

УДК 532.517.2

УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОМ СНИЗУ СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ТВЕРДЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2022 г. К. Г. Шварц^{1,*}, Ю. А. Шварц^{1,**}¹Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

*e-mail: kosch@psu.ru

**e-mail: jul-schwarz@psu.ru

Поступила в редакцию 15.05.2022 г.

После доработки 05.08.2022 г.

Принята к публикации 15.08.2022 г.

Исследуется устойчивость адвективного течения в плоском горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами. На верхней границе слоя задано линейное распределение температуры, нижняя граница теплоизолированная. Плоскопараллельное течение, возникшее под действием горизонтальной конвекции, описывается аналитически в виде точного решения уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска. В рамках линейной теории исследуется устойчивость адвективного течения на нормальные возмущения при различных значениях числа Прандтля. Определяются наиболее опасные моды, строятся нейтральные кривые. В рамках нелинейной постановки задачи изучается структура конечно-амплитудных возмущений в надкритической области вблизи минимумов нейтральных кривых.

Ключевые слова: горизонтальная конвекция, адвективные течения, точное решение, нормальные возмущения, устойчивость, конечно-амплитудные возмущения

DOI: 10.31857/S0032823522060133

Адвективное течение возникает в плоском горизонтальном слое несжимаемой жидкости при наличии продольного градиента температуры [1]. В ситуации, когда температура на одной или обеих его горизонтальных границах является линейной функцией ($T = Ax$, где x – продольная координата, A – постоянный горизонтальный температурный градиент на границах слоя), течение описывается аналитическим выражением, которое является точным решением уравнений Навье–Стокса [2, 3]. Если обе границы твердые, на которых задано условие прилипания, то возникает течение Остроумова–Бириха [4]. Устойчивость такого течения исследована в [5]. В обзоре [3] описан класс подобных аналитических решений, обзор устойчивости различных адвективных, описанных таким образом течений, представлен в [6].

В последние годы появилось аналитическое описание адвективных термокапиллярных течений в условиях невесомости [7, 8], представлены точные решения уравнений Навье–Стокса, описывающие плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимающейся жидкости с твердыми границами, на которых задано линейное распределение температуры разных знаков, либо линейный горизонтальный температурный градиент [9], с внутренним линейным источником тепла [10], при наличии условия проскальзывания Навье [11], при наличии акустической волны [12–14], исследована устойчивость адвективного течения феррожидкости [15]. Сформулирован

новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса, описывающих адвективные течения, когда температура на границах слоя распределяется по квадратичному закону. Задача сводится к решению нелинейной системы нестационарных одномерных уравнений [16–18]. В работе [19] был учтен слабый наклон слоя и в качестве жидкости была рассмотрена бинарная молекулярная смесь с положительной термодиффузией. В этой задаче тоже имеется точное аналитическое решение, в предельном случае вырождающееся в классическое плоскопараллельное движение Остроумова–Бириха. В этой работе было показано, что реализующееся течение переносит примесь в один угол и в результате данная система может использоваться как сепаратор для жидких молекулярных смесей.

Адвективное течение в горизонтальном слое жидкости с обеими теплоизолированными границами описано аналитически в [19]. В этом случае кубический профиль скорости остается неизменным, а в профиле температуры отсутствуют зоны потенциально неустойчивой стратификации, тем самым исключаются моды неустойчивости рэлеевской природы. Линейный анализ устойчивости, проведенный в [20], показал, что опасные гидродинамические моды возникают при малых числах Прандтля (Pr) от 0.015 до 0.27. Имеется немало работ по исследованию подобных течений при наличии однородного продольного градиента температуры численно и аналитически как в двумерной постановке [21–24], так и в трехмерной [25, 26], а также опубликованы экспериментальные работы [27, 28].

Влияние вращения на адвективное течение в плоском слое жидкости при числе Прандтля (Pr) равного 0.1 с твердыми границами с одной нижней теплоизолированной границей исследовалось в [29], где было выявлено несколько наиболее опасных мод неустойчивости. Это побудило к изучению влияния Pr на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости при теплоизолированной нижней границе при отсутствии вращения.

