

УДК 517.958:539.3:517.956.8

**АНОМАЛЬНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ УПРУГОЙ ВОЛНЫ
ЧЕРЕЗ ТОНКУЮ ПЕРЕМЫЧКУ, СОЕДИНЯЮЩУЮ ДВА ПЛОСКИХ
ИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДА**

© 2022 г. С. А. Назаров^{1,*}

¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 25.05.2022 г.

После доработки 15.08.2022 г.

Принята к публикации 15.08.2022 г.

Построена асимптотика коэффициентов прохождения и отражения для продольной волны, приходящей с бесконечности и рассеивающейся на резонаторе, тонкой перемычке, соединяющей два рукава волновода – однородные изотропные полуполосы. Подбором размеров перемычки обеспечен неожиданный эффект почти полного прохождения волны из одного рукава в другой на любой заданной наперед частоте из первого интервала непрерывного спектра. В общей ситуации реализуется почти полное отражение. Обсуждаются открытые вопросы.

Ключевые слова: изотропный двумерный волновод с тонкой перемычкой, продольные колебания, аномалия прохождения упругой волны, коэффициенты рассеяния, асимптотика

DOI: 10.31857/S003282352206011X

1. Упругий волновод. Пусть $\Pi_{\pm}^h = \{x = (x_1, x_2) : \pm x_1 > \ell^h, |x_2| < 1\}$ – две упругие полуполосы-рукава, соединенные тонкой ($h > 0$ – малый параметр) перемычкой $\Theta^h = \{x : |x_1| \leq \ell^h, |x_2| < h\}$. Масштабированием ширина полуполос сведена к двум, т.е. декартовы координаты (x_1, x_2) и все геометрические параметры сделаны безразмерными. Полуудлина перемычки

$$\ell^h = \ell^0 + h\ell'; \quad \ell^0 > 0 \tag{1.1}$$

будет подобрана так, чтобы обеспечить необычные свойства упругого – однородного и изотропного, с постоянными Ламе $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ – волновода (рис. 1)

$$\Xi^h = \Pi_+^h \cup \Theta^h \cup \Pi_-^h \tag{1.2}$$

При учете симметрии относительно оси абсцисс дополним плоскую задачу теории упругости

$$L(\nabla_x)u^h(x) := -\mu\Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu)\nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \rho\kappa^2 u^h(x); \quad x \in \Xi^h \tag{1.3}$$

$$\sigma^{(n)}(u^h; x) = 0, \quad x \in \partial\Xi^h; \quad j = 1, 2 \tag{1.4}$$

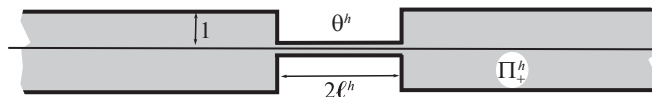


Рис. 1. Упругий волновод с перемычкой длиной $2\ell^h$ и шириной $2h \ll 1$, соединяющей рукава-полуполосы.

искусственными условиями на средней линии фигуры (1.2)

$$u^h(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{12}(u^h; x_1, 0) = 0; \quad x_1 \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, $u = (u_1, u_2)$ – вектор смещений, $\rho > 0$ – плотность материала и $\kappa > 0$ – частота колебаний, $n = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали, определеннный почти всюду на границе $\partial\Xi^h$, кроме восьми угловых точек, на которых краевые условия (1.4) не ставятся, $\sigma_1^{(n)}(u)$ и $\sigma_2^{(n)}(u)$ – компоненты вектора нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_j^{(n)}(u) &= n_1 \sigma_{1j}(u) + n_2 \sigma_{2j}(u); \quad \partial_j = \partial/\partial x_j \\ \sigma_{ij}(u) &= \mu(\partial_j u_k + \partial_k u_j) + \lambda \delta_{j,k} \nabla_x \cdot u; \quad j, k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Наконец, $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера.

Соотношения (1.5) исключают из рассмотрения изгибные колебания волновода, т.е. он подвержен только продольным колебаниям. Укажем волны, распространяющиеся в его рукавах Π_{\pm}^h

$$w^{\pm}(x) = e^{\pm i\theta x} W^{\pm}(x_2); \quad W^{\pm} = (W_1^{\pm}, W_2^{\pm}) \quad (1.7)$$

Вектор-функции W^{\pm} и число θ суть решения спектральных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} -\mu(\partial_2^2 - \theta^2)W_1^{\pm}(x_2) \mp i\theta(\lambda + \mu)(\pm i\theta W_1^{\pm}(x_2) + \partial_2 W_2^{\pm}(x_2)) &= \rho\kappa^2 W_1^{\pm}(x_2) \\ -\mu(\partial_2^2 - \theta^2)W_2^{\pm}(x_2) - (\lambda + \mu)\partial_2(\pm i\theta W_1^{\pm}(x_2) + \partial_2 W_2^{\pm}(x_2)) &= \rho\kappa^2 W_2^{\pm}(x_2) \\ \text{при } |x_2| \leq 1 \\ -(\lambda + 2\mu)\partial_2 W_1^{\pm}(x_2) \pm i\theta\lambda W_1^{\pm}(x_2) = 0, \quad \mu(\partial_2 W_1^{\pm}(x_2) \pm i\theta W_2^{\pm}(x_2)) &= 0 \\ \text{при } x_2 = \pm 1 \\ W_2^{\pm}(x_2) = 0, \quad \mu(\partial_2 W_1^{\pm}(x_2) \pm i\theta W_2^{\pm}(x_2)) = 0 &\text{ при } x_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Анализируя соотношения (1.8), приходим к равенствам

$$W_1^{\pm}(x_2) = W_1^0(x_2), \quad W_2^{\pm}(x_2) = \pm i W_2^0(x_2), \quad (1.9)$$

где W_1^0 и W_2^0 – вещественные функции, четная и нечетная соответственно.

Амплитудные части (1.9) зафиксируем так, чтобы соблюсти условия ортогональности и нормировки ([3], гл.5, § 2)

$$Q(w^{\pm}, w^{\pm}) = \pm i, \quad Q(w^{\pm}, w^{\mp}) = 0 \quad (1.10)$$

$$Q(w, v) = \int_{-1}^1 \sum_{j=1,2} \left\langle \overline{v_j(R, x_2)} \sigma_{j1}(w; R, x_2) - w_j(R, x_2) \overline{\sigma_{j1}(v; R, x_2)} \right\rangle dx_2 \quad (1.11)$$

Симплектическая (полуторалинейная и антиэрмитова) форма (1.11) происходит от формулы Грина для оператора Ламе и потому не зависит от параметра R для волн (1.7). Величина $Q(w, w)$ пропорциональна проекции на ось абсцисс вектора Умова [1] переноса энергии волной w , т.е. принимается энергетический принцип излучения Умова–Мандельштама ([2], гл. 1), ([3], гл. 5), [4].

Вариационная формулировка задачи (1.3)–(1.5) сводится к интегральному тождеству [5, 6]

$$E(u^h, \psi^h; \Xi^h) = \rho \kappa^2 (u^h, \psi^h)_{\Xi^h}; \quad \psi^h \in H_{\#}^h(\Xi^h) \quad (1.12)$$

на подпространстве вектор-функций из класса Соболева

$$H_{\#}^h(\Xi^h) = \left\{ \psi^h \in H^h(\Xi^h): \psi_1^h(x_1, x_2) = \psi_1^h(x_1, -x_2), \psi_2^h(x_1, x_2) = -\psi_2^h(x_1, -x_2) \right\}$$

При этом $(\cdot, \cdot)_{\Xi^h}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Xi^h)$,

а $\frac{1}{2} E(u^h, u^h; \Xi^h)$ – функционал упругой энергии

$$\begin{aligned} E(u^h, u^h; \Xi^h) &= \frac{\mu}{2} \sum_{j,k=1,2} \left\| \partial_j u_k^h + \partial_k u_j^h; L^2(\Xi^h) \right\|^2 + \lambda \left\| \nabla_x \cdot u^h; L^2(\Xi^h) \right\|^2 \\ E(u^h, \psi^h; \Xi^h) &= \frac{1}{4} \left(E(u^h + \psi^h, u^h + \psi^h; \Xi^h) - E(u^h - \psi^h, u^h - \psi^h; \Xi^h) \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Поскольку билинейная форма (1.13) симметрична, положительна и замкнута в пространстве $H^1(\Xi^h)$, вариационной (1.12) и дифференциальной (1.3)–(1.5) задачам отвечает ([7], гл. 10) положительный самосопряженный оператор A^h в гильбертовом пространстве $L^2(\Xi^h)$, непрерывный спектр \wp_c которого – замкнутая положительная полуось $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$. При $\kappa = \kappa_{\dagger}^0 = 0$ (основная точка отсечки) у задачи (1.3), (1.4) в целевой полосе $\Pi = (-1, 1) \times \mathbb{R}$ в силу дополнительного условия (1.5) есть только одно (с точностью до постоянного множителя) ограниченное решение – продольное жесткое смещение $e_{(1)} = (1, 0)$. Следовательно, вблизи начала координат кратность непрерывного спектра равна единице, и вторая точка отсечки κ_{\dagger}^1 внутри непрерывного спектра \wp_c положительна. Зафиксируем какую-то частоту

$$\kappa \in (0, \kappa_{\dagger}^0) \neq \emptyset \quad (1.14)$$

Основная цель работы – подобрать размер (1.1) тонкой балки так, чтобы волна (1.7), приходящая с бесконечности в рукаве Π_-^h , почти полностью проникала через перемычку Θ^h в рукав Π_+^h и уходила в нем на бесконечность. Ввиду симметрии волновода (1.2) можно ограничиться рассмотрением приходящей волны w^+ в полуполосе Π_-^h , а почти полное ее прохождение означает, что решение дифракционной задачи (1.3)–(1.5)

$$W^h(x) = \chi_-(x_1) w^+(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x_1) s_{\pm}^h w^{\pm}(x) + \widetilde{W}^h(x) \quad (1.15)$$

