

УДК 531.36

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИпсоИДА НА ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. А. П. Маркеев^{1,2,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия²Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

*e-mail: anat-markeev@mail.ru

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.

После доработки 20.07.2022 г.

Принята к публикации 20.07.2022 г.

Рассматривается движение однородного эллипсоида по неподвижной горизонтальной плоскости в однородном поле тяжести. Плоскость считается абсолютно гладкой, а полуоси эллипсоида различными. Существует положение устойчивого равновесия, когда эллипсоид опирается на плоскость наинижней точкой своей поверхности. Исследуются нелинейные колебания эллипсоида в окрестности этого равновесия. Анализ осуществляется при помощи методов классической теории возмущений, КАМ – теории и алгоритмов компьютерной алгебры. Получена нормальная форма функции Гамильтона возмущенного движения до членов шестой степени включительно относительно отклонений от положения равновесия. Дано приближенное аналитическое представление колмогоровского множества условно-периодических колебаний, указана оценка меры этого множества. Исследована задача о существовании и орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из устойчивого равновесия в резонансном и нерезонансном случаях.

Ключевые слова: твердое тело, условно-периодические и периодические колебания, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823522060108

Задача о движении твердого тела, соприкасающегося с твердой поверхностью, имеет почти трехсотлетнюю историю [1]. Эта задача интересна не только с общетеоретической точки зрения, она важна своими приложениями в машиностроении, приборостроении, транспорте. Интерес исследователей к этой задаче не ослабевает. Наоборот, в связи с бурным развитием работ по созданию робототехники этот интерес, по-видимому, возрастает все более и более.

Много исследований посвящено механико-математическим моделям, в которых предполагается, что твердое тело движется по плоскости, являющейся гладкой. В данной статье рассматривается динамика однородного трехосного эллипсоида на абсолютно гладкой плоскости в однородном поле тяжести. Этой задаче посвящено довольно много исследований. Отметим только основные из них.

В статье [2] получены условия, необходимые для устойчивости перманентного вращения эллипсоида вокруг его оси, направленной вдоль вертикали. Строгая нелинейная задача об устойчивости этого вращения исследована недавно в статье [3]; в этой же статье исследована устойчивость такого движения эллипсоида, в котором он касается плоскости одним из своих главных сечений, которое считалось близким к кругу. Общая задача о существовании и устойчивости перманентных вращений и регуляр-

ных прецессий тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости подробно изучена в [4–6].

В статьях [7, 8] при помощи КАМ-теории дан качественный анализ движения на неподвижной гладкой плоскости трехосного эллипсоида, мало отличающегося от шара.

Вопросы интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела на гладкой плоскости изучались в [9–12]. В частности, показано [10], что в задаче о движении близкого к шару однородного трехосного эллипсоида не существует необходимый для интегрируемости интеграл, дополнительный к интегралу энергии.

Ниже исследуются нелинейные колебания однородного трехосного эллипсоида в окрестности его устойчивого положения равновесия. Используются классические и современные методы исследования динамических систем, описываемых уравнениями Гамильтона [13–15]. Необходимые вычисления существенно опираются на преобразование Биркгофа [16] и его модификации [17], удобные для их компьютерной реализации.

1. Введение. Уравнения движения. Рассмотрим движение однородного эллипсоида по неподвижной абсолютно гладкой плоскости в однородном поле тяжести. Полуоси a, b и c эллипсоида считаем различными и полагаем, что $a < b < c$. В системе координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре тяжести O эллипсоида его поверхность задается уравнением

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad (1.1)$$

Ориентация эллипсоида относительно неподвижной системы координат O_*XYZ задается (см. рис. 1) углами Эйлера ψ, θ, φ или матрицей направляющих косинусов a_{ij} :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \\ a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, & a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta, & a_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

На рис. 1 показана также система координат $OXYZ$, оси которой параллельны соответствующим осям системы O_*XYZ , через ON , как принято, обозначена линия узлов.

Координаты точки M , которой эллипсоид касается неподвижной опорной плоскости O_*XY , определяются [1] равенствами

$$\xi = -\frac{a^2}{f} a_{31}, \quad \eta = -\frac{b^2}{f} a_{32}, \quad \zeta = -\frac{c^2}{f} a_{33}, \quad (1.3)$$

где f – расстояние от центра тяжести эллипсоида до плоскости O_*XY ,

$$f = \sqrt{a^2 a_{31}^2 + b^2 a_{32}^2 + c^2 a_{33}^2} \quad (1.4)$$

Так как плоскость абсолютно гладкая, то проекция центра тяжести эллипсоида на плоскость O_*XY движется равномерно и прямолинейно. Не ограничивая общность, будем считать, что она неподвижна и, следовательно, точка O движется вдоль фиксированной прямой, параллельной вертикальной оси O_*Z . При этом координаты точки M на плоскости O_*XY вычисляются [1] по формулам

$$X_M = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \quad Y_M = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \quad (1.5)$$

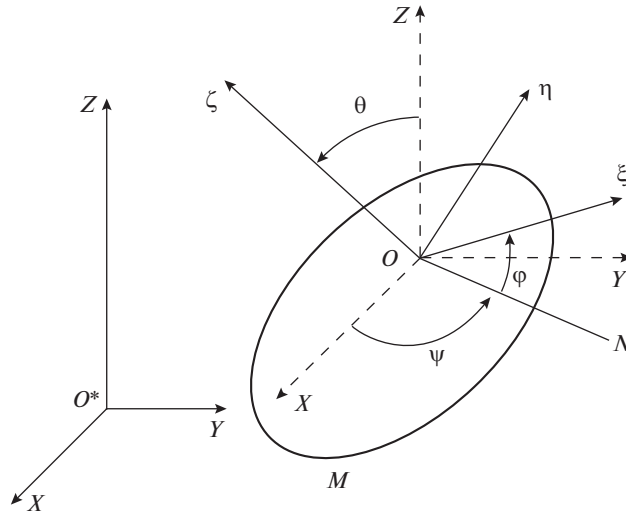


Рис. 1.

