного электромотора, определенное формулой (6.2). Условиями существования такого решения являются соотношения (6.1), (6.3), (6.4), (6.5).

Замечание 1. При использовании бестоковой модели синхронного электромотора уравнения движения гиростата получаются из уравнений его многотоковой модели, если отбросить уравнения для электрических токов, а в формуле (3.4) для момента M положить $\mu, a_1, a_2 = 0$. Условиями существования стационарных решений таких уравнений являются соотношения (6.3), (6.4), (6.5).

Замечание 2. Уравнения движения гиростата при использовании бестоковой модели асинхронного электромотора формально следуют из уравнений для многотоковой модели синхронного электромотора, если отбросить уравнения для электрических токов, в выражении (3.4) для момента M положить $\mu, a_1, a_2, b_0, c_0 = 0$ и заменить в формулах величину Ω на Ω'. Стационарные решения в этом случае существуют при условии (6.4) и условии (6.5), где вместо Ω используется Ω'.

Соотношения (6.4), (6.5) совпадают с условиями существования стационарных решений уравнений движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой, у которого ротор вращается с постоянной относительной угловой скоростью Ω, но здесь они получены для модели гиростата с электромотором, включающей дифференциальные уравнения для электрических токов.

Основными условиями существования стационарных решений являются соотношения (6.5).

Замечание 3. Легко проверить, что скалярное произведение вектора, компонентами которого служат правые части соотношений (6.5), на вектор с компонентами ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0 тождественно равно нулю. Поэтому одно из соотношений (6.5) выполняется при выполнении двух других.

Отсюда следует, что для описания структуры множества стационарных движений гиростата достаточно получить из трех соотношений (6.5) два независимых соотношения, одно из которых определяет направления полуосей равномерного вращения в теле S^0, то есть величины ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0, а другое определяет соответствующие этим направлениям угловые скорости ω^0 равномерных вращений.

7. Анализ основных условий существования стационарных движений гиростата с электромотором. Анализ соотношений (6.5) проводится известными методами, и его результаты сформулированы ниже в виде утверждений 3—7. Сначала рассмотрен случай, когда $\Gamma = 0$, то есть центр масс гиростата совпадает с неподвижной точкой, а затем рассмотрен случай, когда $\Gamma \neq 0$.

7.1. Случай, когда $\Gamma = 0$. Пусть функции V^*, $\Delta^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0)$ определены формулами

$$
\begin{gathered}
V^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) = (A_2^* - A_3^*)l_1\nu_2^0\nu_3^0 + (A_3^* - A_1^*)l_2\nu_3^0\nu_1^0 + (A_1^* - A_2^*)l_3\nu_1^0\nu_2^0 \\
\Delta^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) = (A_2^* - A_3^*)^2\nu_2^{0^2}\nu_3^{0^2} + (A_3^* - A_1^*)^2\nu_3^{0^2}\nu_1^{0^2} + (A_1^* - A_2^*)^2\nu_1^{0^2}\nu_2^{0^2}
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

При $\Gamma = 0$ соотношения (6.5) переходят в условия равенства нулю трех выражений, которые содержат ω^0 в качестве множителя. Поэтому при $\Gamma = 0$ соотношения (6.5) выполняются в случае, когда $\omega^0 = 0$, а величины ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0 – любые, а также в случае, когда величины ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0, ω^0 удовлетворяют трем равенствам $(A_2^* - A_3^*)\omega^0\nu_2^0\nu_3^0 + A'\Omega(l_2\nu_3^0 - l_3\nu_2^0) = 0$ $(1\ 2\ 3)$. Умножив эти равенства на l_1, l_2, l_3 и сложив, получаем $\omega^0 V^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) = 0$, здесь функция V^* определена в (7.1). Таким образом, при $\Gamma = 0$ существуют два варианта выполнения соотношений (6.5): вариант 1, когда $\omega^0 = 0$, и вариант 2, когда, вообще говоря, $\omega^0 \neq 0$, а величины ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0 удовлетворяют условию $V^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) = 0$. Дальнейший анализ приводит к следующим выводам.

Утверждение 3. Пусть $\Gamma = 0$. Тогда

A) Имеются два варианта выполнения условий (6.5) существования стационарных движений гиростата с электромотором. Вариант 1, когда $\omega^0 = 0$, соответствует состояниям покоя тела S^0 при любых значениях величин ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0, определяющих ориентацию этого тела в неподвижном пространстве. Вариант 2 соответствует равномерному вращению тела S^0 с ненулевой, вообще говоря, угловой скоростью ω^0 вокруг установленной по вертикали вниз полуоси, направление которой в теле S^0 определяют направляющие косинусы ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0, удовлетворяющие условию

$$V^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) = 0 \tag{7.2}$$

B) Если для варианта 2 выполнены равенства

$$(A_2^* - A_3^*)l_1 = 0, \quad (A_3^* - A_1^*)l_2 = 0, \quad (A_1^* - A_2^*)l_3 = 0, \tag{7.3}$$

то $V^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) \equiv 0$ согласно (7.1), и тогда направление полуоси равномерного вращения в теле S^0 может быть любым.

C) Если для варианта 2 не выполнено хотя бы одно из равенств (7.3), то условие (7.2) определяет в теле S^0 конус второго порядка – конус осей (пар противоположно направленных полуосей), вокруг которых может происходить вертикальное равномерное вращение этого тела с угловой скоростью ω^0, вообще говоря, отличной от нуля.