приобретает коэффициенты рассеяния s_{\pm}^h , удовлетворяющие соотношениям

$$\left|s_{+}^h\right| = 1 + o(1) \quad \text{и} \quad \left|s_{-}^h\right| = o(1) \quad (1.16)$$

Здесь χ_{\pm} – гладкие срезающие функции

$$\chi_{\pm}(x_1) = 1 \quad \text{при} \quad \pm x_1 > 3\ell^0 \quad \text{и} \quad \chi_{\pm}(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad \mp x_1 < 2\ell^0 \\ 0 \leq \chi_{\pm} \leq 1$$

Остаток $\widetilde{W}^h(x)$ затухает при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ экспоненциальной скоростью. Закон сохранения энергии обеспечивает равенство

$$\left|s_{+}^h\right|^2 + \left|s_{-}^h\right|^2 = 1 \quad (1.17)$$

Следовательно, одна из формул (1.16) влечет за собой другую.

По причине малой толщины перемычки в ситуации общего положения, наоборот, реализуется почти полное отражение волны w^+ в рукаве Π_-^h , т.е. коэффициенты рассеяния в поле (1.15) удовлетворяют соотношениям

$$\left|s_{-}^h\right| = 1 + o(1) \quad \text{и} \quad \left|s_{+}^h\right| = o(1) \quad (1.18)$$

Ранее эффект аномального прохождения волн через узкие щели и каналы обнаружен [8–13] для скалярных задач (акустические среды, волны на поверхности несжимаемой жидкости и пр.), причем вопрос ставился по-разному: показать [8–11], что эффект проявляется на какой-частоте при помощи аналитических или численных методов, или подогнать [12, 13] геометрические параметры для его реализации на заданной перед частоте путем применения усовершенствованного асимптотического анализа. При анализе векторной задачи (1.3)–(1.5) применяется процедура [14–17] точной настройки параметров волновода для обеспечения необычных свойств волновых процессов, однако в отличие от скалярных задач [12, 13] какие-либо явные формулы для упругих полей и их характеристик недоступны, а результат достигается путем вывода определенных априорных связей между величинами, формирующими асимптотические формулы для коэффициентов рассеяния s_{\pm}^h .

В разд. 2 перечислены специальные решения вспомогательных задач и установлены нужные связи между их числовыми характеристиками. В разд. 3 представлен собственно асимптотический анализ, включающий процедуру понижения размерности [18, 19] на тонкой перемычке Θ^h и метод сращиваемых асимптотических разложений [20, 21] в зонах ее присоединения к массивным рукавам, а разд. 4 посвящен процедуре точной настройки геометрических параметров, обеспечивающей искомый эффект почти полного прохождения волны. Отметим, что, поскольку согласно ограничениям (1.5), (1.14) в волноводе (1.2) имеется только одна пара распространяющихся волн (1.7), унитарность и симметричность матрицы рассеяния означает, что почти полное прохождение волны w^+ в направлении “от $-\infty$ к $+\infty$ ” гарантирует тот же эффект для волны w^- , распространяющейся в направлении “от $+\infty$ к $-\infty$ ”.

В конце статьи обсуждаются сопутствующие вопросы. В разд. 5, 1°, описаны способы обоснования полученных асимптотических представлений, в частности, пояснено, что в формулах (1.16) и (1.18) бесконечно малые $o(1)$ равны $O(h(1 + |\ln h|))$. Далее перечислены доступные обобщения формы и упругих свойств волновода, а также ограничения вводимые по необходимости. Кроме того, приведены упрощенный (акустический волновод; разд. 5, 4°) и усложненный (пространственный упругий волновод; разд. 5, 5°) варианты постановки задачи и приемы их исследования.

2. Вспомогательные задачи. 1°. *Перемычка.* Стандартная асимптотическая процедура понижения размерности ([18], гл. 15 и 16), ([19], гл. 1 § 3) в задаче (1.3)–(1.5), суженной на тонкую перемычку, приводит к одномерной модели продольных колебаний балки. Именно, введем растянутую поперечную координату $\eta = h^{-1}x_2$ и, заменив многоточием младшие – не существенные в предпринимаемом анализе – члены, подставим разложение вектора смещений

$$u^h(x) = h^{-1}v(x_1)e_{(1)} + v'(\eta; x_1) + hv''(\eta; x_1) + \dots \quad (2.1)$$

в уравнения (1.3) на прямоугольнике $(-\ell^0, \ell^0) \times (-h, h)$ и краевые условия (1.5) на его сторонах $(-\ell^0, \ell^0) \times \{\pm h\}$. Соберем множители при одинаковых степенях малого параметра h и последовательно решим задачи Неймана для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $(-1, 1)$. Две задачи для компонент вектора v^0

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial^2 v_1'}{\partial \eta^2}(\eta; x_1) = 0, \quad \eta \in (-1, 1), \quad \pm \mu \frac{\partial v_1'}{\partial \eta}(\pm 1; x_1) = 0 \\ -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v_2'}{\partial \eta^2}(\eta; x_1) = 0, \quad \eta \in (-1, 1), \quad \pm(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2'}{\partial \eta}(\pm 1; x_1) = \lambda \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) \end{aligned}$$

дают выражение для первого поправочного члена представления (2.1)

$$v'(\eta; x_1) = -\frac{\lambda \eta}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) e_{(2)} \quad (2.2)$$

Здесь $e_{(2)} = (0, 1)$ – орт оси ординат. Компонента v_2'' второй поправки v'' равна нулю, а условие разрешимости задачи для первой компоненты

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial^2 v_1''}{\partial \eta^2}(\eta; x_1) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x_1) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_2'}{\partial \eta \partial x_1}(\eta; x_1); \quad \eta \in (-1, 1) \\ \pm \mu \frac{\partial v_1''}{\partial \eta}(\pm 1; x_1) = \mp \mu \frac{\partial v_2'}{\partial \eta}(\pm 1; x_1) \end{aligned}$$

превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно продольной координаты x_1

$$-D \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x_1) = \rho \kappa^2 v(x_1); \quad x_1 \in (-\ell^0, \ell^0) \quad \left(D = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) взято предельное ($h = 0$) значение размера (1.1) перемычки Θ^h , а замена $\ell^0 \mapsto \ell^h$ будет задействована в разд. 3 и 4.

Поскольку тонкая балка присоединена к массивным телам, уравнение (2.3) замыкается [24] условиями Дирихле

$$v(\pm \ell^0) = 0 \quad (2.4)$$

Зафиксируем главный член в представлении (1.1)

$$\ell^0 = \frac{\pi m}{2\kappa} \sqrt{\frac{D}{\rho}} \quad \text{при некотором } m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (2.5)$$

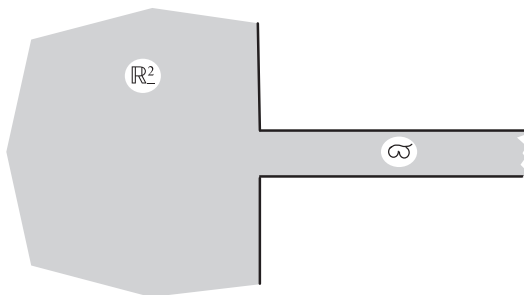


Рис. 2. Пограничный слой: упругое сочленение полуплоскости и полуполосы.