Пусть mg – вес эллипсоида, а A, B, C – его главные центральные моменты инерции,

$$A = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2), \quad B = \frac{1}{5}m(c^2 + a^2), \quad C = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \quad (1.6)$$

Обобщенные импульсы $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$, соответствующие углам Эйлера ψ, θ, φ , определяются [1] равенствами

$$\begin{aligned} p_\psi &= e_2\dot{\psi} + e_4\dot{\theta} + C \cos \theta \dot{\varphi}, & p_\theta &= e_4\dot{\psi} + e_3\dot{\theta} + mf_\theta f_\varphi \dot{\varphi} \\ p_\varphi &= C \cos \theta \dot{\psi} + mf_\theta f_\varphi \dot{\theta} + e_1\dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t , f_θ и f_φ – частные производные функции (1.4) по θ и φ соответственно, а

$$\begin{aligned} e_1 &= C + mf_\varphi^2, & e_2 &= (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \\ e_3 &= A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi + mf_\theta^2, & e_4 &= (A - B) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.8)$$

Угол прецессии ψ является циклической координатой, поэтому импульс p_ψ постоянен во все время движения. Будем считать, что $p_\psi = 0$. Из (1.6)–(1.8) тогда следует, что при известных функциях $\theta(t)$, $\varphi(t)$ величина $\dot{\psi}$ может быть найдена из равенства

$$\dot{\psi} = - \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta} + (a^2 + b^2) \cos \theta \dot{\varphi}}{\left[(b^2 + c^2) \sin^2 \varphi + (c^2 + a^2) \cos^2 \varphi \right] \sin^2 \theta + (a^2 + b^2) \cos^2 \theta} \quad (1.9)$$

Изменение переменных θ, φ со временем определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (1.10)$$

$$H = \frac{e_1 e_2 - C^2 \cos^2 \theta}{2\Delta} p_\theta^2 + \frac{e_2 e_3 - e_4^2}{2\Delta} p_\varphi^2 + \frac{C e_4 \cos \theta - e_2 m f_\theta f_\varphi}{\Delta} p_\theta p_\varphi + mgf \quad (1.11)$$

$$\Delta = e_1 e_2 e_3 - e_1 e_4^2 - C^2 e_3 \cos^2 \theta + 2 m f_\theta f_\varphi C e_4 \cos \theta - m^2 f_\theta^2 f_\varphi^2 e_2$$

Уравнения движения (1.10) допускают частное решение, в котором $\theta \equiv \pi/2$, $\varphi \equiv \pi/2$. Это решение отвечает устойчивому положению равновесия эллипсоида, в котором он опирается на плоскость точкой M своей поверхности, лежащей на наименьшей оси эллипсоида. Цель статьи состоит в исследовании нелинейных колебаний эллипсоида в окрестности этого положения равновесия.

2. Функция Гамильтона возмущенного движения и ее предварительное преобразование.

Введем возмущения q_1, q_2 углов Эйлера θ, φ и безразмерные импульсы p_1, p_2 возмущенного движения по формулам

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + q_2, \quad p_\theta = m a^{3/2} g^{1/2} p_1, \quad p_\varphi = m a^{3/2} g^{1/2} p_2, \quad (2.1)$$

и перейдем еще к безразмерному времени $\tau = (g/a)^{1/2} t$. Функция Гамильтона возмущенного движения может быть представлена в виде сходящегося ряда по формам четных степеней относительно q_1, q_2, p_1, p_2 . Отвечающая линеаризованным уравнениям возмущенного движения квадратичная форма имеет вид

$$H_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} q_1^2 + \frac{5a^2}{c^2 + a^2} p_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2} q_2^2 + \frac{5a^2}{a^2 + b^2} p_2^2 \right) \quad (2.2)$$

Соответствующие функции (2.2) канонические уравнения описывают малые линейные колебания эллипсоида с частотами ω_i ($i = 1, 2$),

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5(c^2 - a^2)}{c^2 + a^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5(b^2 - a^2)}{a^2 + b^2}} \quad (2.3)$$

При принятом ранее предположении $a < b < c$ справедливо неравенство $0 < \omega_2 < \omega_1 < \sqrt{5}$.

Для исследования нелинейной задачи целесообразно предварительно перейти к переменным u_1, u_2, v_1, v_2 , отвечающим нормальным координатам линейной задачи. Для этого сделаем каноническое унивалентное преобразование $q_i, p_i \rightarrow u_i, v_i$ по формулам:

$$q_1 = a \sqrt{\frac{\omega_1}{c^2 - a^2}} u_1, \quad q_2 = a \sqrt{\frac{\omega_2}{b^2 - a^2}} u_2, \quad p_1 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\omega_1}} v_1, \quad p_2 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{\omega_2}} v_2 \quad (2.4)$$

В новых переменных возмущенное движение описывается уравнениями с функцией Гамильтона, задающейся рядом

$$H = \frac{1}{2} \omega_1 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (u_2^2 + v_2^2) + \sum_{s=2}^{\infty} H_{2s}, \quad H_{2s} = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2s} h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} v_1^{\mu_1} v_2^{\mu_2} \quad (2.5)$$

Отметим принципиально важное для дальнейшего анализа свойство разложения (2.5): в каждом его члене сумма показателей $\nu_i + \mu_i$ ($i = 1, 2$) является четным числом.

Коэффициенты форм четвертой и шестой степеней, после проведения довольно громоздких вычислений с привлечением алгоритмов компьютерной алгебры, можно выразить через частоты ω_1 и ω_2 . Оказалось, что 27 из 35-ти коэффициентов формы H_4 тождественно равны нулю. Остальные 8 коэффициентов имеют вид

$$h_{4000} = -\frac{5}{12} - \frac{1}{24} \omega_1^2, \quad h_{2200} = -\frac{5\omega_2}{4\omega_1}, \quad h_{2020} = -\frac{1}{2} \omega_1^4, \quad h_{2002} = -\frac{5\delta\delta_1^2 \omega_2}{4\omega_1}$$

$$h_{1111} = -\frac{1}{2} \delta \omega_2^2 \left[25 - 60\omega_1^2 + (1 + 2\omega_2^2) \omega_1^4 \right], \quad h_{0400} = -\frac{5}{12} - \frac{1}{24} \omega_2^2 \quad (2.6)$$

$$h_{0220} = \frac{1}{4} \delta \delta_1 \delta_2 \omega_1 \omega_2, \quad h_{0202} = -\frac{1}{2} \omega_2^4$$

Здесь приняты обозначения

$$\delta_i = \omega_i^2 - 5 \quad (i = 1, 2), \quad \delta = \frac{1}{\omega_1^2 \omega_2^2 - 25} \quad (2.7)$$