D) Для каждого набора значений $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$, удовлетворяющих условию (7.2), угловая скорость ω^0 равномерного вращения при $\Delta^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) \neq 0$ определена однозначно и выражается по формуле

$$
\begin{gathered}
\omega^0 = \frac{A'\Omega}{\Delta^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0)}[(A_2^* - A_3^*)\nu_2^0\nu_3^0(l_2\nu_3^0 - l_3\nu_2^0) + \\
+ (A_3^* - A_1^*)\nu_3^0\nu_1^0(l_3\nu_1^0 - l_1\nu_3^0) + (A_1^* - A_2^*)\nu_1^0\nu_2^0(l_1\nu_2^0 - l_2\nu_1^0)],
\end{gathered}
$$

при этом для соответствующего набора значений $-\nu_1^0$, $-\nu_2^0$, $-\nu_3^0$, согласно этой формуле, угловая скорость равномерного вращения имеет противоположный знак.

E) В случае, когда для набора значений $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$, удовлетворяющего соотношению (7.2), выполнено равенство $\Delta^*(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) = 0$, равномерное вращение существует при $l_2\nu_3^0 - l_3\nu_2^0 = 0$, $l_3\nu_1^0 - l_1\nu_3^0 = 0$, $l_1\nu_2^0 - l_2\nu_1^0 = 0$, то есть при $\mathbf{l} \times \boldsymbol{\nu}^0 = 0$, и его угловая скорость ω^0 может быть любой.

Кроме условия (7.2), величины $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$, должны удовлетворять условию ${\nu_1^0}^2 + {\nu_2^0}^2 + {\nu_3^0}^2 = 1$.

Определение (7.2) направлений осей равномерных вращений гиростата при $\Gamma = 0$ по форме аналогично определению [27, 28] конуса Штауде, то есть конуса осей равномерных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, но отличается от него тем, что в определение конуса Штауде вместо параметров A_1^*, A_2^*, A_3^*, l_1, l_2, l_3 входят параметры A_1^0, A_2^0, A_3^0, e_1, e_2, e_3.

7.2. Случай, когда $\Gamma \neq 0$. При $\Gamma \neq 0$ сразу выделим вариант, когда $\omega^0 = 0$. Непосредственно из условий (6.5) получаем такой результат.

Утверждение 4. При $\Gamma \neq 0$ вариант $\omega^0 = 0$, соответствующий состоянию покоя гиростата, имеет место, когда

$$e_2\nu_3^0 - e_3\nu_2^0 = 0, \quad e_3\nu_1^0 - e_1\nu_3^0 = 0, \quad e_1\nu_2^0 - e_2\nu_1^0 = 0,$$

то есть $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}^0 = 0$. Это означает, что центр масс гиростата находится на вертикали над неподвижной точкой O или под этой точкой.

Рассмотрим теперь вариант, когда $\omega^0 \neq 0$ в случае $\Gamma \neq 0$. Чтобы вывести соотношение, связывающее $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$, сначала умножим равенства (6.5) на e_1, e_2, e_3 и сложим. Приходим к соотношению,

$$\omega^0 S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) - A'\Omega\Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) = 0, \tag{7.4}$$

содержащему ω^0 в первой степени. Здесь приняты обозначения

$$S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) = (A_2^* - A_3^*)e_1\nu_2^0\nu_3^0 + (A_3^* - A_1^*)e_2\nu_3^0\nu_1^0 + (A_1^* - A_2^*)e_3\nu_1^0\nu_2^0 \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}\Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) = \boldsymbol{\nu}^0 \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{e}) = -e_1\left(l_2\nu_3^0 - l_3\nu_2^0\right) - e_2\left(l_3\nu_1^0 - l_1\nu_3^0\right) - \\ - e_3\left(l_1\nu_2^0 - l_2\nu_1^0\right)\end{aligned} \tag{7.6}$$

Получим теперь из равенств (6.5) соотношение, содержащее ω^0 только во второй степени. Для этого умножим равенства (6.5) на l_1, l_2, l_3 и сложим. Приходим к соотношению

$${\omega^0}^2 V^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) + \Gamma\Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) = 0, \tag{7.7}$$

где функция $V^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)$ определена в (7.1).

Проанализируем соотношения (7.4), (7.7) и получим из них условия, определяющие значения ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0 и соответствующие им значения ω^0.

Утверждение 5. Пусть $\Gamma \neq 0$ и $\omega^0 \neq 0$. Вырожденный случай, когда выполняется тождественное равенство $S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \equiv 0$, имеет место при условиях

$$(A_2^* - A_3^*)e_1 = 0, \quad (A_3^* - A_1^*)e_2 = 0, \quad (A_1^* - A_2^*)e_3 = 0, \tag{7.8}$$

которые следуют из (7.5). Если условия (7.8) выполнены, то соотношение (7.4) имеет место только при дополнительном условии $\Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \equiv 0$, то есть, согласно (7.6), при

$$l_1 = l^0 e_1, \quad l_2 = l^0 e_2, \quad l_3 = l^0 e_3 \quad \left(l^0 = \pm 1\right)$$

Тогда, согласно (7.1), (7.5), (7.6), в этом случае имеем $S^*, \Pi^*, V^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \equiv 0$, и поэтому оба соотношения (7.4), (7.7) выполняются при любых значениях $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$ и ω^0.

Для варианта, когда $\Gamma \neq 0$ и $\omega^0 \neq 0$, рассмотрим теперь общий невырожденный случай, когда $S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \not\equiv 0$, то есть не выполнено хотя бы одно из условий (7.8). В этом случае функция $S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)$ обращается в нуль лишь при некоторых значениях своих аргументов, но не исключено, что $\Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \equiv 0$.

Сначала рассмотрим особый подслучай общего невырожденного случая.