так, чтобы однородная задача (2.3), (2.4) приобрела нетривиальное решение – собственную функцию

$$\mathbf{v}(x_1) = \sin(\alpha(x_1 + \ell^0)); \quad \alpha = \frac{\pi m}{2\ell^0} \quad (2.6)$$

2°. *Пограничный слой.* Вблизи концов перемычки Θ^h , т.е. около точек $P_{\pm}^h = (\pm\ell^0, 0)$, возникает [18], [22–24] явление пограничного слоя, которое, как обычно, опишем в растянутых координатах

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = (h^{-1}(x_1 \mp \ell^h), h^{-1}x_2)$$

Для определенности рассмотрим левый (знак минус) конец перемычки и не будем писать верхний индекс \pm у координат ξ_j . Соответствующая плоская статическая задача теории упругости

$$L(\nabla_{\xi})Z(\xi) = 0; \quad \xi \in \Upsilon \quad (2.7)$$

$$\sigma_j^{(n)}(Z; \xi) = 0; \quad \xi \in \partial\Upsilon, \quad j = 1, 2 \quad (2.8)$$

$$Z_2(\xi_1, 0) = 0, \quad \sigma_{12}(Z; \xi_1, 0) = 0; \quad \xi_1 \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

поставлена на объединении Υ полуплоскости $\mathbb{R}_-^2 = \{\xi : \xi_1 < 0\}$ и полуполосы $\mathfrak{O} = [0, +\infty) \times (-1, 1)$ (рис. 2). Условия (2.8) и (2.9) унаследованы от условий (1.4) и (1.5), а инерционный член исчез из системы (2.7) потому, что мало последнее вычитаемое в преобразованном дифференциальном операторе

$$L(\nabla_x) - \rho\kappa^2 = h^{-2}(L(\nabla_{\xi}) - h^2\rho\kappa^2)$$

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений [20, 21], в рамках которого при построении главных членов асимптотики требуется найти все решения задачи (2.7)–(2.9) с не более чем логарифмическим ростом в полуплоскости и не более чем линейным ростом в полуполосе. Одно из таких решений очевидно – постоянный вектор $Z^0 = e_{(1)}$. Второе Z^1 задано своим поведением на бесконечности

$$Z^1(\xi) = B(\xi) + \mathbf{b}e_{(1)} + O(|\xi|^{-1}); \quad \rho = |\xi| \rightarrow +\infty, \quad \xi \in \mathbb{R}_-^2 \quad (2.10)$$

$$Z^1(\xi) = \frac{1}{2} \left(\xi_1 e_{(1)} - \frac{\lambda \xi_2}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} \right) + O(e^{-\varepsilon \xi_1}); \quad \xi_1 \rightarrow +\infty, \quad \xi \in \mathfrak{O}, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.11)$$

Здесь $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ – несущественная для дальнейшего постоянная, B – решение Буссинеска–Фламана [25, 26] о сосредоточенной силе, действующей на полуплоскость

$$B(\xi) = B^0 e_{(1)} \ln \frac{1}{\rho} + B^1(\varphi), \quad B^0 = \frac{2}{\pi} \tag{2.12}$$

Кроме того, $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ – система полярных координат, а явный вид угловой части B^1 решения (2.12) не понадобится. Важны только известные формулы для полярных компонент тензора напряжений

$$\sigma_{\rho\rho}(B; \xi) = -\frac{2D \cos \varphi}{\pi \rho}, \quad \sigma_{\rho\varphi}(B; \xi) = \sigma_{\varphi\varphi}(B; \xi) = 0 \tag{2.13}$$

Следовательно

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \rho=R\}} \sigma_1^{(p)}(Z^1; \xi) \Big|_{\rho=R} ds_\xi = -D, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \sigma_{11}(Z^1; R, \xi_2) d\xi_2 = D$$

и поэтому равна нулю сумма главных векторов сил, порожденных полем смещений Z^1 на бесконечности в полуплоскости и в полуполосе. Именно последнее обстоятельство обеспечивает существование решения Z^1 задачи (2.7)–(2.9) с заданным поведением при $|\xi| \rightarrow \infty$ и $\xi_1 \rightarrow +\infty$. Отсутствие в правой части формулы (2.11) постоянного слагаемого фиксирует это решение. Согласно общим результатам [27, пример 1.12 и теорема 5.8] всякое решение задачи (2.7)–(2.9) с указанными ограничениями на рост – линейная комбинация $c_0 Z^0 + c_1 Z^1$. Соотношения (2.10) и (2.11) можно почленно дифференцировать при соглашениях $\nabla_\xi O(|\xi|^{-p}) = O(|\xi|^{-p-1})$ и $\nabla_\xi O(e^{-\varepsilon \xi_1}) = O(e^{-\varepsilon \xi_1})$.

3°. *Рукава.* Асимптотика поля (1.15) внутри рукавов Π_\pm^h описывается при помощи решений задачи теории упругости в не зависящей от параметра h полуполосе $\Pi^\square = (-\infty, 0) \times (-1, 1)$

$$L(\nabla_x)U(x) = \rho \kappa^2 U(x); \quad x \in \Pi^\square \tag{2.14}$$

$$\sigma_j^{(n)}(U; x) = 0; \quad x \in \partial \Pi^\square \setminus \mathbb{O}, \quad j = 1, 2 \tag{2.15}$$

$$U(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{12}(U; x_1, 0) = 0; \quad x_1 \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

Краевое условие (2.15) поставлено на проколоте торце полуполосы, и далее понадобится поле смещений G , порожденное сосредоточенной в начале координат \mathbb{O} продольной силой

$$G(x) = B(x) + G e_{(1)} + O(|x|); \quad x \rightarrow \mathbb{O} \tag{2.17}$$

$$G(x) = g w^-(x) + O(e^{\varepsilon x_1}); \quad x_1 \rightarrow -\infty, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.18}$$

Коэффициенты \mathbf{G} и \mathbf{g} зависят лишь от постоянных Ламе λ и μ , а правила $\nabla_x O(|x|^{-p}) = O(|x|^{-p-1})$ и $\nabla_x O(e^{\varepsilon x_1}) = O(e^{\varepsilon x_1})$ разрешают почленное дифференцирование соотношений (2.17) и (2.18).

Еще одно поле W , гладкое вблизи точки \mathbb{O} и равное сумме приходящей w^+ и отраженной волн, допускает представление

$$W(x) = w^+(x) + s w^-(x) + O(e^{\varepsilon x_1}); \quad x_1 \rightarrow -\infty, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.19}$$

Модуль коэффициента отражения s равен единице согласно закону сохранения энергии и условиям нормировки и ортогональности (1.10). Применим формулу интегрирования по частям для вектор-функций W и G в длинном ($R \rightarrow +\infty$) прямоугольнике с вырезанным полукругом

$$\Pi^{\square}(R) = \{x \in \Pi^{\square} : x_1 > -R, |x| > 1/R\}$$

и вычислим предел при учете соотношений (1.10), (1.11) и (2.13). В результате обнаружим связь коэффициентов в представлениях (2.17)–(2.19)

$$isg + DW_1(\mathbb{C}) = 0 \quad (2.20)$$

Аналогичная формула Грина для вектор-функции G на обеих позициях вместе с равенствами (1.10), (1.11) и (2.13) дают соотношение

$$\begin{aligned} i|\mathbf{g}|^2 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} Q_{-R}(G, G) = \\ &= \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\overline{G(x)} \cdot \sigma^{(r)}(G; x) - G(x) \cdot \overline{\sigma^{(r)}(G; x)} \right) \Big|_{r=1/R} d\varphi = -D\bar{G} + DG \Rightarrow \quad (2.21) \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} G = \frac{|\mathbf{g}|^2}{2D} \end{aligned}$$

При этом (r, φ) – система полярных координат, а $\sigma^{(r)}(u)$ – вектор с компонентами (1.6) и нормалью $(-\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Полуполоса Π^{\square} получается из полуполосы Π^h_{-} заменой координат

$$x \mapsto (x_1 + \ell^h, x_2)$$

при сохранении вектора смещений. По причине изотропности упругого материала подстановки

$$x \mapsto (\ell^h - x_1, x_2), \quad u^h(x) \mapsto (-u_1^h(\ell^h - x_1, x_2), u_2^h(\ell^h - x_1, x_2)) \quad (2.22)$$

обеспечивает переход от Π^{\square} к Π^h_{+} и от задачи (2.14)–(2.16) в Π^{\square} к задаче (1.3)–(1.4) в Π^h_{+} . Замены (2.22) будут применены в асимптотических конструкциях на рукаве Π^h_{+} , а преобразованные таким образом поля G и W обозначим G_{\circ} и W_{\circ} . Аналогичные операции нужны и при формировании пограничного слоя в окрестности точки P^h_{+} .