Из 84-х коэффициентов формы H_6 тождественно равны нулю 72. Для остальных 12-ти коэффициентов можно получить следующие выражения:

$$h_{6000} = \frac{1}{720\omega_1} (100 + 110\omega_1^2 + 19\omega_1^4), \quad h_{4200} = \frac{\omega_2}{48\omega_1^2} (50 + 20\omega_1^2 + 3\omega_1^4)$$

$$h_{4020} = \frac{\omega_1^3}{6} (10 + \omega_1^2 + 3\omega_1^4), \quad h_{4002} = \frac{5\delta\delta_1^3\omega_2}{12\omega_1^2}$$

$$h_{3111} = \frac{\delta\omega_2^2}{12\omega_1} \left[-25(5 + 17\omega_1^2) - 5(43 - 10\omega_2^2) \omega_1^4 - (329 - 2\omega_2^2) \omega_1^6 + 6(1 + 2\omega_2^2) \omega_1^8 \right]$$

$$h_{2400} = \frac{1}{48\omega_1} (50 + 20\omega_2^2 + 3\omega_2^2 \omega_1^2)$$

$$h_{2220} = \frac{\delta\omega_1^2\omega_2}{2} \left[25\delta_2 - 25(1 + \omega_2^2) \omega_1^2 + (5 + \omega_2^4) \omega_1^4 \right]$$

$$h_{2202} = \frac{\delta\omega_2^2}{8\omega_1} \left[-125 + 5(15 - 20\omega_2^2 + 4\omega_2^4) \omega_1^2 - 15(1 + 8\omega_2^2) \omega_1^4 + (1 + 2\omega_2^2)^2 \omega_1^6 \right]$$

$$h_{311} = \frac{1}{6} \delta \omega_2 \left[5(25 - 60\omega_1^2 + \omega_1^4) + 2(-200 - 45\omega_1^2 + 12\omega_1^4) \omega_2^2 + \right. \\ \left. + (75 - 150\omega_1^2 + \omega_1^4) \omega_2^4 + 6\omega_1^4 \omega_2^6 \right]$$

$$h_{0600} = \frac{1}{720\omega_2} (100 + 110\omega_2^2 + 19\omega_2^4)$$

$$h_{0420} = \frac{1}{24} \delta \delta_1 \delta_2^2 \omega_1, \quad h_{0402} = \frac{1}{6} \omega_2^3 (10 + \omega_2^2 + 3\omega_2^4)$$

3. О возможных резонансах. Если для натуральных чисел l_1 и l_2 выполняется соотношение

$$l_1 \omega_1 = l_2 \omega_2, \quad (3.1)$$

то имеет место резонанс порядка $l = l_1 + l_2$ (так как $\omega_1 > \omega_2$, то $l_2 > l_1 \geq 1$).

Введем безразмерные параметры x, y , положив $a^2 = xc^2$, $b^2 = yc^2$. Область допустимых значений параметров x, y (в силу того, что $a < b < c$) задается неравенством

$$0 < x < y < 1 \quad (3.2)$$

Частоты (2.3) выражаются через x, y по формулам

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5(1-x)}{1+x}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5(y-x)}{y+x}} \quad (3.3)$$

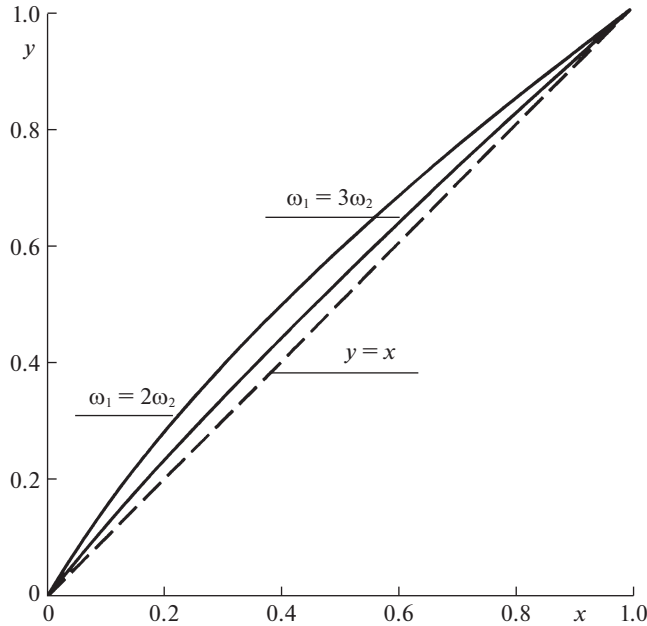


Рис. 2.

И из соотношения (3.1) следует уравнение соответствующей резонансной кривой

$$y = x \frac{(l_2^2 - l_1^2)x + l_2^2 + l_1^2}{(l_2^2 + l_1^2)x + l_2^2 - l_1^2} \tag{3.4}$$

На рис. 2 показаны кривые, отвечающие резонансам $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$.

Несложно проверить, что все резонансные кривые (3.4) лежат в области

$$\frac{x(3x + 5)}{5x + 3} \geq y > x \tag{3.5}$$

Левой границей этой области является кривая $\omega_1 = 2\omega_2$. В области

$$\frac{x(3x + 5)}{5x + 3} < y < 1, \tag{3.6}$$

лежащей на рис. 2 левее и выше кривой $\omega_1 = 2\omega_2$ не реализуется ни один из резонансов (3.1).

4. О нормализации функции Гамильтона (2.5). Следуя [16, 17], введем вместо переменных u_i, v_i новые канонически сопряженные переменные Q_i, P_i при помощи производящей функции S вида

$$S = u_1 P_1 + u_2 P_2 + S_4 + S_6, \quad S_{2k} = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2k} s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2}, \quad (k = 2, 3) \tag{4.1}$$

Неявно замена $u_i, v_i \rightarrow Q_i, P_i$ задается формулами

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad v_i = \frac{\partial S}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2) \tag{4.2}$$

Из (4.1), (4.2) следует, что старые переменные выражаются через новые при помощи сходящихся рядов по степеням Q_1, Q_2, P_1, P_2 :

$$u_i = Q_i - \frac{\partial S_4}{\partial P_i} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 S_4}{\partial P_i \partial Q_j} \frac{\partial S_4}{\partial P_j} - \frac{\partial S_6}{\partial P_i} + O_7, \quad v_i = P_i + \frac{\partial S_4}{\partial Q_i} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 S_4}{\partial Q_i \partial Q_j} \frac{\partial S_4}{\partial P_j} + \frac{\partial S_6}{\partial Q_i} + O_7 \quad (4.3)$$

Здесь S_4 и S_6 – функции из (4.1), в которых аргументы u_1, u_2 заменены на Q_1, Q_2 . Символом O_n здесь и далее обозначается совокупность членов не ниже n -й степени относительно Q_1, Q_2, P_1, P_2 .

Подставив выражения (4.3) в функцию Гамильтона (2.5) и подобрав подходящим образом коэффициенты $s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}$ форм S_4 и S_6 , можно упростить (нормализовать) формы четвертой и шестой степеней в новой функции Гамильтона (ее, как и старую функцию (2.5), будем обозначать через H).