1. Математическая модель. Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости шириной $2h$ с твердыми границами, помещенный в однородное поле тяжести. Движение жидкости описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска [1] в декартовой системе координат $Oxyz$ (z – вертикальная, x , y – горизонтальные координаты). Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры и давления h , h^2/ν , $g\beta Ah^3/\nu$, Ah , $\rho_0 g\beta Ah^3$ (где ν – кинематическая вязкость, β – коэффициент теплового расширения, g – ускорение свободного падения, ρ_0 – средняя плотность) получим исходные уравнения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Gr \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + Gr \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + Gr \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w + T \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + Gr \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] &= \frac{1}{Pr} \Delta T \\ Gr = \frac{g\beta Ah^4}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора скорости \mathbf{v} , T – температура и p – давление, зависящие от времени t и пространственных координат x, y, z ; Gr – число Грасгофа, χ – коэффициент температуропроводности, оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Граничные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$z = -1: \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{v} = 0; \quad z = 1: T = x, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Течение замкнутое:

$$\int_{-1}^1 u dz = 0, \quad \int_{-1}^1 v dz = 0 \quad (1.3)$$

Краевая задача (1.1)–(1.3) имеет аналитическое решение [24]:

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \frac{1}{6}(z^3 - z), \quad v_0(z) \equiv w_0(z) \equiv 0, \quad T_0 = x + \text{Gr Pr } \tau_0(z) \\ \tau_0(z) &= \frac{1}{360}[3z^5 - 10z^3 + 15z - 8] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Скорость имеет антисимметричный кубический профиль и совпадает с [4] для твердых границ, профиль температуры не обладают симметрией.

2. Линейная теория. Для исследования устойчивости адвективного течения (1.4) применяется метод малых возмущений [5]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad v_0 = (u_0, 0, 0), \quad \mathbf{V} = (U, V, W), \quad T = T_0 + \theta, \quad P = p_0 + P' \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Gr}[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{V}] = -\nabla P' + \Delta \mathbf{V} + \theta \mathbf{i}_z; \quad \mathbf{i}_z = (0, 0, 1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr}[\mathbf{V}\nabla\theta + \mathbf{V}\nabla T_0 + \mathbf{v}_0\nabla\theta] = \frac{1}{\text{Pr}}\Delta\theta$$

$$z = -1: U = V = W = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$z = 1: U = V = W = 0, \quad \theta = 0 \quad (2.4)$$

Здесь \mathbf{V} , θ , P' – малые возмущения вектора скорости, температуры и давления. В рамках линейной теории устойчивости в уравнениях (2.2)–(2.4) пренебрегаем малыми квадратичными по возмущениям \mathbf{V} и θ слагаемыми. Полученная система линейных уравнений имеет решения в виде нормальных возмущений, пропорциональных $\exp(\lambda t + k_x x + k_y y)$, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, – декремент, определяющий временной ход возмущений. Вещественные коэффициенты k_x и k_y – это компоненты волнового вектора вдоль осей Ox и Oy . Следуя [1, 5], изучаются два хорошо известных [12] предельных случая. Это плоские периодические возмущения в виде валов с осью, параллельной оси Ox и пространственные спиральные периодические по y возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной к оси Ox .

Случай плоских возмущений. Уравнения возмущений выводятся из линеаризованной системы (2.2)–(2.4) в предположении, что производная по y от всех функций равна нулю ($k_y = 0$). Возмущения скорости и температуры являются функциями времени t и двух пространственных координат x и z . Численным методом, описанном в [29–31], решается начально-краевая задача для системы линейных уравнений в частных производных по времени t и переменной z .

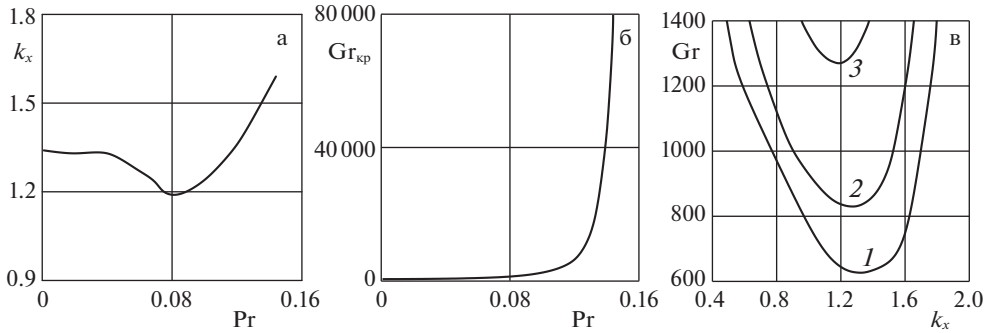


Рис. 1.