3. Построение асимптотики. Простые асимптотические представления поля (1.15) на рукавах

$$\begin{aligned} W^h(x) &= W_-^h(x_1 + \ell^h, x_2) + \dots := \\ &:= w^+(x_1 + \ell^h, x_2) + s_-^0 w^-(x_1 + \ell^h, x_2) + \tilde{W}_-^0(x_1 + \ell^h, x_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$W^h(x) = W_+^h(x_1 + \ell^h, x_2) + \dots := s_+^0 w^+(x_1 + \ell^h, x_2) + \tilde{W}_+^0(x_1 + \ell^h, x_2) + \dots \quad (3.2)$$

дополним усложненным согласно формулам (2.1) и (2.2) из разд. 2, 1^o, представлением на перемычке

$$\begin{aligned} W^h(x) &= W_0^h(\eta; x_1) + \dots := \left(\frac{1}{h} c v(x_1) + v^0(x_1) \right) - \\ &- \frac{\lambda \eta}{\lambda + 2\mu} \left(c \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) + h \frac{\partial v^0}{\partial x_1}(x_1) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

При этом остатки \tilde{W}_{\pm}^0 в разложениях (3.1) и (3.2) затухают на бесконечности с экспоненциальной скоростью, а s_{\pm}^0 – главные члены асимптотик коэффициентов рассеяния в поле (1.15)

$$s_{\pm}^h = s_{\pm}^0 + \dots \tag{3.4}$$

Как и ранее, многочлен заменяет младшие асимптотические члены, оцененные далее в разд. 5, 1°. Неизвестные коэффициент \mathbf{c} и функция v^0 , удовлетворяющая уравнению (2.3) и продолженная по гладкости за пределы интервала $(-\ell^0, \ell^0)$, подлежат определению, а \mathbf{v} – собственная функция (2.6) задачи (2.3), (2.4), причем

$$\partial_1 v(\pm \ell^0) := \frac{\partial v}{\partial x_1}(\pm \ell^0) = (\pm 1)^m \alpha \tag{3.5}$$

В зонах присоединения перемычки к массивным частям волновода (1.2), т.е. около точек P_{\pm}^h , введем внутренние разложения поля (1.10)

$$W^h(x) = z_{\pm}^0(\xi^{\pm}) + \dots \tag{3.6}$$

и согласуем их с внешними разложениями (3.1)–(3.3) при помощи процедуры сращения [20, 21].

Сначала обследуем окрестность точки P_-^h со стороны перемычки и, отбросив члены $O(h)$ при учете формул (2.6) и (3.5), преобразуем разложение (3.3) к форме

$$\begin{aligned} W^h(x) &= h^{-1} e_{(1)}(v(-\ell^h) + (x_1 + \ell^h) \partial_1 v(-\ell^h) + \dots) + \\ &+ e_{(1)} v^0(-\ell^h) e_{(1)}(v(-\ell^h) + (x_1 + \ell^h) \partial_1 v(-\ell^h) + \dots) + e_{(1)} v^0(-\ell^h) + \dots - \\ &- \mathbf{c} e_{(2)} \frac{\lambda \eta}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) + \dots = (v^0(-\ell^0) - \mathbf{c} \alpha \ell') e_{(1)} + \mathbf{c} \alpha \left(\xi_1^- e_{(1)} - \frac{\lambda \xi_2^-}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} \right) + \dots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Сравним правую часть соотношения (3.7) с представлением (2.11) решения Z^1 задачи (2.7)–(2.9) и привлечем в конструкцию еще одно решение $Z^0 = e_{(1)} Z$. В итоге приходим к равенству

$$z_-^0(\xi^-) = 2c\alpha Z^1(\xi^-) + (v^0(-\ell^0) - c\alpha \ell') e_{(1)} \tag{3.8}$$

В силу формул (2.10) и (2.12) внутреннее разложение (3.6), (3.8) около точки P_-^h в рукаве Π_-^h принимает вид

$$W^h(x) = 2c\alpha B(x_1 + \ell^h, x_2) + (2c\alpha (B^0 \ln h + \mathbf{b}) + (v^0(-\ell^0) - c\alpha \ell')) e_{(1)} \tag{3.9}$$

Множитель $\ln h$ возник из-за связи $r_{h-} := |x - P_-^h| = hr$ радиальных переменных и присутствия логарифма в решении Буссинеска–Фламана (2.12). Согласно процедуре сращения [20, 21] сингулярность этого решения передается члену W_-^0 внешнего разложения (3.1), который и соответствующий коэффициент отражения заданы формулами

$$\begin{aligned} W_-^0(x) &= W(x_1 + \ell^h, x_2) + 2c\alpha G(x_1 + \ell^h, x_2) = \\ &= W_1(\mathbb{O}) e_{(1)} + (2c\alpha B(x_1 + \ell^h, x_2) + \mathbf{G} e_{(1)}) + O(r_{h-}) \quad \text{при } x \rightarrow \mathbb{O} \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$s_-^0 = \mathbf{s} + 2\mathbf{c}\alpha\mathbf{g} \quad (3.11)$$

Закончим сращивание разложений (3.1) и (3.7), сравнив множители при жестком поступательном смещении $e_{(1)}$ в правых частях соотношений (3.9) и (3.10). В результате получим краевое условие для функции v^0 из представления (3.3)

$$v^0(-\ell^0) = f_-^0 := \mathbf{c}\alpha\ell' + W_1(\mathbb{O}) + 2\mathbf{c}\alpha(\mathbf{G} - \mathbf{b} - B^0 \ln h) \quad (3.12)$$

Сращивание внешних (3.1), (3.3) и внутреннего (3.6) разложений около точки P_+^h проводится по той же схеме при учете подстановок (2.22) и отсутствия приходящей волны w^- в рукаве Π_+^h . Формула (3.5) для собственной функции v задачи (2.3), (2.4) уточняет внешнее разложение (3.3) около концевой точки P_+^h перемычки Θ^h

$$W^h(x) = \left(v^0(-\ell^0) - (-1)^m \mathbf{c}\alpha\ell' \right) e_{(1)} + (-1)^m \mathbf{c}\alpha \left(\xi_1^- e_{(1)} - \frac{\lambda \xi_2^-}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} \right) \quad (3.13)$$

Представление (2.11) решения Z^1 задачи (2.7)–(2.9) и формулы (2.22), меняющие знак у первой компоненты преобразованного решения $Z_{\mathbb{O}}^1$, дают главный член внутреннего разложения (3.6)

$$z_+^0(\xi^+) = 2(-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha Z_{\mathbb{O}}^1(\xi^+) + \left(v^0(-\ell^0) - (-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha\ell' \right) e_{(1)} \quad (3.14)$$

Полностью реализова процедуру сращивания разложений (3.6), (3.14) и (3.2) в окрестности точки P_+^h , находим выражения для поля W_+^0 в Π_+^h и сопутствующего коэффициента прохождения s_+^0 волны w^+ , а также краевое условие в точке ℓ^0 для асимптотической поправки v^0 на перемычке

$$W_+^0(x) = 2(-1)^m \mathbf{c}\alpha G_{\mathbb{O}}(x_1 + \ell^h, x_2) = 2(-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha B_{\mathbb{O}}(\ell^h - x_1, x_2) - \mathbf{G}e_{(1)} + O(r_{h-}) \quad (3.15)$$

при $x \rightarrow \mathbb{O}$

$$s_+^0 = 2(-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha\mathbf{g} \quad (3.16)$$

$$v^0(\ell^0) = f_+^0 := (-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha\ell' + 2(-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha(\mathbf{G} - \mathbf{b} - B^0 \ln h) \quad (3.17)$$

В силу предположения о собственном числе (2.5) задача (2.3), (3.12), (3.17) приобретает одно условие разрешимости

$$0 = f_+^0 \partial_1 v(\ell^0) - f_-^0 \partial_1 v(-\ell^0) \quad (3.18)$$

Согласно формулам для величин f_{\pm}^0 соотношение (3.18) принимает вид

$$4\mathbf{c}\alpha\ell' + W_1(\mathbb{O}) + 4\mathbf{c}\alpha(\mathbf{G} - \mathbf{b} - B^0 \ln h) = 0 \quad (3.19)$$

и связывает неизвестные ℓ' и \mathbf{c} в представлениях (1.1) и (3.3).