Так как в разложении (2.5) нет форм 3-й и 5-й степеней, а в форме 4-й степени суммы показателей $\nu_1 + \mu_1$ и $\nu_2 + \mu_2$ четны (см. п. 2), то все резонансы до пятого порядка включительно ($\omega_1 = 2\omega_2$, $\omega_1 = 3\omega_2$, $\omega_1 = 4\omega_2$, $2\omega_1 = 3\omega_2$) не препятствуют приведению функции Гамильтона (2.5) к нормальной форме вида

$$H = H^{(0)}(r_1, r_2) + O_6, \quad H^{(0)} = \omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 \quad (4.4)$$

$$(Q_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \quad P_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i)$$

При этом

$$c_{20} = -\frac{1}{16}(4\omega_1^4 + \omega_1^2 + 10), \quad c_{02} = -\frac{1}{16}(4\omega_2^4 + \omega_2^2 + 10) \quad (4.5)$$

$$c_{11} = \frac{\omega_1 \omega_2 [75 - 10(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2]}{4(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)},$$

а отличные от тождественного нуля коэффициенты формы S_4 в производящей функции (4.1) вычисляются по следующим формулам:

$$s_{3010} = \frac{12\omega_1^4 - 5\omega_1^2 - 50}{192\omega_1}, \quad s_{0301} = \frac{12\omega_2^4 - 5\omega_2^2 - 50}{192\omega_2}$$

$$s_{1030} = -\frac{4\omega_1^4 + \omega_1^2 + 10}{64\omega_1}, \quad s_{0103} = -\frac{4\omega_2^4 + \omega_2^2 + 10}{64\omega_2}$$

$$s_{1012} = \frac{\omega_2 [25(\omega_2^2 - 10) + (100 - 120\omega_2^2 + \omega_2^4)\omega_1^2 + 2(-5 + \omega_2^2 + 2\omega_2^4)\omega_1^4]}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)} \quad (4.6)$$

$$s_{0121} = -\frac{\omega_1 [25(\omega_1^2 - 10) + (100 - 120\omega_1^2 + \omega_1^4)\omega_2^2 + 2(-5 + \omega_1^2 + 2\omega_1^4)\omega_2^4]}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)}$$

$$s_{1210} = \frac{\omega_2 [25(10 - 3\omega_2^2) + (-50 + 120\omega_2^2 + \omega_2^4)\omega_1^2 + 2(5 - 2\omega_2^2 - 2\omega_2^4)\omega_1^4]}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)}$$

$$s_{2101} = \frac{-500\omega_2^2 + 10(25 + 15\omega_2^2 + \omega_2^4)\omega_1^2 - 5(5 + 28\omega_2^2)\omega_1^4 + \omega_2^2(3 + 4\omega_2^2)\omega_1^6}{16\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)}$$

После вычисления функции S_4 и величин (4.5) можно, выбрав нужным образом форму S_6 , максимально упростить (нормализовать) совокупность членов шестой степени в новой функции Гамильтона. Из двух возможных резонансов шестого порядка $\omega_1 = 5\omega_2$ и $2\omega_1 = 4\omega_2$ первый не скажется на виде нормальной формы членов шестой степени (из-за четности величин $\nu_1 + \mu_1$ и $\nu_2 + \mu_2$ в разложении (2.5)). Второй же резонанс (который на самом деле является резонансом третьего порядка, не повлиявшим на структуру нормальной формы (4.4)) существенен при нормализации членов шестой степени. Этот резонансный случай изучается в разд. 8 статьи.

5. Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность системы с функцией Гамильтона $H^{(0)}$. Рассмотрим определитель D_2 второго порядка

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2^2} \end{vmatrix} = 4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 \quad (5.1)$$

Покажем, что система с функцией Гамильтона $H^{(0)}$ из (4.4) является невырожденной. Это означает [14, 15], что $D_2 \neq 0$. Действительно, принимая во внимание (4.5) и (3.3), определитель (5.1) можно записать в виде функции от x, y :

$$D_2 = \frac{25}{64(1+x)^2(1+y)^2(x+y)^2} [(487x^2 - 828x + 525)y^4 - (724x^3 - 2270x^2 + 2516x - 1050)y^3 + (501x^4 - 2236x^3 + 3502x^2 - 2516x + 525)y^2 - 2x(16x^4 - 437x^3 + 1118x^2 - 1135x + 414)y - x^2(64x^4 + 32x^3 - 501x^2 + 724x - 487)] \quad (5.2)$$

На рис. 3 в плоскости x, y сплошными линиями показаны ветви кривой $D_2 = 0$, а серым цветом выделены области $D_2 < 0$. В остальной части рисунка величина D_2 положительна. Область (3.2) допустимых значений параметров x, y попадает в область $D_2 > 0$ рисунка. И, следовательно, система с функцией Гамильтона $H^{(0)}$ является невырожденной.

Покажем еще, что выполнено также условие изоэнергетической невырожденности, означающее [14, 15] отличие от нуля определителя D_3 третьего порядка,

$$D_3 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} & \omega_1 \\ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2^2} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{vmatrix} = -2(c_{20}\omega_2^2 - c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2) \quad (5.3)$$

В переменных x, y имеем

$$D_3 = \frac{25}{4(1+x)^2(1+y)(x+y)^2} [(x^2 - 18x + 21)y^3 + (26x^3 + x^2 - 44x + 21)y^2 - x(23x^3 - 36x^2 - x + 18)y - x^2(8x^3 + 23x^2 - 26x - 1)] \quad (5.4)$$

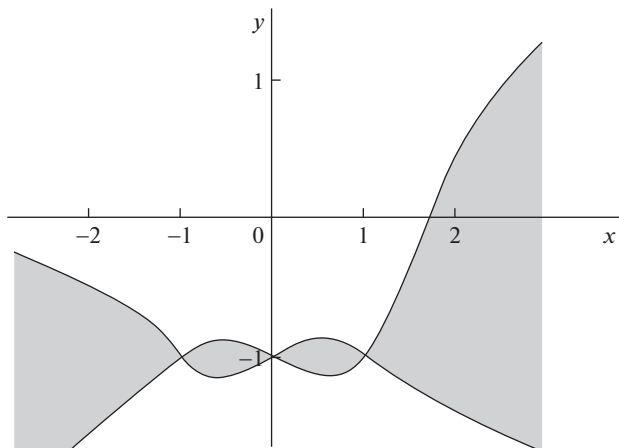


Рис. 3.

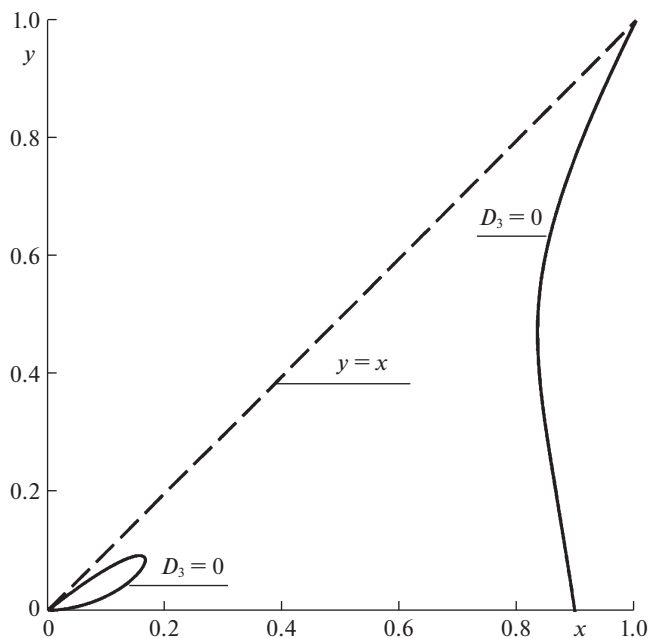


Рис. 4.