Расчеты показали, что аналогично [20, 22] только при малых значениях числа Прандтля ($0 \leq Pr < 0.16$) возникает опасная колебательная гидродинамическая мода. Волновое число k_x убывает при $0 \leq Pr < 0.08$ (рис. 1а) и принимает минимальное значение $k_x = 1.19$ при $Pr = 0.08$, а затем оно монотонно возрастает с ростом числа Прандтля. Критическое число Грасгофа ($Gr_{кр}$) возрастает при всех значениях Pr (рис. 1б). На рис. 1в представлены характерные нейтральные кривые при 1 – $Pr = 0.04$, 2 – $Pr = 0.06$ и 3 – $Pr = 0.08$.

Случай спиральных возмущений. Уравнения спиральных возмущений выводятся из системы (2.2)–(2.4) в предположении, что производные в ней по x от всех функций равны нулю ($k_x = 0$). Имеются три компоненты вектора возмущения скорости, а также возмущения температуры, которые являются функциями времени t и двух пространственных переменных y, z . Полученная начально-краевая задача решается по вычислительной схеме аналогично случаю плоских возмущений.

Расчеты показали, что в отличие от плоских возмущений при малых значениях числа Прандтля возникает опасная монотонная гидродинамическая мода. С ростом Pr волновое число k_y уменьшается (рис. 2а), критическое число Грасгофа уменьшается от 57243.4 до 8182.7 при $0 \leq Pr < 0.14$ (рис. 2б), то есть происходит дестабилизация адвективного течения на данном интервале. При $Pr = 0.14$ $Gr_{кр}$ достигает минимального значения, затем оно монотонно возрастает с ростом числа Прандтля, течение становится более устойчивым. В качестве примера на рис. 2в представлены нейтральные кривые при 1 – $Pr = 0.1$, 2 – $Pr = 0.14$ и 3 – $Pr = 0.2$.

3. Конечно-амплитудные возмущения. Возмущения конечной амплитуды в надкритической области исследуются на основе нелинейной системы уравнений (2.2)–(2.4).

Случай плоских возмущений. Для плоских периодических по x возмущений система имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + Gr \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} + u_0(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_0''(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \Delta \phi - \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\Delta \psi + \phi = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Gr \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} + u_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} + Ra \theta_0'(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \frac{1}{Pr} \Delta \theta$$

$$z = -1: \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{3.2}$$

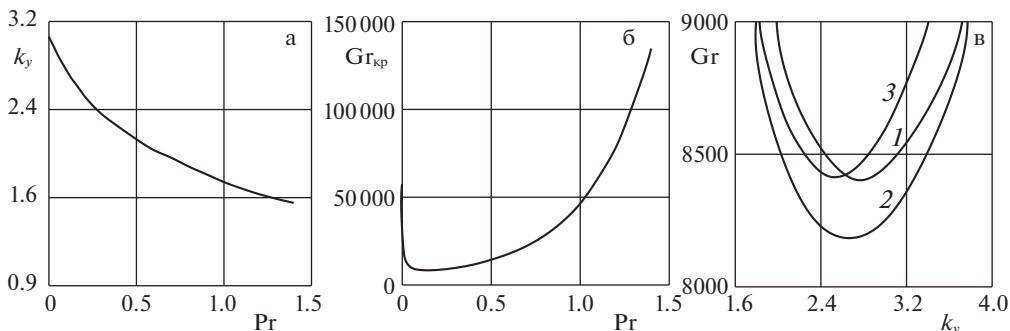


Рис. 2.

$$z = 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad (3.3)$$

$$\psi(t, 0, z) = \psi(t, L, z), \quad \varphi(t, 0, z) = \varphi(t, L, z), \quad \theta(t, 0, z) = \theta(t, L, z), \quad (3.4)$$

где L – длина волны возмущений, оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$, $\psi(t, x, z)$, $\varphi(t, x, z)$, $\theta(t, x, z)$ – конечно-амплитудные возмущения функции тока ($U = -\partial\psi/\partial z$, $W = \partial\varphi/\partial x$), вихря скорости ($\varphi = \partial U/\partial z - \partial W/\partial x = -\Delta\psi$) и температуры.