4. Подбор размеров перемычки. В распоряжении имеется один свободный вещественный параметр ℓ' из формулы (1.1) для размера ℓ^h . Употребим его для упрощения формулы (3.19) и положим

$$\ell'_T(\ln h) = \mathbf{b} + B^0 \ln h - \text{Re } \mathbf{G} + \mathbf{T} \quad (4.1)$$

При этом $T \in \mathbb{R}$ – новый свободный параметр. Тот факт, что величина (4.1) зависит от большого параметра $\ln h$ не влияет на проведенные выкладки, так как поправочное

слагаемое $h\ell'_T(\ln h)$ в представлении (1.1) остается малым, однако он привносит множитель $1 + |\ln h|$ в мажоранту из оценки (5.5). Теперь равенство (3.19) принимает вид

$$4c\alpha\ell^0(T + i \operatorname{Im} \mathbf{G}) + W_1(\mathbb{C}) = 0 \Rightarrow c\alpha = -\frac{W_1(\mathbb{C})}{4(T + i \operatorname{Im} \mathbf{G})}$$

и при учете соотношений (3.11), (3.16) и (2.20), (2.21) находим главные члены асимптотик коэффициентов рассеяния

$$s_-^0 = s - \frac{\mathbf{g}W_1(\mathbb{C})}{2(T + i \operatorname{Im} \mathbf{G})} = s \left(\mathbf{1} + \frac{i|\mathbf{g}|^2}{2DT + i|\mathbf{g}|^2} \right) = s \frac{t}{t - i} \quad (4.2)$$

$$s_+^0 = (-1)^m s \frac{i}{t - i}, \quad t = 2 \frac{DT}{|\mathbf{g}|^2}$$

Закон сохранения энергии (1.18) предоставляет простую проверку проведенных вычислений

$$|s_-^0|^2 + |s_+^0|^2 = \frac{|\mathbf{s}|^2}{(t^2 + 1)^2} (t^2 |t + i|^2 + |it - 1|^2) = 1$$

Подведем итог, предположив, что $\mathbf{g} \neq 0$ для придания смысла формулам (4.2). В случае $T = 0$ имеем $s_-^0 = 0$ и $s_+^0 = (-1)^m$, т.е. выполнены соотношения (1.5), означающие почти полное прохождение волны w^+ из рукава Π_-^h через перемычку в рукав Π_+^h . Этот эффект неустойчив и требует точной настройки размера

$$\ell^*(h) = \ell^0 + h\ell'(\ln h) = \frac{\pi m}{2\kappa} \sqrt{\frac{D}{\rho}} + h(\mathbf{b} + B^0 \ln h - \operatorname{Re} \mathbf{G}) \quad (4.3)$$

прямоугольника Θ^h согласно формулам (2.5) и (4.1) при $T = 0$.

Если нарушить базовое равенство (2.5), то при любом малом возмущении $h\ell'$ длины ℓ^0 перемычки реализуется почти полное отражение волны w^+ , приходящей с бесконечности в рукаве Π_-^h , а именно, соотношения (1.18). Вытекающие из равенств (4.2) формулы

$$|s_-^0| = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 + 1}} \rightarrow 1, \quad s_+^0 = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty \quad (4.4)$$

для главных членов асимптотики (3.4) коэффициентов рассеяния показывают, как почти полное прохождение трансформируется в почти полное отражение волны при увеличении отклонения $2h|T|$ от критического размера (4.4).

Гипотетическая ситуация $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ требует отдельного обсуждения. Во-первых, к связям (2.20) и (2.21) числовых параметров можно добавить еще одну связь

$$\mathbf{g} = s\bar{\mathbf{g}} \quad (4.5)$$

обеспеченное представлениями (2.18), (2.19) и вытекающим из них равенством $G(x) = \overline{G(x)} - \bar{\mathbf{g}}W(x)$, однако все эти связи не позволяют найти коэффициент \mathbf{g} . Во-вторых, поскольку ограничение $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ устраняет из представления (2.18) волну w^+ , решение G задачи (2.14)–(2.16) исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью и становится вещественным, т.е. $\operatorname{Im} \mathbf{G} = \mathbf{0}$. Кроме того, $W_1(\mathbb{C}) = 0$ согласно связи (2.20), а значит, при критическом размере $\ell_0^*(\ln h)$ соотношение (3.19) справедливо при вся-

ком множителе \mathbf{c} (он определяется при построении младших асимптотических членов), но все-таки $s_-^0 = \mathbf{s}$ и $s_+^0 = 0$ в любом случае согласно соотношениям (3.11) и (3.16); иными словами, эффект почти полного прохождения пропадает.

Покажем, что неравенство $\mathbf{g}^\kappa := \mathbf{g} \neq 0$ выполнено по крайней мере для малых частот $\kappa > 0$, при которых асимптотические формулы для волн (1.7) можно найти при помощи одномерной модели балки, подставив решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.3)

$$v^\pm(x) = e^{\pm i\theta^0 \kappa x_1}, \quad \theta^0 = \sqrt{\frac{\rho}{D}}$$

в разложение (3.16) с $h = 1$. При учете формул (2.2) и $e^{\pm i\theta^0 \kappa x_1} = 1 \pm i\theta^0 \kappa x_1 + O(\kappa^2 x_1^2)$ получим соотношение

$$w^{\kappa\pm}(x) = \frac{a^0}{\sqrt{\kappa}} e^{\pm i\theta^0 \kappa x_1} \left(e_{(1)} \mp i\theta^0 \kappa \frac{\lambda x_2}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} + \dots \right), \quad a^0 = \frac{1}{2\sqrt{\rho D}} \quad (4.6)$$

Множитель a^0 нужен для соблюдения в главном условия нормировки (1.10). Процедура ([28], гл. 9) вывода асимптотической формулы (4.6) применялась [29, 30] к двумерным и трехмерным изотропным и анизотропным упругим волноводам.

В качестве внешнего, справедливого на удалении от торца полуполосы, разложения возьмем выражение

$$G^\kappa(x) = \mathbf{g}^\kappa w^{\kappa-}(x) + \dots = \mathbf{g}^\kappa \frac{a^0}{\sqrt{\kappa}} \left(1 - i\theta^0 \kappa x_1 + \dots \right) \left(e_{(1)} \pm i\theta^0 \kappa \frac{\lambda x_2}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} + \dots \right) \quad (4.7)$$

Коэффициент \mathbf{g}^κ определим при сращивании с внутренним, пригодным в конечной части волновода Π^\square , разложением

$$G^\kappa(x) = c^\kappa e_{(1)} + G^0(x) e_{(2)} + \dots \quad (4.8)$$

Здесь c^κ — неизвестный множитель, а G^0 — решение задачи (2.14)–(2.16) при $\kappa = 0$, для которого верны представления

$$\begin{aligned} G^0(x) &= B(x) + \mathbf{G}^0 e_{(1)} + O(|x|); & x &\rightarrow \mathbb{O} \\ G(x) &= -\frac{1}{2} \left(x_1 e_{(1)} - \frac{\lambda x_2}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} \right) + O(e^{\varepsilon x_1}); & x_1 &\rightarrow -\infty, \quad \varepsilon > 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

В поле G^0 сосредоточенная в точке \mathbb{O} сила компенсирована продольной силой на бесконечности. Приравнявая в разложениях (4.7) и (4.8), (4.9) коэффициенты при $e_{(1)}$ и $x_j e_{(j)}$, находим, что $c^\kappa = a^0 \kappa^{-1/2} \mathbf{g}^\kappa$ и

$$\mathbf{g}^\kappa = \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \left(\mathbf{g}^0 + O(\sqrt{\kappa}) \right), \quad \mathbf{g}^0 = \frac{1}{2a^0 \theta^0} > 0$$

Соотношение (4.8) показывает, что в самом деле коэффициент \mathbf{g}^κ в представлении (2.18) решения G^κ задачи (2.14)–(2.16) о действии сосредоточенной продольной силы на торце полуполосы $\Pi^\square = (-\infty, 0) \times (-1, 1)$ отличен от нуля при малой частоте $\kappa > 0$.

5. Несколько замечаний. 1°. *Подтверждение асимптотических конструкций.* Построению асимптотических разложений решений краевых задач на сочленениях областей с различными предельными размерностями посвящено большое количество публикаций, в которых рассмотрены спектральные [31–36], [8–10, 12, 13] и статические [37–40] скалярные уравнения и система уравнений теории упругости [23, 24, 41–45]. Симметрия волновода и постановка искусственных условий (1.5) значительно упрощают процедуру обоснования асимптотических представлений решения и его характеристик, так как введенные условия аннулируют повороты точек на оси абсцисс и тем самым по сути компенсируют векторную природу упругих полей. В частности, для вектор-функций, подчиненных первому ограничению (1.5), выполнено упрощенное неравенство Корна [46] на усеченном волноводе $\Xi^h(R) = \{x \in \Xi^h: |x| < R\}$

$$\|u^h; H^1(\Xi^h(R))\|^2 \leq c_R E \left(\|u^h, u^h; \Xi^h(R)\| + \|u^h; L^2(\Xi^h(R) \setminus \Theta^h)\| \right)^2 \quad (5.1)$$

Для сохранения независимости множителя c_R от толщины $2h$ балки Θ^h в общей ситуации левая часть неравенства (5.1) должна быть заменена [46] суммой

$$\begin{aligned} & \|u^h; H^1(\Xi^h(R) \setminus \Theta^h)\|^2 + \\ & + \sum_{j=1,2} \left(\|\partial_j u_j^h; L^2(\Theta^h)\|^2 + h^2 \|\partial_{3-j} u_j^h; L^2(\Theta^h)\|^2 + h^{2(j-1)} \|u_j^h; L^2(\Theta^h)\|^2 \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Появление в сумме (5.2) степеней малого параметра h с положительными показателями значительно усложняет как асимптотические представления полей смещений и напряжений на перемычке, так и процедуру их обоснования (см., например, ([19], гл. 4) и [24]).