На рис. 4 сплошными линиями показаны ветви кривой $D_3 = 0$. Они лежат правее и ниже прямой $y = x$. В области же (3.2) допустимых значений x, y величина D_3 отлична от нуля (там $D_3 > 0$).

6. Условно-периодические колебания. 1. Общее решение дифференциальных уравнений приближенной системы с функцией Гамильтона $H^{(0)}(r_1, r_2)$ из (4.4) описывается равенствами

$$Q_i = \sqrt{2r_{i0}} \sin \varphi_i, \quad P_i = \sqrt{2r_{i0}} \cos \varphi_i, \quad \varphi_i = \Omega_i \tau + \varphi_{i0} \quad (i = 1, 2) \quad (6.1)$$

$$\Omega_1 = \omega_1 + 2c_{20}r_{10} + c_{11}r_{20}, \quad \Omega_2 = \omega_2 + c_{11}r_{10} + 2c_{02}r_{20}, \quad (6.2)$$

где r_{i0}, φ_{i0} – постоянные, являющиеся начальными значениями переменных r_i, φ_i . Если полуоси эллипсоида таковы, что нет резонанса (3.1), то для малых значений r_{i0} движения в приближенной системе будут условно-периодическими колебаниями с рационально независимыми частотами (6.2).

Но в предыдущем разд. показано, что приближенная система невырождена. Поэтому, согласно КАМ-теории, движения в полной системе, описываемой функцией Гамильтона (4.4), для большинства начальных условий также будут условно-периодическими с частотами (6.2). Множество начальных условий, не принадлежащих упомянутому большинству (колмогоровскому множеству), имеет малую меру: в окрестности

$r_1 + r_2 < \mu$ его относительная мера имеет порядок $\mu^{\frac{l-3}{4}}$, где l – порядок, до которого отсутствуют резонансы вида (3.1) [14]. Согласно разд. 3, в области безразмерных параметров x, y , задаваемой неравенством (3.5), можно считать, что $l = 5$. Если же параметры x, y принадлежат области (3.6) (где отсутствуют резонансы (3.1)), то величина l может быть сколь угодно большой. Для области (3.6) относительная мера множества,

дополнительного к колмогоровскому множеству, имеет порядок $\exp\left(-\frac{c_1}{\mu^{c_2}}\right)$, $c_1, c_2 - \text{const} > 0$.

2. Остановимся подробнее на приближенном описании движения эллипсоида при помощи уравнений с функцией $H^{(0)}$ из (4.4). Из соотношений (4.3) имеем

$$u_i = Q_i - \frac{\partial S_4}{\partial P_i} + O_5, \quad v_i = P_i + \frac{\partial S_4}{\partial Q_i} + O_5 \quad (6.3)$$

Коэффициенты формы S_4 вычисляются по формулам (4.6).

Из (6.3) и (2.4) получаем выражения для углов Эйлера θ, φ

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1 = \frac{\pi}{2} + a\sqrt{\frac{\omega_1}{c^2 - a^2}}Q_1 + O_3, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + q_2 = \frac{\pi}{2} + a\sqrt{\frac{\omega_2}{b^2 - a^2}}Q_2 + O_3 \quad (6.4)$$

Угол ψ может быть найден при помощи равенства (1.9), из которого (при учете (6.4)) следует, что производная $\dot{\psi}$ имеет порядок O_2 . Поэтому ψ совершает “мелкие дрожания” в окрестности его начального значения ψ_0 . Пренебрегая этими дрожаниями, можно считать, что $\psi = \psi_0 = 0$. Из (1.2) тогда следует, что с погрешностью O_2 направляющие косинусы a_{ij} определяются следующими равенствами:

$$a_{11} = a_{32} = -q_2, \quad a_{21} = a_{33} = -q_1, \quad a_{31} = -a_{12} = -a_{23} = 1, \quad a_{13} = a_{22} = 0 \quad (6.5)$$

3. Получим оценку реакции R опорной плоскости O_*XY . Из (6.5) и (1.4) следует, что для расстояния f центра тяжести эллипсоида до плоскости O_*XY имеет место равенство $f = a + O_2$. Поэтому из уравнения

$$m \frac{d^2 f}{dt^2} = -mg + R,$$

описывающего движение центра тяжести вдоль вертикали, следует, что $R = mg + O_2$. При малых отклонениях эллипсоида от положения равновесия реакция не обращается в нуль и эллипсоид не может оторваться от плоскости O_*XY .

4. Выпишем еще приближенные выражения (1.3) и (1.5) для траекторий точки касания M на поверхности эллипсоида и на опорной плоскости. Из (1.3), (1.4), (6.5) и (6.1) следуют приближенные (с погрешностью O_2) формулы для координат точки M в системе $O\xi\eta\zeta$, жестко связанной с эллипсоидом:

$$\xi = -a, \quad \eta = A_\eta \sin \varphi_2, \quad \zeta = A_\zeta \sin \varphi_1 \quad \left(A_\eta = b^2 \sqrt{\frac{2\omega_2 r_{20}}{b^2 - a^2}}, \quad A_\zeta = c^2 \sqrt{\frac{2\omega_1 r_{10}}{c^2 - a^2}} \right) \quad (6.6)$$

Из (1.5), (6.5) и (6.6) с погрешностью O_2 находим выражения для координат точки M на плоскости O_*XY :

$$\begin{aligned} X_M &= -A_X \sin \varphi_2, & Y_M &= -A_Y \sin \varphi_1 \\ \left(A_X &= \sqrt{2\omega_2 (b^2 - a^2)} r_{20}, \quad A_Y = \sqrt{2\omega_1 (c^2 - a^2)} r_{10} \right) \end{aligned}$$

При условно-периодических колебаниях проекция траектории точки M на плоскость $O\eta\zeta$ всюду плотно заполняет прямоугольник со сторонами $2A_\eta$ и $2A_\zeta$, а на опорной плоскости O_*XY траектория всюду плотно заполняет прямоугольник со сторонами $2A_X$ и $2A_Y$.