Утверждение 6. Пусть $\Gamma \neq 0$ и $\omega^0 \neq 0$. Особый подслучай общего невырожденного характеризуется тем, что $S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \not\equiv 0$, но $S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) = 0$ при некоторых особых значениях $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$. Для этих значений соотношения (7.4), (7.7), определяющие направления полуосей и угловые скорости равномерных вращений, выполнены лишь при $\Pi^*, V^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) = 0$, и тогда соотношениям (7.4), (7.7) удовлетворяет любое значение ω^0.

Рассмотрим, наконец, общий неособый подслучай невырожденного случая, когда при данных значениях $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$ выполнено неравенство $S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \neq 0$. Так как, по предположению, $\omega^0 \neq 0$, то из (7.4) следует, что в этом подслучае выполняется также неравенство

$$\Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \neq 0, \tag{7.9}$$

а угловая скорость ω^0 однозначно определяется по формуле

$$\omega^0 = \frac{A'\Omega\Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)}{S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)} \tag{7.10}$$

Подставив это выражение в (7.7), приходим к соотношению, которое с учетом неравенства (7.9) записывается в виде

$$\Gamma S^{*2}\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) + (A'\Omega)^2 \Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) V^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) = 0 \tag{7.11}$$

Запишем соотношение (7.11) в виде

$$\frac{A'\Omega\Pi^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)}{S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)} = -\frac{\Gamma}{A'\Omega} \frac{S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)}{V^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)}$$

С учетом (7.10) следует, что угловая скорость равномерного вращения выражается также по формуле

$$\omega^0 = -\frac{\Gamma}{A'\Omega}\frac{S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)}{V^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right)} \tag{7.12}$$

Утверждение 7. Пусть $\Gamma \neq 0$ и $\omega^0 \neq 0$. Пусть компоненты $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$ единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\nu}^0$ в главных осях тензора инерции $\mathbf{A}^*$ удовлетворяют неравенству $S^*\left(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0\right) \neq 0$ и условию (7.11). Тогда полуось, определяемая в теле S^0 вектором $\boldsymbol{\nu}^0$ с такими компонентами, является полуосью равномерного вращения тела S^0, если оно установлено так, что эта полуось направлена по вертикали вниз. Угловая скорость этого равномерного вращения выражается по любой из формул (7.10) или (7.12).

Левая часть соотношения (7.11) является суммой однородных полиномов четвертой и третьей степени по отношению к $\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0$. Это соотношение определяет в теле-носителе S^0 неизменно связанную с ним поверхность четвертого порядка. Пересечение поверхности (7.11) с единичной сферой $\nu_1^{0^2} + \nu_2^{0^2} + \nu_3^{0^2} = 1$ определяет неизменно связанную с телом-носителем S^0 кривую, называемую сферической линией. Конус с вершиной в точке O, направляющей линией которого служит сферическая линия, является конусом полуосей равномерных вращений гиростата. Геометрическое место концов векторов угловой скорости равномерного вращения в теле S^0 называется направляющей линией.

8. Сравнение условий существования стационарных движений гиростата с электромотором и без электромотора. В большинстве работ, посвященных динамике тяжелого гиростата без электромотора, имеющего неподвижную точку, рассматриваются две модели гиростата. Первая из этих моделей основана на предположении, что динамически и статически уравновешенный ротор вращается с постоянной относительной угловой скоростью вокруг своей оси симметрии, фиксированной в теле-носителе. Другая модель гиростата основана на предположении, что ротор вращается по инерции без трения. Обе эти модели описываются одинаковыми по форме уравнениями движения, отличающимися определением тензора инерции, и поэтому обычно подразумевается, что результаты, полученные с помощью таких уравнений, справедливы для обеих моделей. Это относится и к уравнению, определяющему направления полуосей равномерных вращений гиростата, полученному в [2, 10] и, позже, в [13]. Однако между этими двумя известными моделями гиростата имеется различие, которое необходимо учитывать при определении полуосей равномерных вращений.

На примере однороторного тяжелого гиростата с неподвижной точкой рассмотрим подробнее вопрос об условиях существования стационарных движений для двух указанных моделей гиростата, основываясь на полученных выше уравнениях его движения.

8.1. Условия существования стационарных движений гиростата с ротором, вращающимся с фиксированной угловой скоростью. Уравнения движения тяжелого гиростата с ротором, вращающимся с фиксированной относительной угловой скоростью Ω, получаются из второй формы уравнений движения гиростата с синхронным электромотором, то есть из уравнений (5.2), (5.3), (4.6), (4.7), если отбросить уравнение вращения ротора (5.3) и уравнения для электрических токов (4.7) и положить $\ddot{\gamma} = 0$ в динамических уравнениях (5.2). Получившаяся из (5.2), (4.6) система дифференциальных уравнений является результатом проектирования на главные оси тензора $\mathbf{A}^*$ известных векторных уравнений

$$\mathbf{A}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}^*) \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma \mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega} \tag{8.1}$$

Здесь $\mathbf{A}^*$ – тензор, определенный формулой (2.4), $\boldsymbol{\lambda}^* = A'\Omega \mathbf{l}$ – гиростатический момент.

Стационарные решения этой системы соответствуют значениям ω_1^0, ω_2^0, ω_3^0, ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0 фазовых переменных, при которых ее правые части обращаются в нуль.

Из условий обращения в нуль правых частей скалярных уравнений, соответствующих векторному кинематическому уравнению $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}$, следуют уже полученные выше выражения (6.4) для $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0$. В результате их подстановки в скалярные уравнения (5.2), соответствующие входящему в (8.1) векторному динамическому уравнению, условия обращения в нуль правых частей динамических уравнений принимают тот же вид (6.5), что и для гиростата с синхронным электромотором.