Как обычно в методе сращиваемых разложений, внешние (3.1)–(3.3) и внутренние (3.7) разложения соединяются в единое глобальное асимптотическое приближение посредством срезающих функций. Простейший способ – применить разбиение единицы [21], однако воспользуемся более точной конструкцией [18, 47, 48], привлекающей срезающие функции с “перехлестывающимися” носителями

$$\begin{aligned} X_{\pm}^h(x) &= 1 - \chi\left(h^{-1}(x - P_{\pm}^h)\right) \quad \text{на } \Pi_{\pm}^h, \quad \chi_{\pm}(x) = \chi(x - P_{\pm}^h) \\ X_0^h(x) &= \left(1 - \chi\left(h^{-1}(x - P_-^h)\right)\right) \left(1 - \chi\left(h^{-1}(x - P_+^h)\right)\right) \quad \text{на } \Theta^h \end{aligned}$$

Здесь χ – гладкая функция с малым носителем, равная единице в окрестности начала координат и подобранная так, что $\chi_- \chi_+ = 0$. Положим

$$W_{(\text{as})}^h(x) = X_{\pm}^h(x) W_{\pm}^0(x) + \chi_{\pm}(x) z_{\pm}^0(\xi^{\pm}) - X_{\pm}^h(x) \chi_{\pm}(x) M_{\pm}^h(x) \quad \text{на } \Pi_{\pm}^h \quad (5.3)$$

$$W_{(\text{as})}^h(x) = X_0^h(x) W_0^h(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x) z_{\pm}^0(\xi^{\pm}) - X_0^h(x) \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x) M_0^h(x; \ln h) \quad \text{на } \Theta^h \quad (5.4)$$

В обеих формулах (5.3) и (5.4) члены разложений, подвергшиеся сращиванию в разд. 3, учтены дважды – и в первых и во вторых слагаемых из правых частей, однако такое дублирование устранено вычитаемыми, содержащими суммы названных членов. Именно, M_0^h – выражение, полученное в конце преобразования (3.7), т.е. незатухающие при $\xi_{\pm}^{\pm} \rightarrow \mp \infty$ члены вектор-функций (3.8) и (3.13), а M_+^h и M_-^h – главные члены представлений (3.10) и (3.15) или составляющие вектор-функций (3.8) и (3.13), ко-

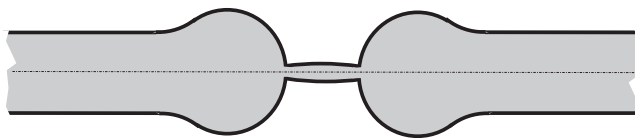


Рис. 3. Упругий волновод с резонаторами, соединенными тонкой перемычкой, и с осью симметрии (штрих-пунктирная линия).

торые не исчезают в пределе при $|\xi_{\pm}^{\pm}| \rightarrow \infty$ в полуплоскости \mathbb{R}_{\pm}^2 . Невязки, оставленные построенным приближенным асимптотическим решением $W_{(as)}^h$ в уравнениях (1.3) и краевых условиях (1.4) оказываются малыми из-за достаточно быстрого затухания остатков в упомянутых представлениях. Последнее действие для вывода оценок

$$|s_{\pm}^h - s_{\pm}^0| \leq ch(1 + |\ln h|) \quad (5.5)$$

остатков в представлениях (3.4) коэффициентов рассеяния – применение техники весовых пространств с отделенной асимптотикой ([3], гл. 5), [15, 17]. Нормы в таких пространствах включают модули коэффициентов рассеяния, и поэтому малость функционала из правой части интегрального тождества (1.12) для разности $W^h - W_{(as)}^h$ обеспечивает неравенства (5.5). Изложены [12, 17] особенности определения норм, связанные с наличием тонких элементов конструкций.

2°. *Доступные обобщения.* Если материал волновода ортотропный с осями x_1 и x_2 упругой симметрии, то приведенные выкладки и рассуждения требуют лишь незначительных изменений – нужные формулы для одномерной модели тонкой балки можно найти, например, в ([19], гл. 4, § 2). Допустимы симметричные относительно оси абсцисс возмущения формы волновода (1.2) (ср. рис. 3) – уравнение продольных колебаний искривленной балки также известны. Некоторые осложнения возникают в том случае, если основания балки и границы рукавов искривлены в окрестности зон присоединения перемычки. Именно, в окрестности точек P_{\pm}^h приходится ввести локальные криволинейные координаты (n_{\pm}, s_{\pm}) , в которых оператор Ламе из системы (1.3) принимает вид (2×2) -матрицы $L(n_{\pm}, s_{\pm}, \partial_{n_{\pm}}, \partial_{s_{\pm}})$ дифференциальных операторов второго порядка с переменными коэффициентами, однако главные (после “заморозки” коэффициентов в точке P_{\pm}^h с координатами $n_{\pm} = 0$ и $s_{\pm} = 0$) части этих операторов принимают вид $L(\partial_{n_{\pm}}, \partial_{s_{\pm}})$, а значит, при построении пограничных слоев растяжение координат в h^{-1} раз по-прежнему приводит к задаче (2.7)–(2.9) на сочленении Υ (рис. 2).

3°. *Изгибные колебания перемычки.* Для проведенного асимптотического анализа принципиальна зеркальная симметрия волновода (1.2) относительно оси абсцисс и постановка искусственных условий (1.5). Дело в том, что собственные частоты поперечных колебаний имеют вид $\kappa_{\pm}^h = h\kappa_{\pm}^0$, где κ_{\pm}^0 – собственные частоты одномерной балки Кирхгофа с заземленными концами

$$\frac{D}{3} \frac{\partial^4 v_{\pm}}{\partial x_1^4}(x_1) = 2\rho(\kappa_{\pm}^0)^2 v_{\pm}(x_1); \quad x_1 \in (-\ell^0, \ell^0), \quad v_{\pm}(\pm\ell^0) = 0, \quad \frac{\partial v_{\pm}}{\partial x_1}(\pm\ell^0) = 0$$

Итак, спектр тонкой балки характеризуется концентрацией собственных частот около точки $\kappa = 0$, а значит, на частоте (1.14) количество распространяющихся волн, которые следует учесть в асимптотической процедуре из разд. 3, неограниченно возрастает при $h \rightarrow +0$. Это обстоятельство делает разработанную процедуру бесполезной, а переход к ультранизким частотам $\kappa = O(h)$ требует существенной модификации процедуры, так как строение непрерывного спектра задачи теории упругости в полуполосах Π_{\pm}^h без искусственных условий (1.5) существенно искажается и обеспечивает иные непривычные эффекты [29].

4°. *Плоский акустический волновод.* Проиллюстрируем проведенные в разд. 2–4 выкладки на примере скалярной задачи, в которой доступны явные формулы, и воспроизведем в упрощенном виде результаты [12]. Рассмотрим краевую задачу для оператора Лапласа

$$-\Delta_x u^h(x) = \kappa^2 u^h(x); \quad x \in \Xi^h, \quad \partial_n u^h(x) = 0, \quad x \in \partial \Xi^h$$

При этом u^h – давление в акустической среде, а частота κ берется из интервала (1.14) с точкой отсечки $\kappa_{\dagger}^1 = \pi/2$ непрерывного спектра $\wp_c = [0, +\infty)$. Формулы (2.19) с поршневыми волнами (1.7) принимают вид

$$w^{\pm}(x) = \frac{e^{\pm i \kappa x_1}}{\sqrt{2\kappa}}, \quad W(x) = w^+(x) + w^-(x), \quad s = \mathbf{1}, \quad W(\mathbb{O}) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$$

Функция Грина G с особенностью в начале координат \mathbb{O} удовлетворяет соотношениям (2.17) и (2.18), в которых

$$B(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \quad B^0 = 1, \quad \text{Im } \mathbf{G} = \frac{1}{\kappa}, \quad \mathbf{g} = -i \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$$

Ключевые связи (2.20), (2.21) и (4.5), разумеется, сохраняются, и, что важно, $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. Процедура сращивания приводит к прежним соотношениям (3.11), (3.16) и (3.19), а выбор размера $\ell'_0(\ln h)$ в определениях (1.1), (4.1) обеспечивает эффект почти полного прохождения волны w^+ из рукава Π_-^h через тонкий акустический канал Θ^h в рукав Π_+^h . Вместе с тем, явные аналитические формулы для величин \mathbf{b} и $\text{Im } \mathbf{G}$ в представлениях (2.10) и (2.17) специальных решений задач Неймана для уравнения Пуассона в областях Υ и Π^{\square} недоступны, т.е. и в скалярном случае для определения критической длины перемычки Θ^h нужно применять численные методы.