В качестве примера возьмем эллипсоид, у которого $b^2 = 11/9a^2$, $c^2 = 3/2a^2$. Для него $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{2}/2$, а

$$A_\eta = \frac{11a}{3^4\sqrt{2}} \sqrt{r_{20}}, \quad A_\zeta = 3a\sqrt{r_{10}}, \quad A_X = \frac{2a}{3^4\sqrt{2}} \sqrt{r_{20}}, \quad A_Y = a\sqrt{r_{10}}$$

7. О периодических колебаниях малой амплитуды. Уравнения (1.10) допускают два типа частных решений, для которых эллипсоид касается плоскости одним из своих главных сечений. Для решений первого типа эллипсоид касается оси O_*Y главным сечением $\eta = 0$, которое во все время движения остается в вертикальной плоскости O_*YZ . В движениях второго типа эллипсоид касается оси O_*X главным сечением $\zeta = 0$, которое все время остается в плоскости O_*XZ .

Будем рассматривать эти движения, предполагая, что они представляют собой малые периодические колебания эллипсоида. Через ε обозначим малый параметр, характеризующий отклонение углов θ и φ от их значений, отвечающих равновесию $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$. Зависимость углов θ и φ от времени для этих колебаний может быть найдена из (6.1)–(6.4).

В колебаниях первого типа $\theta \equiv \pi/2$, а

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon a \sqrt{\frac{\omega_1}{c^2 - a^2}} U_1 + O(\varepsilon^4) \quad (7.1)$$

В колебаниях второго типа $\theta \equiv \pi/2$,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon a \sqrt{\frac{\omega_2}{b^2 - a^2}} U_2 + O(\varepsilon^4) \quad (7.2)$$

В (7.1) и (7.2) приняты обозначения

$$U_i = \sin \varphi_i + \varepsilon^2 \frac{\sin \varphi_i}{192\omega_i} \left[9(4\omega_i^4 + \omega_i^2 + 10) - 4(12\omega_i^4 + \omega_i^2 + 10) \sin^2 \varphi_i \right]$$

$$\varphi_i = \Omega_i \tau + \varphi_{i0}, \quad (i = 1, 2), \quad \Omega_1 = \omega_1 + c_{20}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad \Omega_2 = \omega_2 + c_{02}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

Для исследования орбитальной устойчивости периодических колебаний (7.1) и (7.2) воспользуемся теоремой Мозера об инвариантных кривых. При малых ε достаточным

условием устойчивости будет условие изоэнергетической невырожденности $D_3 \neq 0$ функции $H^{(o)}$ из (4.4) [14, 15]. В разд. 4 показано, что это условие выполняется. И, следовательно, при малых амплитудах периодические колебания обоих типов орбитально устойчивы.

8. О колебаниях при резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$. Сделав нормализующую замену переменных $u_i, v_i \rightarrow Q_i, P_i$ по формулам (4.3) и введя симплектические полярные координаты r_i, φ_i (см. (4.4)), получим функцию Гамильтона возмущенного движения (2.5) в виде ряда

$$H = \omega_1 r_1 + \frac{1}{2} \omega_1 r_2 + \sum_{m+n=2}^3 c_{mn} r_1^m r_2^n + \alpha_{12} r_1 r_2^2 \cos(2\varphi_1 - 4\varphi_2) + O_{10} \quad (8.1)$$

Коэффициенты нормальной формы (8.1) можно записать в виде следующих функций от ω_1 :

$$\begin{aligned} c_{20} &= -\frac{1}{16} (10 + \omega_1^2 + 4\omega_1^4), & c_{02} &= -\frac{1}{64} (40 + \omega_1^2 + \omega_1^4) \\ c_{11} &= \frac{\omega_1^2 (300 - 50\omega_1^2 + \omega_1^4)}{8(\omega_1^4 - 100)}, & c_{30} &= \frac{48\omega_1^8 + 24\omega_1^6 + 255\omega_1^4 + 60\omega_1^2 - 100}{256\omega_1} \\ c_{03} &= \frac{3\omega_1^8 + 6\omega_1^6 + 255\omega_1^4 + 240\omega_1^2 - 1600}{2048\omega_1} \\ c_{21} &= \frac{1}{384\omega_1 (\omega_1^4 - 100)^2} (16\omega_1^{16} + 24\omega_1^{14} - 2681\omega_1^{12} - 3740\omega_1^{10} + \\ &+ 87500\omega_1^8 - 82000\omega_1^6 + 4440000\omega_1^4 - 2800000\omega_1^2 + 4000000) \\ c_{12} &= -\frac{1}{384\omega_1 (\omega_1^4 - 100)^2} (2\omega_1^{16} + 12\omega_1^{14} - 787\omega_1^{12} + 680\omega_1^{10} + \\ &+ 70000\omega_1^8 - 386000\omega_1^6 + 1230000\omega_1^4 - 4400000\omega_1^2 + 8000000) \\ \alpha_{12} &= \frac{3\omega_1^3 (\omega_1^4 - 89\omega_1^2 - 450)}{512(\omega_1^2 + 10)} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Для исследования периодических движений, обусловленных наличием резонанса $\omega_1 = 2\omega_2$, сделаем в (8.1) унивалентное каноническое преобразование $\varphi_i, r_i \rightarrow \chi_i, R_i$ по формулам

$$r_1 = R_1, \quad r_2 = R_2 - 2R_1, \quad \varphi_1 = \chi_1 + 2\chi_2, \quad \varphi_2 = \chi_2 \quad (8.4)$$

Если в преобразованной функции (8.1) отбросить последнее слагаемое O_{10} , то придем к приближенной системе с циклической координатой χ_2 . Помимо интеграла энергии, эта система имеет еще интеграл $R_2 = \tilde{c} = \text{const} > 0$. Если вместо χ_1, R_1 ввести новые канонически сопряженные переменные χ, ρ по формулам

$$\chi_1 = \chi, \quad R_1 = \tilde{c}\rho \quad (0 < \rho < 1/2), \quad (8.5)$$

а в качестве независимой переменной принять величину $s = \tilde{c}\tau$, то получим систему с одной степенью свободы, являющуюся приближенной моделью для описания рассматриваемого резонанса. Ее функция Гамильтона $\Gamma(\chi, \rho; \tilde{c})$ будет такой:

$$\Gamma = [c_{11} - 4c_{02} + \tilde{c}(c_{12} - 6c_{03})]\rho + [c_{20} - 2c_{11} + 4c_{02} - \tilde{c}(4c_{12} - c_{21} - 12c_{03})]\rho^2 + \tilde{c}(c_{30} - 2c_{21} + 4c_{12} - 8c_{03})\rho^3 + \tilde{c}\alpha_{12}\rho(1 - 2\rho)^2 \cos 2\chi \quad (8.6)$$

Соответствующие канонические уравнения имеют вид

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\chi} = \tilde{c}2\alpha_{12}\rho(1 - 2\rho)\sin 2\chi, \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} \quad (8.7)$$

Эти уравнения допускают четыре отличающихся одно от другого равновесных решения χ_*, ρ_* , в которых

$$\chi_* = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad (8.8)$$

а ρ_* – корень квадратного относительно ρ уравнения

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} = 0, \quad (8.9)$$

в левой части которого $\cos 2\chi$ заменен на $(-1)^k$. При малых значениях параметра \tilde{c} этот корень можно представить в виде ряда по степеням \tilde{c} : $\rho_* = \rho_0 + \tilde{c}\rho_1 + \dots$. Из (8.6) и (8.9) следует, что для ρ_0 можно получить такое выражение:

$$\rho_0 = \frac{c_{11} - 4c_{02}}{4D_3} \omega_1^2, \quad (8.10)$$

где D_3 задается равенством (5.3).