Поэтому для тяжелого гиростата с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью Ω, направляющие косинусы ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0 полуосей равномерного вращения и угловые скорости ω^0 равномерного вращения определены теми же формулами (7.11), (7.10), что и для гиростата с синхронным электромотором, в котором угловая скорость вращения магнитного поля в статоре равна Ω.

Сферическая и направляющая линии для этого случая изучены в [11, 12].

8.2. Условия существования стационарных движений гиростата с ротором, вращающимся по инерции без трения. Уравнение вращения ротора S' получено выше в форме (2.9): $A'\dot{p}' = M$. Здесь M – момент, создаваемый относительно оси ротора силами, действующими на ротор со стороны тела-носителя S^0, а величина p' определяется формулой (2.7). Для модели гиростата с ротором, вращающимся по инерции без трения, имеем $M = 0$. Тогда $p'(t) = p'(t_0)$ при $t \geq t_0$, то есть величина p' является интегралом движения.

Поэтому уравнения движения гиростата с ротором, вращающимся по инерции без трения, следуют из первой формы уравнений движения гиростата с электромотором, а именно, из уравнений (4.3), (4.6), если положить в них $M = 0$. Они получаются также путем проектирования на главные оси тензора $\mathbf{A}$ векторных уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma \mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega},$$

которые имеют тот же вид, что и уравнения (8.1). Их отличие от уравнений (8.1) состоит в том, что вместо тензора $\mathbf{A}^*$ и вектора $\boldsymbol{\lambda}^* = A'\,\Omega\,\mathbf{l}$ здесь используются тензор $\mathbf{A}$, определенный формулой (2.6), и вектор $\boldsymbol{\lambda} = A'p'\mathbf{l}$.

Отсюда следует, что для гиростата с вращающимся по инерции ротором конус полуосей равномерных вращений и угловые скорости равномерных вращений определяются формулами такого же вида, как формулы (7.11), (7.10) для гиростата с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью. Но вместо моментов инерции A_1^*, A_2^*, A_3^* в эти формулы входят моменты инерции A_1, A_2, A_3, а вместо фиксированной угловой скорости Ω в них входит угловая скорость p', определяемая начальными условиями. Таким образом, при использовании первой формы уравнений движения, с тензором $\mathbf{A}$, для гиростата с вращающимся по инерции ротором вместо фиксированного в теле-носителе конуса полуосей равномерных вращений в общем случае существует семейство таких конусов, зависящих как от параметра от величины p'.

Условия существования стационарных движений гиростата с вращающимся по инерции ротором и уравнение конуса полуосей его равномерных вращений можно также получить, воспользовавшись второй формой уравнений движения гиростата, а именно уравнениями (5.2), (4.5), (4.6), взятыми при $M = 0$. В этом случае, в отличие от гиростата с электромотором, нет выделенной угловой скорости вращения ротора, и поэтому в уравнениях (5.2), (4.5) следует заменить $\dot{\gamma} + \Omega$, $\ddot{\gamma}$ на $\dot{\varphi}'$, $\ddot{\varphi}'$.

Пусть в некоторый момент времени t_0 для полученной таким образом системы уравнений движения гиростата заданы начальные значения ее фазовых переменных: $\omega_i(t_0) = \omega_i^0$, $\nu_i(t_0) = \nu_i^0$ $(i = 1, 2, 3)$, $\dot{\varphi}'(t_0) = \Omega^0$.

Они определяют стационарное движение гиростата, если такие постоянные значения фазовых переменных удовлетворяют всем уравнениям движения (5.2), (4.5), (4.6), в которых $M = 0$, а $\dot{\gamma} + \Omega$, $\ddot{\gamma}$ заменены на $\dot{\varphi}'$, $\ddot{\varphi}'$. Для уравнений (5.2) это означает выполнение условий

$$(A_2^* - A_3^*)\omega_2^0\omega_3^0 + A'^{\Omega^0}\left(l_2\omega_3^0 - l_3\omega_2^0\right) + \Gamma\left(e_2\nu_3^0 - e_3\nu_2^0\right) = 0 \quad (1\ 2\ 3), \tag{8.2}$$

а для уравнений (4.6) — выполнение условий

$$\omega_3^0\nu_2^0 - \omega_2^0\nu_3^0 = 0\ (1\ 2\ 3) \tag{8.3}$$

Уравнение вращения ротора (4.5) в случае $M = 0$ удовлетворяется при любых постоянных значениях фазовых переменных.

Из соотношений (8.3) следуют выражения (6.4). Подставив их в соотношения (8.2), получаем условия существования стационарных движений гиростата с ротором, вращающимся по инерции без трения. По форме они совпадают с полученными выше условиями (6.5) существования стационарных движений гиростата с синхронным электромотором, которые, в свою очередь, совпадают с условиями существования стационарных движений для гиростата с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью. Существенное отличие этих условий от условий (6.5) состоит в том, что вместо фиксированной относительной угловой скорости Ω вращения ротора в них входит произвольное начальное значение Ω^0 этой угловой скорости.

Таким образом, при использовании второй формы уравнений движения, с тензором $\mathbf{A}^*$, для гиростата с вращающимся по инерции ротором вместо фиксированного в теле-носителе конуса полуосей равномерных вращений в общем случае существует семейство таких конусов, зависящих от величины $\Omega^0 = \dot{\varphi}'(t_0)$ как от параметра.