Нелинейная задача (3.1)–(3.4) решалась численно методом сеток [31]. В рамках двухполевого метода [33] использовалась явная конечно-разностная схема. Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Основные расчеты проводились на сетке 101×200 , они подтвердили критические значения числа Грасгофа, найденные в линейной теории. Было выявлено два типа конечно-амплитудных возмущений. При малых значениях числа Прандтля в диапазоне $0 \leq \text{Pr} < 0.033$ вдоль слоя образуется пара чередующихся теплых и холодных пятен. На рис. 3а представлены изотермы возмущения температуры при $\text{Pr} = 0.02$, для $\text{Gr} = 600$ выше критического, $k_x = 1.33$. В силу теплоизоляции нижней границы слоя жидкости тепловые пятна имеют форму близкую к полуокружности. Соответственно возникает цепочка вихрей, попарно вращающихся по часовой и против часовой стрелки (рис. 3б). Центры вихрей расположены в середине слоя вблизи центров теплого и холодного пятна. Несмотря на наличие линейного распределения температуры на верхней границе, при $\text{Pr} = 0.02$ структура конечно-амплитудных возмущений скорости для плоских возмущений практически совпала с результатами работы [22], где обе горизонтальные границы слоя жидкости теплоизолированы. Это свидетельствует о преобладающем влиянии температурной стратификации в центре слоя жидкости на конечно-амплитудные возмущения скорости и слабом влиянии изменения граничных условий (3.3).

При значениях $\text{Pr} \geq 0.033$ имеется пара теплых и холодных пятен эллиптической формы, движущихся вдоль слоя, например, как на рис. 4а при $\text{Pr} = 0.08$, для $\text{Gr} = 2000$ выше критического и $k_x = 1.19$. Формируется четверка вихрей, попарно локализованных вблизи верхней и нижней границы, движущихся в том же направлении вдоль слоя, что и конечно-амплитудные возмущения температуры (рис. 4б).

Случай спиральных возмущений. Для пространственных периодических по y возмущений система принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = \Delta \Phi - \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

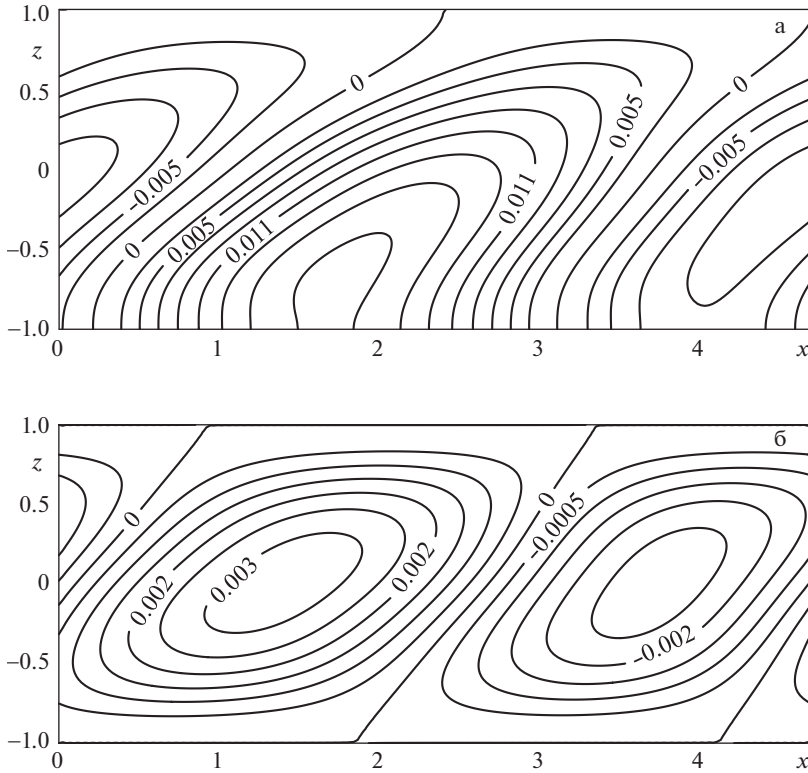


Рис. 3.