5°. *Пространственные задачи.* Рассмотрим трехмерные цилиндры

$$\begin{aligned} \Pi_{\pm}^h &= \left\{ x = (x_1, x'): \pm x_1 > \ell^h, x' = (x_2, x_3) \in \Omega \right\} \\ \Theta^h &= \left\{ x: |x_1| < \ell^h, x' \in \omega \right\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

и составленный из них упругий однородный изотропный волновод (1.2). При этом Ω и ω – области на плоскости \mathbb{R}^2 , ограниченными кусочно-гладкими контурами и обладающие зеркальной симметрией относительно осей x_2 и x_3 . Одномерная модель Кирхгофа–Клебша тонкого стержня (5.6) представляет собой систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений – двух четвертого порядка, предоставляющих осредненные изгибы стержня, и двух второго порядка, описывающих продольную деформацию и закручивание. Для того чтобы применить предложенную в разд. 3 проце-

дуру, необходимо дополнить пространственную задачу теории упругости искусственными условиями, которые нейтрализуют собственные частоты поперечных колебаний в ультра-низкочастотном диапазоне.

Первый набор таких условий на срединной плоскости $\Sigma_3^h = \{x \in \Xi^h : x_3 = 0\}$ тела Ξ^h

$$\sigma_{12}(u^h; x_1, x_2, 0) := \mu(\partial_1 u_3^h(x_1, x_2, 0) + \partial_3 u_1^h(x_1, x_2, 0)) = 0$$

$$u_2^h(x_1, x_2, 0) = u_3^h(x_1, x_2, 0) = 0; \quad x \in \Sigma_3^h$$

оставляет в шестимерном линейном пространстве жестких смещений (крестом обозначено векторное произведение)

$$\mathcal{R} = \{u(x) = c^0 + c^1 \times x : c^0, c^1 \in \mathbb{R}^3\} \quad (5.7)$$

только продольное поступательное смещение $c^0 e_{(1)}$ вдоль оси x_1 . Таким образом, в одномерной модели стержня Θ^h остаются лишь одно уравнение второго порядка, а исходную задачу можно сузить на половину $\Xi_{\square}^h = \{x \in \Xi^h : x_1 = 0\}$ волновода $\Xi^h \subset \mathbb{R}^3$. Кроме того, продолжения компоненты u_1^h по четности и компонент u_2^h, u_3^h по нечетности через плоскость $\{x : x_3 = 0\}$ сохраняют гладкость решения u_{\square}^h , удовлетворяющего искусственным краевым условиям на поверхности $\Sigma_3^h \subset \partial \Xi_{\square}^h$, а также систему уравнений (1.3) в теле Ξ^h и краевые условия (1.4) на поверхности $\partial \Xi^h$. Иными словами, восстановленное поле удовлетворяет всей задаче в трехмерном волноводе (1.2).

Приведем еще две группы приемлемых искусственных условий

$$\sigma_{12}(u^h; x_1, 0, x_3) = 0, \quad \sigma_{22}(u^h; x_1, 0, x_3) = 0, \quad u_2^h(x_1, 0, x_3) = 0; \quad x \in \Sigma_{2+}^h$$

$$\sigma_{13}(u^h; x_1, x_2, 0) = 0, \quad u_2^h(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \sigma_{33}(u^h; x_1, x_2, 0) = 0; \quad x \in \Sigma_{3+}^h$$

Здесь фигурируют декартовы компоненты $\sigma_{pq}(u^h; x)$, $p, q = 1, 2, 3$, тензора напряжений и поверхности $\Sigma_3^h = \{x \in \Xi^h : x_j = 0, x_{5-j} > 0\}$ при $j = 2$ и $j = 3$. Теперь в линейном пространстве (5.7) остаются поступательные смещения $c_1^0 e_{(1)}$ и повороты $(0, -c_1^1 x_3, c_1^1 x_2)$ вокруг оси x_1 , а подходящие продолжения через плоскости $\{x : x_2 = 0\}$ и $\{x : x_3 = 0\}$ вектора смещений u_{\square}^h в четвертушке Ξ_{\square}^h на весь волновод Ξ^h сохраняют гладкость поля и соотношения (1.3), (1.4).

Указаны [49] и другие способы постановки искусственных условий на срединных плоскостях тела Ξ^h , устраняющие из одномерной модели тонкого стержня оба уравнения четвертого порядка. Аналогичные проведенным в разд. 3 и 4 выкладки и рассуждения позволят обнаружить аномальное прохождение упругих волн через тонкий соединительный стержень в пространственном упругом волноводе, однако результаты в этом направлении не публиковались.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00046).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
3. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.
4. Назаров С.А. Условия излучения Умова—Мандельштама в упругих периодических волноводах // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 7. С. 43—72.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
6. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
7. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
8. Kriegsmann G.A. Complete transmission through a two-dimensional diffraction grating // SIAM J. Appl. Math. 2004. V. 65. № 1. P. 24—42.
9. Shipman S.P., Venakides S. Resonant transmission near nonrobust periodic slab modes // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 2. 026611.
10. Lin J. Zhang H. Scattering and field enhancement of a perfect conducting narrow slit // SIAM J. Appl. Math. 2017. V. 77. № 3. P. 951—976.
11. Lin J. Zhang H. Scattering by a periodic array of subwavelength slits I: field enhancement in the diffraction regime // Multiscale Model. Sim. 2018. V. 16. № 2. P. 922—953.
12. Назаров С.А., Шенель Л. Аномалии распространения акустических волн в двух полубесконечных цилиндрах, соединенных тонким уплощенным каналом // ЖВММФ. 2021. Т. 61. № 4. С. 135—152.
13. Назаров С.А., Шенель Л. Аномальное прохождение волн через тонкий канал, соединяющий два акустических волновода // Докл. РАН. 2021. Т. 496. С. 22—27.
14. Назаров С.А. Принудительная устойчивость собственного значения на непрерывном спектре волновода с препятствием // ЖВММФ. 2012. Т. 52. № 3. С. 521—538.
15. Назаров С.А. Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функци. анал. и его прил. 2013. Т. 47. № 3. С. 37—53.
16. Боннэ-Бен Диа А.-С., Назаров С.А. Препятствия в акустическом волноводе, становящиеся “невидимыми” на заданных частотах // Акустич. ж. 2013. Т. 59. № 6. С. 685—692.
17. Chesnel L., Nazarov S.A., Taskinen J. Surface waves in a channel with thin tunnels at the bottom: non-reflecting underwater topography // Asympt. Anal. 2020. V. 118. № 1, 2. P. 81—122.
18. Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenevski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991.
19. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга. 2002.
20. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
21. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
22. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Asymptotic Analysis of Fields in Multistructures. Oxford: Clarendon Press, 1999.
23. Назаров С.А. Асимптотика решений спектральной задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкой стяжкой // Сибирск. матем. ж. 2012. Т. 53. № 2. С. 345—364.
24. Назаров С.А. Асимптотика собственных колебаний массивного упругого тела с тонкой перегородкой // Изв. РАН. Сер. Матем. 2013. Т. 77. № 1. С. 91—144.
25. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
26. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

27. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // УМН. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
28. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
29. Назаров С.А. Энергетические условия излучения Мандельштама и вектор Умова–Пойнтинга в упругих волноводах // Пробл. матем. анализ. Вып. 72. 2013. С. 101–146.
30. Назаров С.А. Почти полное прохождение низкочастотных волн в локально поврежденном упругом волноводе // Пробл. матем. анализ. Вып. 100. 2019. С. 83–121.
31. Beale J.T. Scattering frequencies of resonators // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. № 4. P. 549–563.
32. Арсеньев А.А. О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // ЖВММФ. 1976. Т. 16. 3. С. 718–724.
33. Гадильшин Р.Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. I // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 10–21.
34. Гадильшин Р.Р. О собственных значениях “гантели с тонкой ручкой” // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. № 2. С. 45–110.
35. Joly P., Tordeux S. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: The asymptotic expansion // SIAM Multiscale Model. Simul. 2006. V. 5. № 1. P. 304–336.
36. Бахарев Ф.Л., Назаров С.А. Лакуны в спектре волновода, составленного из областей с различными предельными размерностями // Сиб. матем. ж. 2015. Т. 56. № 4. С. 732–751.
37. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure // Asympt. Anal. 1994. V. 8. № 2. P. 105–143.
38. Назаров С.А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1 // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 18. 1995. С. 3–78.
39. Назаров С.А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 2 // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 20. 1997. С. 155–195.
40. Назаров С.А., Соколовский Я. Топологическая производная интеграла Дирихле при образовании тонкой перемычки // Сиб. матем. ж. 2004. Т. 45. № 2. С. 410–426.
41. Nazarov S.A. Junction problem of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. Т. 320. № 11. P. 1419–1424.
42. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // Asymptot. Anal. 1995. V. 11. № 4. P. 343–415.
43. Nazarov S.A. Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // Math. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 20. № 3. P. 219–243.
44. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Fields in non-degenerate 1D–3D elastic multistructures // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2001. V. 54. № 2. P. 177–212.
45. Назаров С.А. Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 24. 2004. С. 95–214.
46. Назаров С.А. Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // УМН. 2008. Т. 63. № 1. С. 37–110.
47. Назаров С.А., Ромашев Ю.А. Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. № 4. С. 30–40.
48. Назаров С.А. Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сшиваемых асимптотических разложений // Тр. Санкт-Петербург. матем. о-ва. 1996. Т. 5. С. 112–183.
49. Назаров С.А. Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой // ЖВММФ. 2008. Т. 48. № 5. С. 863–881.