Заключение. В статье дана математическая постановка задачи о движении однороторного гиростата с неподвижной точкой, помещенного в поле силы тяжести и снабженного электромотором, который поддерживает вращение ротора при наличии момента сил трения относительно его оси. Связь, реализующая неподвижную точку, предполагается идеальной. Рассмотрены три модели электромотора: бестоковые модели асинхронного и синхронного электромотора и многотоковая модель синхронного электромотора. Дифференциальные уравнения движения гиростата с электромотором получены в двух формах, соответствующих двум определениям тензора инерции в неподвижной точке. В случае многотоковой модели синхронного электромотора эти уравнения включают уравнения для электрических токов.

Проанализированы условия, при которых существуют стационарные решения таких дифференциальных уравнений. Эти решения описывают стационарные движения гиростата — состояния покоя и равномерные вращения тела-носителя вокруг вертикали. Установлено, что в общем случае направления полуосей равномерных вращений гиростата с электромотором образуют в теле-носителе конус, совпадающий с конусом полуосей равномерных вращений для известной модели гиростата с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч. I. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. 221 с.
3. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
4. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
5. *Гашененко И.Н., Мозалевская Г.В., Ткаченко Д.Н.* Об одном решении Харламовой–Мозалевской уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. 2012. Вып. 42. С. 37–45.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Об одном классе движений гиростата Жуковского с переменным гиростатическим моментом // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 3–9.
7. *Зыза А.В., Ткаченко Д.Н.* Полиномиальные решения в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. 2016. Вып. 46. С. 55–63.
8. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2017. 424 с.
9. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Уравнения движения тяжелого гиростата // Вестн. Таганрогского пед. ин-та им. А.П. Чехова. 2019. № 1. С. 321–323.
10. *Харламов П.В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 373–375.
11. *Анчев А.О.* О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 49–58.
12. *Ковалев А.М., Киселев А.М.* О конусе осей равномерного вращения гиростата // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 36–45.
13. *Цодокова Н.С.* О перманентных осях вращения гиростата с закрепленной точкой // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 6. С. 1104–1107.
14. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
15. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. 2009. Вып. 39. С. 42–49.
16. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Прецессионные и изоконические движения твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. 2015. Вып. 45. С. 26–39.
17. *Горр Г.В., Балаклицкая Т.В.* Исследование асимптотических к покою движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. 2020. Вып. 50. С. 11–23.
18. *Горр Г.В., Балаклицкая Т.В., Ткаченко Д.Н.* Об асимптотически равномерных движениях гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. 2020. Вып. 50. С. 24–42.
19. *El-Gohary A.* Chaos and optimal control of steady-state rotation of a satellite-gyrostat on a circular orbit // Chaos, Solitons and Fractals. 2009. V. 42. Iss. 5. P. 2842–2851.
20. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Хаотическая динамика неуравновешенного гиростата // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 5. С. 734–750.
21. *Асланов В.С., Юдинцев В.В.* Динамика и управление хаосом асимметричных спутников гиростатов // Космич. исслед. 2014. Т. 52. № 3. С. 229–241.
22. *Doroshin A.V.* Images of chaos in attitude dynamics of multi-spin spacecraft and gyrostat satellites // J. Dyn.&Vibroac. 2015. V. 2. № 2. P. 16–26.

23. *Гашененко И.Н.* Бифуркации интегральных многообразий в задаче о движении тяжелого гиростата // Нелин. дин. 2005. Т. 1. № 1. С. 33–52.

24. *Харламов М.П.* Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелин. дин. 2007. Т. 3. № 3. С. 331–348.

25. *Харламов М.П., Рябов П.Е., Харламова И.И.* Топологический атлас гиростата Ковалевской–Яхья // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2016. Т. 128. С. 3–146.

26. *Соколов С.В.* Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата // Докл. РАН. 2017. Т. 477. № 6. С. 660–663.

27. *Дружинин Э.И.* Устойчивость стационарных движений гиростатов // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1966. Вып. 92. С. 12–23.

28. *Галиуллин И.А.* Решение задачи об устойчивости регулярных прецессий симметричного гиростата в ньютоновском поле // Космич. исслед. 2011. Т. 49. № 2. С. 182–184.

29. *Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.* О движениях гиростата на многообразии // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2017. № 3 (55). С. 17–22.

30. *Безгласный С.П., Красников В.С.* Стабилизация программных движений однороторного гиростата с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Автоматизация процессов управления. 2016. Т. 44. № 2. С. 70–76.

31. *Сарычев В.А., Мирер С.А., Дегтярев А.А.* Динамика спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции // Космич. исслед. 2008. Т. 46. № 1. С. 61–74.

32. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Положения равновесия и их устойчивость // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 3. С. 356–368.

33. *Банщиков А.В., Чайкин С.В.* Анализ устойчивости относительных равновесий вытянутого осесимметричного гиростата средствами символьно-численного моделирования // Космич. исслед. 2015. Т. 53. № 5. С. 414–420.

34. *Банщиков А.В.* Символьно-численный анализ необходимых условий устойчивости относительных равновесий вытянутого осесимметричного гиростата // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 2 (50). С. 24–28.

35. *Гутник С.А., Сантуш Л., Сарычев В. А., Силва А.* Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента; положения равновесия и их устойчивость // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 142–155.

36. *Сазонов В.В.* Периодические движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 2. С. 145–158.

37. *Панкратов А.А.* Периодические и условно-периодические движения спутника-гиростата под действием гравитационного момента на круговой орбите // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 7 (7). С. 139–151.

38. *Тихонов А.А., Тхай В.Н.* Симметричные колебания в задаче о вращательном движении гиростата на слабоэллиптической орбите в гравитационном и магнитном полях // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2015. Т. 2 (60). Вып. 2. С. 278–286.

39. *Burov A.A.* On Collinear Relative Equilibrium of Tethered Gyrostat in a Central Newtonian Field. Wien: Institut Mechanik, Technische Universitat. 1996. 32 p.