$$\Delta\Psi + \Phi = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + u_0'(z) \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right] = \Delta U \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} + U + \text{Ra} \theta_0'(z) \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta\theta$$

$$z = -1: \Psi = 0, \quad U = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

$$z = 1: \Psi = 0, \quad U = 0, \quad \theta = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi(t, 0, z) &= \Psi(t, L, z), & \Phi(t, 0, z) &= \Phi(t, L, z) \\ U(t, 0, z) &= U(t, L, z), & \theta(t, 0, z) &= \theta(t, L, z), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Имеются все три компоненты возмущений скорости, которые зависят от времени t и двух пространственных координат y и z . $\Psi(t, y, z)$ – конечно-амплитудные возмущения функции тока ($V = -\partial\Psi/\partial z$, $W = \partial\Psi/\partial y$), описывающие проекцию возмущений скорости на плоскость yOz , $U(t, y, z)$ – конечно-амплитудные возмущения первой компоненты скорости, описывающие проекцию возмущений скорости на плоскость xOz или xOy , $\Phi(t, y, z)$, $\theta(t, y, z)$ – конечно-амплитуд-

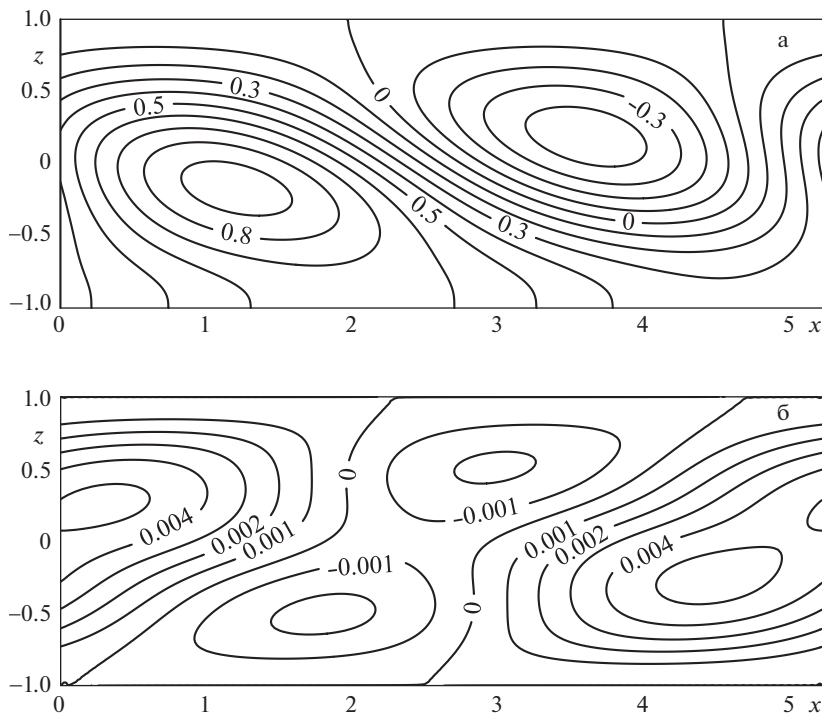


Рис. 4.

ные возмущения вихря скорости ($\Phi = \partial V/\partial z - \partial W/\partial y = -\Delta\Psi$) и температуры. Этот подход использовался ранее во многих работах, например [12, 30].

Нелинейная задача (3.5)–(3.8) решалась численно методом сеток [31]. Основные расчеты проводились на сетке 101×200 . Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях числа Прандтля в областях с неустойчивой температурной стратификацией возникает система безотечных винтообразных вихрей.