Abnormal Transmission of Elastic Waves Through a Thin Ligament Connecting Two Planar Isotropic Waveguide**S. A. Nazarov^{a,#}**^a*Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Saint-Petersburg, Russia*[#]*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

Asymptotics of transmission and reflection coefficients are constructed for the longitudinal elastic wave which incomes from infinity and scatters in the resonator, namely a thin ligament connecting two trunks of the waveguide, i.e., homogeneous isotropic half-strips. By choosing of sizes of the ligament, it is detected an unexpected effect of almost complete transition of a wave from one trunk to the other at a prescribed frequency in the first interval of the continuous spectrum. In general situation the almost complete reflection is realized. Open questions are discussed.

REFERENCES

1. *Umov N.A.* Equations of Motion of Energy in Bodies. Odessa: Ul'rikh and Shultze Typography, 1974.
2. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamical mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains. Moscow: Nauka, 1979. (in Russian)
3. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
4. *Nazarov S.A.* Umov–Mandel'stam radiation conditions in elastic periodic waveguide // *Mat. sb.*, 2014, vol. 205, no. 7. pp. 953–982.
5. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics // *Appl. Math. Sci.*, 1985, vol. 49.
6. *Fichera G.* Existence Theorems in the Theory of Elasticity. Handbuch der Physic. Berlin: Springer, 1972.
7. *Birman M.Sh., Solomyak M.Z.* Spectral Theory of Selfadjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: Reidel Publ. Co., 1987.
8. *Kriegsmann G.A.* Complete transmission through a two-dimensional diffraction grating // *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, vol. 65, no. 1, pp. 24–42.
9. *Shipman S.P., Venakides S.* Resonant transmission near nonrobust periodic slab modes // *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 71, no. 2, 026611.
10. *Lin J. Zhang H.* Scattering and field enhancement of a perfect conducting narrow slit // *SIAM J. Appl. Math.*, 2017, vol. 77, no. 3, pp. 951–976.
11. *Lin J. Zhang H.* Scattering by a periodic array of subwavelength slits I: field enhancement in the diffraction regime // *Multiscale Model. Sim.*, 2018, vol. 16, no. 2, pp. 922–953.
12. *Nazarov S.A., Chesnel L.* Anomalies of transmission of acoustic waves in two semi-infinite cylinders connected by thin flattened canal // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 4, pp. 646–663.
13. *Nazarov S.A., Chesnel L.* Abnormal transition of waves through a thin canal connecting two acoustic waveguides // *Dokl. Phys.*, 2021, vol. 66, no. 1, pp. 45–50.
14. *Nazarov S.A.* Enforced stability of an eigenvalue in the continuous spectrum of a waveguide with an obstacle // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 3, pp. 448–464.
15. *Nazarov S.A.* Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum // *Funct. Anal. Appl.*, 2013, vol. 475, no. 3, pp. 195–209.
16. *Bonnet-Ben Dhia A.-S., Nazarov S.A.* Obstacles in acoustic waveguides becoming “invisible” at given frequencies // *Acoust Phys.*, 2013. vol. 59, no. 6, pp. 633–639.
17. *Chesnel L., Nazarov S.A., Taskinen J.* Surface waves in a channel with thin tunnels at the bottom: non-reflecting underwater topography // *Asympt. Anal.*, 2020, vol. 118, no. 1, 2, pp. 81–122.

18. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991.
19. *Nazarov S. A.* Asymptotic Theory of Thin Plates and Rods. Dimension Reduction and Integral Bounds, Novosibirsk: Nauch. Kn., 2002. (in Russian)
20. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.: Acad. Press. 1964.
21. *Il'in A.M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Transl. Math. Monogr., Vol. 102. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992.
22. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic Analysis of Fields in Multistructures. Oxford: Clarendon Press, 1999.
23. *Nazarov S.A.* Asymptotics of solutions to the spectral elasticity problem for a spatial body with a thin coupler // *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 274–290.
24. *Nazarov S.A.* Asymptotics of eigen-oscillations of a massive elastic body with a thin baffle // *Math. Izvestiya.*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 87–142.
25. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. McGraw Hill Book Co., 1951.
26. *Rabotnov Yu. N.* Mechanics of a Deformable Solid. Moscow: Nauka, 1988.
27. *Nazarov S.A.* The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes // *Uspehi Mat. Nauk.*, 1999, vol. 54, no. 5, pp. 77–142.
28. *Vainberg M.M., Trenogin V.A.* Theory of Branching of Non-Linear Equations. Noordhoff, Leyden: Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 1974.
29. *Nazarov S.A.* The Mandelstam energy radiation conditions and the Umov–Poynting vector in elastic waveguides // *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 195, no. 5, pp. 676–729.
30. *Nazarov S.A.* Almost complete transmission of low frequency waves in a locally damaged elastic waveguide // *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 244, no. 3, pp. 451–497.
31. *Beale J.T.* Scattering frequencies of resonators // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1973, vol. 26, no. 4, pp. 549–563.
32. *Aren'ev A.A.* The existence of resonance poles and scattering resonances in the case of boundary conditions of the second and third kind // *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1976, vol. 16, no. 3, pp. 171–177.
33. *Gadyl'shin R.R.* Characteristic frequencies of bodies with thin spikes. I. Convergence and estimates // *Math. Notes.*, 1993, vol. 54, no. 6, pp. 1192–1199.
34. *Gadyl'shin R.R.* On the eigenvalues of a “dumbbell” with a thin handle // *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 2, pp. 265–329.
35. *Joly P., Tordeux S.* Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: The asymptotic expansion // *SIAM Multiscale Model. Simul.*, 2006, vol. 5, no. 1, pp. 304–336.
36. *Bakharev F.L., Nazarov S.A.* Open waveguides in doubly periodic junctions of domains with different limit dimensions // *Sib. Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 575–592.
37. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure // *Asympt. Anal.*, 1994, vol. 8, no. 2, pp. 105–143.
38. *Nazarov S.A.* Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions. 1 // *J. Math. Sci.*, 1996, vol. 80, no. 5, pp. 1989–2034.
39. *Nazarov S.A.* Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions. 2 // *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 97, no. 3, pp. 155–195.
40. *Nazarov S.A., Sokolowski J.* The topological derivative of the Dirichlet integral under formation of a thin bridge // *Sib. Math. J.*, 2004, vol. 45, no. 2, pp. 341–355.
41. *Nazarov S.A.* Junction problem of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1*, 1995, T. 320, no. 11, pp. 1419–1424.
42. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // *Asympt. Anal.*, 1995, vol. 11, no. 4, pp. 343–415.
43. *Nazarov S.A.* Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 3, pp. 219–243.

-
44. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Fields in non-degenerate 1D–3D elastic multi-structures // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 2001, vol. 54, no. 2, pp. 177–212.
 45. *Nazarov S.A.* Asymptotic analysis and modeling of the jointing of a massive body with thin rods // *J. Math. Sci.*, 2003, vol. 127, no. 5, pp. 2172–2263.
 46. *Nazarov S.A.* Korn's inequalities for elastic junctions of massive bodies and thin plates and rods // *Russ. Math. Surv.*, 2008, vol. 63, no. 1, pp. 35–107.
 47. *Nazarov S.A., Romashev Yu.A.* Variation of the intensity factor under rupture of the ligament between two collinear cracks // *Izv. Akad. Nauk Armenian SSR. Mekh.*, 1982, no. 4, pp. 30–40. (in Russian)
 48. *Nazarov S.A.* Asymptotic conditions at a point, self-adjoint extensions of operators and the method of matched asymptotic expansions // *Trans. Am. Math. Soc. Ser. 2*, 1999, vol. 193, pp. 77–126.
 49. *Nazarov S.A.* Trapped modes for a cylindrical elastic waveguide with a damping gasket // *Comput. Math. & Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 5, pp. 863–881.