40. *Евдокименко А.П.* Об установившихся движениях гиростата, подвешенного на стержне в центральном гравитационном поле // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 219–225.

41. *Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И., Закржевский А.Е., Пироженко А.В., Трогер Г., Хорошилов В.С.* Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. М.; Ижевск: НИЦ “РХД”. 2007. 560 с.

42. *Алексеев А.В.* Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости // Мех. и машиностр. 2007. Т. 9. № 3. С. 671–676.

43. *Белецкий В.В., Чайкин С.В.* Учет перемещения центра масс гиростата с упругим стержнем при анализе устойчивости семейства его равновесий // Вестн. МГУ им. М.В. Ломоносова. Сер.: Мат., мех. 2006. № 1. С. 42–47.

44. *Чайкин С.В.* Стабилизация нетривиальных относительных равновесий гиростата с упругим элементом на круговой орбите // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 791–800.

45. *Русанов В.А., Данеев А.В., Куменко А.Е.* Структурно-параметрическая идентификация упругого элемента спутника-гиростата // Изв. Самарского НЦ РАН. 2014. Т. 16. № 6. С. 305–311.

46. *Буров А.А.* О консервативных методах управления вращением гиростата // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 270–282.

47. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К нелинейной задаче трехосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 2. С. 412–418.

48. *Алексеев А.В.* Исследование ориентационного движения трехроторного гиростата на основе асимптотических методов // Вестн. ИжГТУ. 2015. № 2 (66). С. 23–26.

49. *Харламов С.А.* О движении гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента вокруг оси собственного вращения // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 2. С. 327–330.

50. *Харламов С.А.* К теории астатического гироскопа с электроприводом, установленного в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. 1963. № 6. С. 45–54.

51. *Крементуло В.В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента относительно оси ротора // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. 1965. № 3. С. 156–159.

52. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.

53. *Коносевич Б.И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. 1977. Вып. 9. С. 61–73.

54. *Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. 2005. Вып. 35. С. 115–123.

55. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 57–73.

56. *Konosevich B., Konosevich Yu.* Global attraction of steady motions of a gimbal-mounted asynchronous gyroscope // Nonlin. Dyn. 2015. V. 79. № 3. P. 2005–2015.

57. *Леонов Г.А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автом. и телемех. 2006. № 10. С. 47–85.

58. *Леонов Г.А., Зарецкий А.М.* Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 18–27.

59. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 74–85.

60. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многотоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 1 // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 124–141.

61. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многотоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 2 // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 50–68.

62. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Модель электродвигателя в теории гироскопов // Тр. ин-та прикл. математики и механики. 2008. Вып. 17. С. 88–95.

63. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. Reine und Angew. Math. 1894. V. 113. № 4. P. 318–334.

64. *Холостова О.В.* Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2008. 128 с.

Gyrostat with the Electric Motor: Mathematical Model and Stationary Motions

B. I. Konosevich[a,#] **and Yu. B. Konosevich**[a,#]

[a]*Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, DPR*

[#]*e-mail: konos.donetsk@yandex.ru*

The article presents a mathematical model of a single-rotor gyrostat with a fixed point, placed in the gravity field and supplied with the electric motor, which sustains the spin of the rotor in the presence of the dissipative moment on its axis. It is assumed also that the dissipative moment is equal to zero in the spherical hinge realizing the fixed point. Three models of the electric motor are considered. They are the no-current models of the asynchronous and synchronous electric motor and the multiple-current model of the synchronous electric motor. Two forms of differential equations of motion are derived for the gyrostat with the electric motor. They correspond to two definitions of its inertia tensor.
Existence conditions are found and analyzed for stationary (steady-state) solutions of equations of motion of this electromechanical system. These solutions describe stationary motions of the system, namely, permanent rotations of the carrier body about the vertical line and its equilibrium states. It is shown that half-axes of permanent rotations of the gyrostat with the electric motor form in the carrier body a cone coinciding with the cone of half-axes or permanent rotations for the well-known model of the gyrostat with the uniformly spinning rotor.

Keywords: gyrostat, inertia tensor, asynchronous and synchronous electric motor, stationary motion, cone of half-axes of permanent rotations

REFERENCES

1. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. Nuova ed. Vol. 2. Pt. 2. Bologna: Zanichelli, 1952. 530 p.
2. *Kharlamov P.V.* Lectures on Rigid Body Dynamics. Part 1. Novosibirsk: Novosibirsk State Univ., 1965. 221 p. (in Russian)
3. *Kharlamov P.V.* On equations of motion of rigid bodies systems // Rigid Body Mech., 1972, vol. 4, pp. 52–73. (in Russian)
4. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kiev: Nauk. Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
5. *Gashenenko I.N., Mozalevskaya G.V., Tkachenko D.N.* On one Mozalevskaya–Kharlamova solution to equations of motion of a gyrostat // Rigid Body Mech., 2012, vol. 42, pp. 37–45. (in Russian)
6. *Gorr G.V., Maznev A.V.* On one class of motions of Zhukovskii gyrostat with the variable gyrostatic moment // Mech. Solids, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 237–242.
7. *Zyza A.V., Tkachenko D.N.* Polynomial solutions in the problem on motion of a gyrostat in the magnetic field // Rigid Body Mech., 2016, vol. 46, pp. 55–63. (in Russian)
8. *Gorr G.V.* Invariant Relations of Equations of Rigid Bodies Dynamics (Theory, Results, Comments). Moscow; Izhevsk: Inst. Comp. Invest., 2017. 424 p. (in Russian)
9. *Gorr G.V., Ilyukhin A.A.* Equations of motion of a heavy gyrostat // Bull. Chekhov Taganrog Pedag. Inst., 2019, no. 1, pp. 321–333. (in Russian)
10. *Kharlamov P.V.* On permanent rotations of a body having a fixed point // Appl. Math. Mech., 1965, vol. 29, no. 2. pp, 373–375. (in Russian)
11. *Anchev A.O.* On permanent rotations of a heavy gyrostat having a fixed point // Appl. Math. Mech., 1967, vol. 31, no. 1, pp. 49–58. (in Russian)
12. *Kovalev A.M., Kiselyov A.M.* On the cone of permanent rotations of a gyrostat // Rigid Body Mech., 1972, vol. 4, pp. 36–45. (in Russian)
13. *Tsodokova N.S.* On permanent rotations of a gyrostat with a fixed point // Appl. Math. Mech., 1965, vol. 29, no. 6, pp. 1104–1107. (in Russian)
14. *Gorr G.V.* Precessional motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of systems of coupled rigid bodies // Appl. Math. Mekh., 2003, vol. 67, no. 4, pp. 573–587. (in Russian).