На рис. 5 представлены изотермы конечно-амплитудных возмущений температуры $\theta(t, y, z)$, изолинии возмущений функции тока $\Psi(t, y, z)$ и компоненты скорости $U(t, y, z)$ при $\text{Pr} = 0.14$ для числа Грасгофа $\text{Gr} = 9000$ выше критического, $k_y = 2.66$. В середине вдоль слоя движется пара теплых и холодных пятен (рис. 5а). Проекция движения, описанная функцией возмущения функции тока вблизи порога устойчивости, представляет собой движущуюся вдоль оси Oy цепочку вращающихся в противоположных направлениях вихрей, занимающих весь слой (рис. 5б). Одновременно x -ая компонента возмущения скорости, описывает в центре слоя вращающиеся то против, то по часовой стрелке движущихся вдоль оси Oy вихрей в плоскости xOy . Центры вихрей расположены вблизи центров теплого и холодного пятна. Таким образом, в центре слоя формируется трехмерное вихревое движение, вблизи же верхней и нижней границы слоя имеются цепочки движущихся вдоль оси Oy слабых вихрей, вращающихся в плоскости xOy (рис. 5в).

Заключение. Представлено точное решение уравнений Навье–Стокса, записанное в приближении Обербека–Буссинеска и описывающее адвективное течение несжимаемой жидкости в горизонтальном слое с твердыми границами, условием теплоизоляции на нижней границе и линейным распределением температуры на верхней границе.

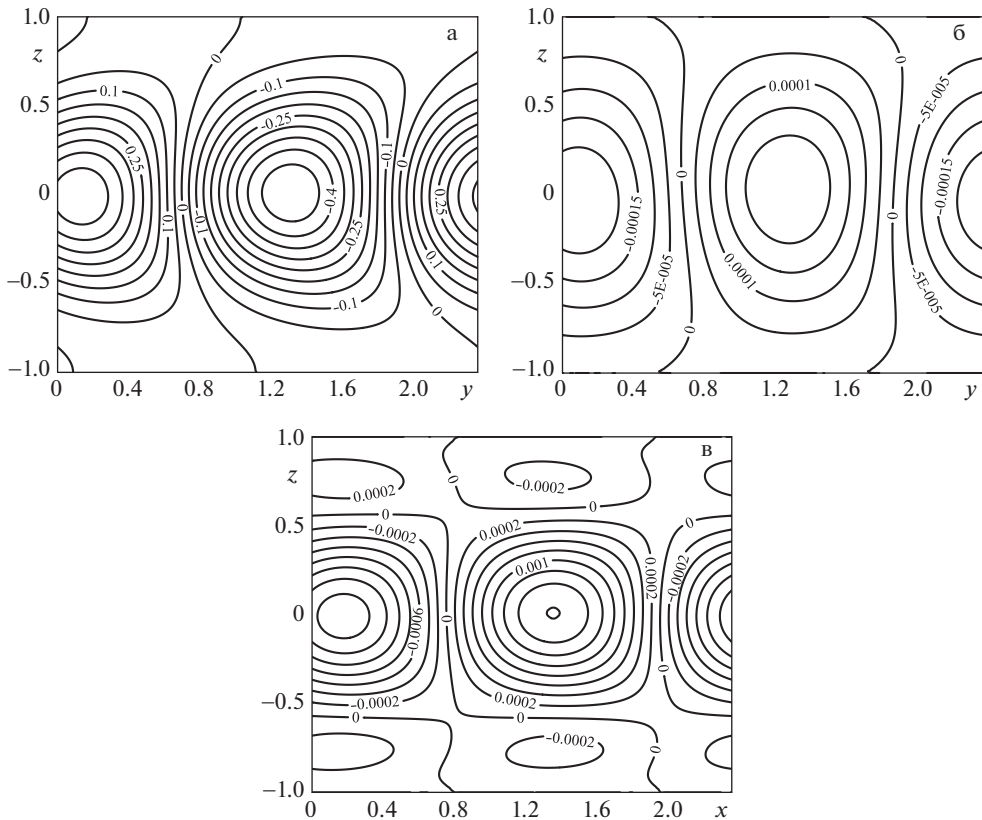


Рис. 5.

В рамках линейной теории устойчивости показано, что на всем рассматриваемом диапазоне числа Прандтля при числах Грасгофа выше критических для плоских возмущений развивается колебательная неустойчивость, а для спиральных возмущений монотонная. С ростом числа Прандтля адвективное течение становится более устойчивым на плоские возмущения. Минимальное критическое число Грасгофа для спиральных возмущений равно 8182.7 достигается при $Pr = 0.14$. Плоские возмущения являются опаснее спиральных возмущений.