Из выражений (8.2) для c_{mn} (с учетом того, что $0 < \omega_1 < \sqrt{5}$) видно, что величина $c_{11} - 4c_{02}$ положительна. Кроме того, согласно разд. 5, величина $D_3 > 0$. Вычисления показывают, что $0 < \rho_0 < 0.406834$, а своего максимального значения величина ρ_0 достигает, когда $b = 1.021617a$, $c = 1.089528a$.

Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности равновесия χ_*, ρ_* системы (8.7) имеет вид

$$\lambda^2 + (-1)^k 4\tilde{c}\rho_0\alpha_{12}\omega_1^2 \frac{(c_{11} - c_{20})^2}{D_3} + O(\tilde{c}^2) = 0 \quad (8.11)$$

Из (8.2) и (8.3) несложно усмотреть, что $c_{11} \neq c_{20}$, а $\alpha_{12} < 0$. И так как $D_3 > 0$, то при малых \tilde{c} найденным равновесиям в случае четных k в фазовой плоскости отвечают особые точки типа седло, а в случае нечетных k – точки типа центр.

Для иллюстрации сказанного на рис. 5 показан фазовый портрет системы (8.7) в плоскости $q = \sqrt{2\rho} \sin \chi$, $p = \sqrt{2\rho} \cos \chi$.

Принято, что параметр $\tilde{c} = 1/10$, а форма эллипсоида такова, что $b^2 = 3/2a^2$, $c^2 = 9a^2$.

Для такого эллипсоида $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$, а равновесное значение $\rho_* = 0.268311$ для седла и $\rho_* = 0.252613$ для центров.

При помощи метода Пуанкаре [13] можно показать, что в полной системе с функцией Гамильтона (8.1) существуют периодические движения, аналитические относи-

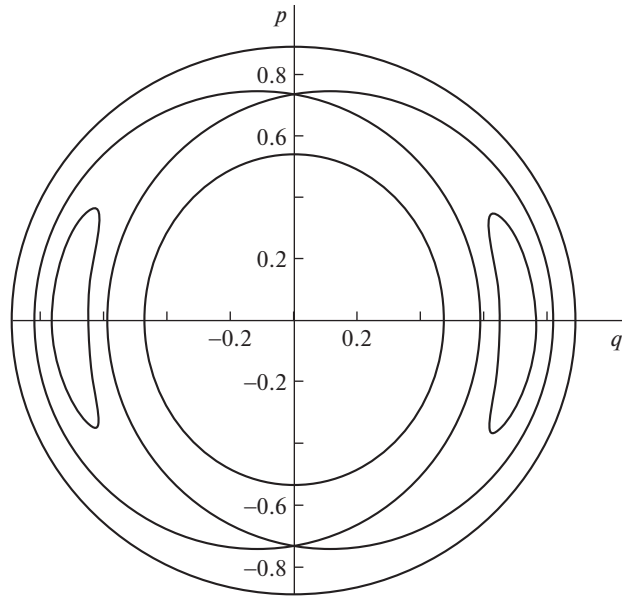


Рис. 5.

тельно ε (ε – порядок величин q_i, p_i в (2.1)), которые в переменных Q_1, Q_2 записываются (с погрешностью O_2) в виде

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \sqrt{2\tilde{c}\rho_*} \sin(k\pi/2 + 2\varphi_2), & Q_2 &= \sqrt{2\tilde{c}(1-2\rho_*)} \sin \varphi_2, & \varphi_2 &= \Omega_2\tau + \varphi_0 \\
 \Omega_2 &= \omega_2 + [c_{11}\rho_* + 2c_{02}(1-2\rho_*)]\tilde{c} + \\
 &+ \left\{ c_{21}\rho_*^2 + 2[c_{12} + (-1)^k \alpha_{12}] \rho_* (1-2\rho_*) + 3c_{03}(1-2\rho_*)^2 \right\} \tilde{c}^2 + O(\tilde{c}^3)
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

При четных k эти периодические движения орбитально неустойчивы, а при нечетных – устойчивы.

Для координат ξ, η, ζ точки касания M на поверхности эллипсоида аналогично разд. 6 можно получить такие приближенные выражения:

$$\xi = -a, \quad \eta = b^2 \sqrt[4]{\frac{5}{b^4 - a^4}} Q_2, \quad \zeta = c^2 \sqrt[4]{\frac{5}{c^4 - a^4}} Q_1,
 \tag{8.13}$$

а для координат X_M, Y_M точки M на плоскости O_*XY – выражения

$$X_M = (a^2 - b^2) \sqrt[4]{\frac{5}{b^4 - a^4}} Q_2, \quad Y_M = (a^2 - c^2) \sqrt[4]{\frac{5}{c^4 - a^4}} Q_1
 \tag{8.14}$$

В (8.13), (8.14) Q_1 и Q_2 вычисляются по формулам (8.12).

Траектории проекции точки M на главную плоскость $O\eta\zeta$ эллипсоида, как и траектории точки M на опорной плоскости O_*XY , существенно различны в случаях четных и нечетных значений k . При четных k (когда периодическое движение неустойчиво) они являются “лежащими восьмерками”, а при нечетных k (когда периодическое движение орбитально устойчиво) – дважды проходимыми за период параболами.

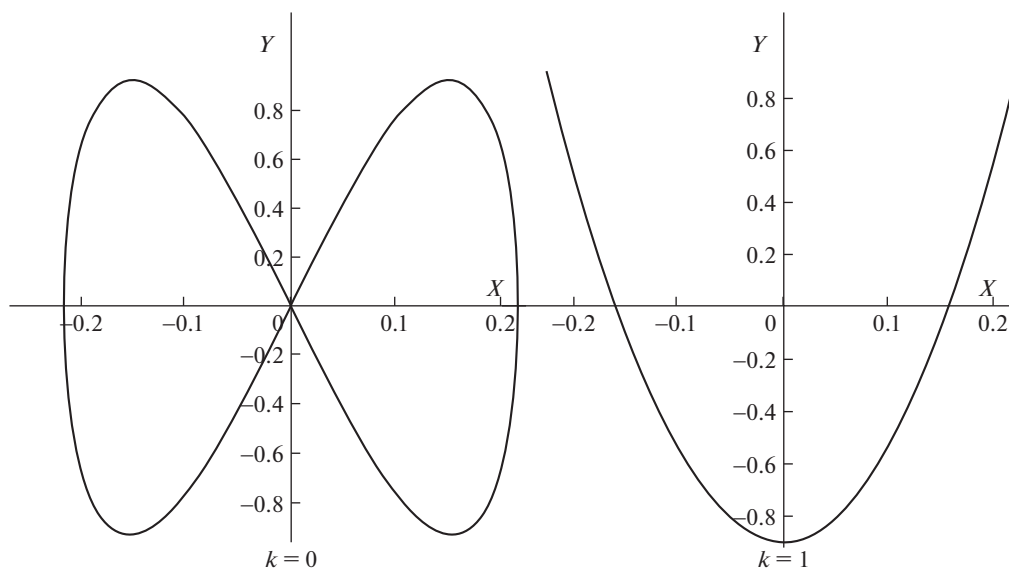


Рис. 6.