15. *Volkova O.S., Gashenenko I.N.* Pendulous rotations of a heavy gyrostat with the variable gyrostatic moment // Rigid Body Mech., 2009, vol. 39, pp. 42–49. (in Russian)

16. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Precession and isoconical motions of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces // Rigid Body Mech., 2015, vol. 45, pp. 26–39. (in Russian)

17. *Gorr G.V., Balaklitskaya T.V.* Investigation of asymptotic to rest motions of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces // Rigid Body Mech., 2020, vol. 50, pp. 11–23. (in Russian)

18. *Gorr G.V., Balaklitskaya T.V., Tkachenko D.N.* On asymptotically steady rotations of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces // Rigid Body Mech., 2020, vol. 50, pp. 24–42. (in Russian)

19. *El-Gohary A.* Chaos and optimal control of steady-state rotation of a satellite-gyrostat on a circular orbit // Chaos, Solitons and Fractals, 2009, vol. 42, no. 5, pp. 2842–2851.

20. *Aslanov V.S., Doroshin A.V.* Chaotic dynamics of an unbalanced gyrostat // AMM, 2010, vol. 74, no. 5, pp. 524–535.

21. *Aslanov V.S., Yudintsev V.V.* Dynamics and chaos control of asymmetric gyrostat satellites // Cosmic Res., 2014, vol. 52, no. 3, pp. 216–228.

22. *Doroshin A.V.* Images of chaos in attitude dynamics of multi-spin spacecraft and gyrostat satellites // J. Dyn.&Vibroac., 2015, vol. 2, no. 2, pp. 16–26.

23. *Gashenenko I.N.* Bifurcations of integral manifolds in the problem on motion of a heavy gyrostat // Nonlin. Dyn., 2005, vol. 1, no. 1, pp. 33–52. (in Russian)

24. *Kharlamov M.P.* Critical subsystems of Kovalevskaya gyrostat in two static fields // Nonlin. Dyn., 2007, vol. 3, no. 3, pp. 331–348. (in Russian)

25. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Kharlamova I.I.* Topological atlas of Kovalevskaya–Yehia gyrostat // Overall Results of Sci.&Engng. Ser. Modern Math.& Its Appl.. Subject Surveys, 2016, vol. 128, pp. 3–146. (in Russian)

26. *Sokolov S.V.* New invariant relations of one critical subsystem of generalized two-field gyrostat // Dokl. RAN, 2017, vol. 477, no. 6, pp. 660–663. (in Russian)

27. *Druzhinin E.I.* Stability of steady motions of gyrostats // Proc. of Kazan Aviation Inst., 1966, vol. 92, pp. 12–23.

28. *Galiullin I.A.* Solution to the problem on stability of regular precessions of a symmetric gyrostat in the Newtonian field // Cosmic Res., 2011, vol. 49, no. 2, pp. 182–184.

29. *Irtegov V.D., Titorenko T.N.* About motions of the gyrostat on a manifold // Modern Technol. Syst. Anal. Modeling, 2017., vol. 3, no. 55, pp. 17–22. (in Russian)

30. *Bezglasnyi S.P., Krasnikov V.S.* Stabilization of program motions of a single-rotor gyrostat with a cavity filled with viscous fluid // Autom. Manag. Proc., 2016., vol. 4, no. 2, pp. 70–76. (in Russian)

31. *Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A.* Dynamics of a gyrostat satellite with the vector of gyrostatic moment in the principle plane of inertia // Cosmic Res., 2008, vol. 46, no. 1, pp. 60–73.

32. *Gutnik S.A., Sarychev V.A.* Dynamics of an axisymmetric gyrostat. Equilibrium positions and their stability // JAMM, 2014, vol. 78, no. 3, pp. 249–257.

33. *Banshchikov A.V., Chaikin S.V.* Analysis of the stability of relative equilibriums of a prolate axisymmetric gyrostat by symbolic-numerical modeling // Cosmic Res., 2015, vol. 53, no. 5, pp. 378–384.

34. *Banshchikov A.V.* Symbolic-numerical analysis of necessary conditions of the stability of relative equilibriums of a prolate axisymmetric gyrostat // Modern Technol. Syst. Anal. Modeling, 2016, vol. 2, no. 50, pp. 24–28. (in Russian)

35. *Gutnik S.A., Santos L., Silva A., Sarychev V.A.* Dynamics of a gyrostat satellite subjected to the action of gravity moment. Equilibrium attitudes and their stability // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2015, vol. 54, no. 3, pp. 469–482.

36. *Sazonov V.V.* Periodic motions of a satellite-gyrostat relative to its center of mass under the action of gravitational torque // Cosmic Res., 2013, vol. 51, no. 2, pp. 133–146.

37. *Pankratov A.A.* Periodic and conditionally periodic motions of a satellite-gyrostat under gravitational moment on the circular orbit // Bull. BMSTU, 2012, vol. 7, no. 7, pp. 39–151. (in Russian)

38. *Tikhonov A.A., Tkhai V.N.* Symmetrical oscillations in the problem of gyrostat attitude motion in a weakly elliptical orbit in gravitational and magnetic fields // Vestn. St. Petersburg Univ.: Math., 2015, vol. 48, no. 2, pp. 119–125.

39. *Burov A.A.* On Collinear Relative Equilibrium of Tethered Gyrostat in a Central Newtonian Field. Wien: Institut Mechanik, Technische Universitat. 1996. 32 p.

40. *Yevdokimenko A.P.* On the steady motions of the tethered gyrostat in the central gravitational field // Appl. Math.&Mech., 2005, vol. 69, no. 2, pp. 219–225. (in Russian)

41. *Alpatov A.P., Beletskii V.V., Dranovskii V.I., Zakrzhevskii A.E., Pirozhenko A.V., Troger G., Khoroshilov V.S.* Dynamics of Space Systems with Cable and Articulated Joints. Moscow; Izhevsk: R.&C. Dyn., 2007, 560 p. (in Russian)

42. *Alexeev A.V.* Motion of a satellite-gyrostat enclosing a cavity with the high viscous fluid // Mech.&Engng., 2007, vol. 9, no. 3, pp. 671–676. (in Russian)

43. *Beletskii V.V., Chaikin S.V.* Taking into account shift of a center of mass of a gyrostat with elastic beam in analysis of the family of its equilibria // Bull. Moscow Univ.. Ser. 1: Math. Mech., 2006, no. 1, pp. 42–47. (in Russian)

44. *Chaikin S.V.* Stabilization of non-trivial relative equilibria of gyrostat with elastic element in a circular orbit // JAMM, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 791–800. (in Russian)

45. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Kumenko A.E.* Structural-parametric identification of equations of differential dynamics of the elastic element of the satellite-gyrostat // Proc. Samara Sci. Center of the RAS, 2014, vol. 16, no. 6, pp. 305–311. (in Russian)

46. *Burov A.A.* Conservative methods of controlling the rotation of a gyrostat // JAMM, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 195–204.

47. *Vorotnikov V.I., Martyshenko Y.G.* On the nonlinear problem of the three-axis reorientation of a three-rotor gyrostat in the game noise model // Cosmic Res., 2013, vol. 51, no. 5, pp. 372–378.

48. *Alekseyev A.V.* Research of orientation motion of triple gyrostat based on asymptotic methods // M.T. Kalashnikov Izhevsk State Techn. Univ., 2015, vol. 18, no. 2(66), pp. 23–26. (in Russian)

49. *Kharlamov S.A.* On motion of a gimbals mounted gyroscope in the presence of a moment about the axis of proper rotation // Dokl. AN SSSR, 1961, vol. 139, no. 2, pp. 327–330. (in Russian)

50. *Kharlamov S.A.* On the theory of the balanced gyroscope with the electric drive, mounted in the gimbals suspension // Proc. of the USSR Acad. Sci. Mech.&Mech. Engng., 1963, no. 6, pp. 45–54. (in Russian)

51. *Krementulo V.V.* On stability of motion of a gimbals mounted gyroscope in the presence of a moment about the axis of the rotor // Proc. of the USSR Acad. Sci. Mech.&Mech. Engng., 1965, no. 3, pp. 156–159. (in Russian)

52. *Klimov D.M., Kharlamov S.A.* Dynamics of a Gimbals Mounted Gyroscope. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian)

53. *Konosevich B.I.* On stability of steady-state motions of a gimbals mounted asynchronous gyroscope // Rigid Body Mech., 1977, vol. 9, pp. 61–73. (in Russian)

54. *Konosevich Yu.B.* Stability criterion for steady-state motions of a gimbals mounted synchronous gyroscope // Rigid Body Mech., 2005, vol. 35, pp. 115–123. (in Russian)

55. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* On stability of steady-state motions of a gimbals mounted gyroscope supplied with the electric motor // Mech. Solids, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 285–297.

56. *Konosevich B., Konosevich Yu.* Global attraction of steady motions of a gimbal-mounted asynchronous gyroscope // Nonlin. Dyn., 2015, vol. 79, no. 3, pp. 2005–2015.

57. *Leonov G.A.* Phase synchronization: Theory and applications // Autom.&Remote Control, 2006, no. 10, pp. 1573–1609.

58. *Leonov G.A., Zaretskiy A.M.* Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electrical machines // Vestn. St. Petersb. Univ. Math., 2012, no. 45, pp. 157–163.

59. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Sufficient global stability condition for a model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment // Vestn. St. Petersb. Univ. Math., 2018, vol. 51, no. 1, pp. 57–65.

60. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Stability criterion for stationary solutions of multi-current model equations for a synchronous gimbal-mounted gyroscope. Part 1 // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 2, pp. 258–272.

61. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Stability criterion for stationary solutions of multi-current model equations for a synchronous gimbal-mounted gyroscope. Part 2 // Mech. Solids, 2021, vol. 56, no. 1, pp. 40–54.

62. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Model of an electric motor in the theory of gyroscopes // Proc. Inst. Appl. Math.&Mech., 2008, vol. 17, pp. 88–95.

63. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. Reine und Angew. Math., 1894, vol. 113, no. 4, pp. 318–334.

64. *Kholostova O.V.* Investigation of Stability of Staude Permanent Rotations. Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Res., 2008. 128 p.