На рис. 6 показаны траектории точки касания M на плоскости O_*XY для случаев $k = 0$ и $k = 1$. Как и на рис. 5, принято, что $b^2 = 3/2a^2$, $c^2 = 9a^2$, а $\tilde{c} = 1/10$. В качестве единицы длины принята длина полуоси a эллипсоида. При таком выборе параметров для $k = 0$

$$X_M = -0.215262 \sin \varphi_2, \quad Y_M = -0.926605 \sin 2\varphi_2,$$

а для $k = 1$

$$X_M = -0.222435 \sin \varphi_2, \quad Y_M = -0.899089 \cos 2\varphi_2$$

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2014. 496 с.
2. Poiseux V. Solution de quelques question relatives au mouvement d'un corps solide pesant pos'e sur un plan horizontale // J. des math'ematiques pures et appliqu'ees. 1852. Т. 17. P. 1–30.
3. Маркеев А.П., Мошук Н.К. Об устойчивости движения эллипсоида на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // Механика твердого тела. Киев, 1984. Вып. 16. С. 56–64.
4. Карпетян А.В. Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 504–511.
5. Карпетян А.В., Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой плоскости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 260–267.
6. Карпетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1983. 132 с.

7. Маркеев А.П. О движении тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 553–567.
8. Маркеев А.П., Мошук Н.К. Качественный анализ движения тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 37–42.
9. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости // В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 118–121.
10. Буров А.А., Карапетян А.В. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 501–503.
11. Сальникова Т.В. О существовании дополнительных аналитических интегралов в динамике твердого тела. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1985. 101 с.
12. Сумбатов А.С. Некоторые инвариантные соотношения в задаче о движении тела по горизонтальной гладкой плоскости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 34–41.
13. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
14. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
15. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
16. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
17. Джакаль Г.Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

On Nonlinear Oscillations of a Triaxial Ellipsoid on a Smooth Horizontal Plane

A. P. Markeev^{a,b,#}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia*

^b*Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: anat-markeev@mail.ru*

The motion of a homogeneous ellipsoid along a fixed horizontal plane in a homogeneous gravitational field is considered. The plane is assumed to be absolutely smooth, and the semiaxes of the ellipsoid are different. There is a position of stable equilibrium, when the ellipsoid rests on the plane with the lowest point of its surface. Nonlinear oscillations of the ellipsoid in the vicinity of this equilibrium are investigated. The analysis is carried out using the methods of classical perturbation theory, KAM-theory, and computer algebra algorithms. The normal form of the Hamilton function of perturbed motion up to terms of the sixth degree inclusive with respect to deviations from the equilibrium position is obtained. An approximate analytical representation of the Kolmogorov set of conditionally periodic oscillations is given, an estimate of the measure of this set is indicated. The problem of the existence and orbital stability of periodic motions arising from stable equilibrium in the resonant and nonresonant cases is studied.

Keywords: rigid body, conditionally periodic and periodic oscillations, stability

REFERENCES

1. Markeev A.P. Dynamics of a body in contact with a solid surface. Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Res.; Nauka, 2014. 496 p. (in Russian)
2. Poiseux V. Solution de quelques question relatives au mouvement d'un corps solide pesant pos'e sur un plan horizontale // J. des math'ematiques pures et appliqu'ees, 1852. T. 17, pp. 1–30.
3. Markeev A.P., Moshchuk N.K. On the stability of the motion of an ellipsoid on an absolutely smooth horizontal plane // Solid mechanics. Kiev, 1984. Iss. 16. pp. 56–64. (in Russian)
4. Karapetyan A.V. On the stability of stationary movements of a heavy solid body on an absolutely smooth horizontal plane // JAMM, 1981, vol. 45, no. 3, pp. 504–511. (in Russian)

5. *Karapetyan A.V., Rubanovsky V.N.* On bifurcation and stability of permanent rotations of a heavy tri-axial ellipsoid on a smooth plane // JAMM, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 260–267. (in Russian)
6. *Karapetyan A.V., Rumyantsev V.V.* Stability of conservative and dissipative systems // Itogi Nauki i Tekhniki (Gen. Mech.), vol. 6. Moscow: VINITI, 1983. 132 p. (in Russian)
7. *Markeev A.P.* On the motion of a heavy homogeneous ellipsoid on a fixed horizontal plane // JAMM, 1982, vol. 46, no. 4, pp. 553–567. (in Russian)
8. *Markeev A.P., Moshchuk N.K.* Qualitative analysis of the motion of a heavy solid body on a smooth horizontal plane // JAMM, 1983, vol. 47, no. 1, pp. 37–42. (in Russian)
9. *Burov A.A.* On partial integrals of equations of motion of a solid body along a smooth horizontal plane // in: Probl. Stabil.&Stabil. of Motion Res. Moscow: Comput. Center of the USSR AS, 1985, pp. 118–121. (in Russian)
10. *Burov A.A., Karapetyan A.V.* On the non-existence of an additional integral in the problem of the motion of a heavy solid ellipsoid on a smooth plane // JAMM, 1985, vol. 49, no. 3, pp. 501–503. (in Russian)
11. *Salnikova T.V.* On the existence of additional analytical integrals in the dynamics of a solid. Dis. Cand. Phys.&Math. Sci. Moscow: MSU, 1985. 101 p.
12. *Sumbatov A.S.* Some invariant relations in the problem of the motion of a body along a horizontal smooth plane // JAMM, 1988, vol. 52, no. 4, pp. 34–41. (in Russian)
13. *Malkin I.G.* Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations: In 2 Vols., Germantown, Md.: US Atom. Energy Commis., Techn. Inform. Serv., 1959.
14. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopedia Math. Sci. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
15. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc., no. 81, Providence, R.I.: AMS, 1968.
16. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems, AMS Coll. Publ., vol. 9, Providence, R. I.: AMS, 1966.
17. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.