Поведение конечно-амплитудных возмущений, возникающих в слое жидкости при значениях числа Грасгофа выше критического, исследовано конечно-разностным методом сеток на основе нелинейной задачи. За порогом устойчивости возникают нестационарные периодические конечно-амплитудные возмущения скорости и температуры в виде системы вихрей и температурных пятен различной конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
2. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехтеориздат, 1952. 286 с.

3. *Андреев В.К.* Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения // Пре-принт № 1–10. Красноярск: СО РАН. ИВМ, 2010.
4. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
5. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-par-allel advective flows in long horizontal layers // Microgravity Q. 1992. V. 2. № 3. P. 141–151.
6. *Андреев В.К., Бекежанова В.Б.* Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. 2013. № 2. С. 3–20.
7. *Шварц К.Г.* Устойчивость термокапиллярного адвективного течения в медленно вращаю-щемся слое жидкости в условиях невесомости // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 44–58.
8. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Адвективное течение во вращающейся жидкой пленке // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 1 (335). С. 216–223.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20160121>
9. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимае-мой жидкости с твердыми границами // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 4. С. 26–30.
10. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимае-мой жидкости с внутренним линейным источником тепла // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 25–30.
11. *Шварц К.Г., Шварц Ю.А.* Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое не-сжимаемой жидкости при наличии условия проскальзывания Навье // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 1. С. 33–44.
12. *Любимов Д.В., Шкляев С.В.* Об устойчивости адвективного термоакустического течения // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 10–21.
13. *Любимова Т.П., Никитин Д.А., Скуридин Р.В.* О влиянии акустической волны на устойчи-вость адвективного течения в плоском слое // Вестн. Пермского ун-та. Сер.: Мат. Мех. Ин-форм. 2011. Вып. 5 (9). С. 143–147.
14. *Иванцов А.О.* Слабонелинейный анализ устойчивости термоакустического адвективного течения // Вестн. Пермского ун-та. Физика. 2019. № 3. С. 28–44.
15. *Slavtchev S., Hennenberg M., Valhev G. et al.* Stability of ferrofluid flows in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient and an oblique magnetic field // Microgr. Sci. Technol. 2008. V. 20. Iss. 1. P. 199–203.
<https://doi.org/10.1007/s12217-008-9027-2>
16. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Конвективный теплообмен при локализованном нагреве плоско-го слоя несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 3. С. 53–58.
17. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* Новый класс точных решений трехмерных уравнений тер-модиффузии // Теорет. основы хим. технол. 2016. Т. 50. № 3. С. 294–301.
18. *Бурмашева Н.В., Ларина Е.А., Просвиряков Е.Ю.* Течение типа Куэтта с учетом идеального скольжения на контакте с твердой поверхностью // Вестн. Томского гос. ун-та. Мат. и мех. 2021. № 74. С. 79–94.
19. *Демин В.А.* Конвективные сепараторы // Прикл. физ. 2013. № 4. С. 60–67.
20. *Hart J.* A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 271–281.
21. *Laure P.* Etude des mouvements de convection dans une cavite rectangulaire soumise a un gradient de temperature horizontal // J. Mec. Theor. 1987. V. 6. P. 351–382.
22. *Kuo H.P., Korpela S.A.* Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side // Phys. Fluids. 1988. V. 31 (1). P. 33–42.
23. *Wang P., Daniels P.G.* Numerical solutions for the flow near the end of a shallow laterally heated cavity // J. Engng. Math. 1994. V. 28. P. 211–226.
24. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Никитин Д.А. и др.* Устойчивость адвективного течения би-нарной смеси в плоском горизонтальном слое с идеально теплопроводными границами // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 129–139.

25. Lybimova T.P., Lybimov D.V., Morozov V.A. et al. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Pt. 1. Effect of aspect ratio and Prandtl number // J. Fluid Mech. 2009. V. 635. P. 275–295.
26. Любимова Т.П., Никитин Д.А. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном канале прямоугольного сечения с адиабатическими границами // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 82–91.
27. Mizev A., Mosheva E., Kostarev K. et al. Stability of solutal advective flow in a horizontal shallow layer // Phys. Rev. Fluids. 2017. V. 2. № 10. 103903.
28. Demin V.A., Kostarev K.G., Mizev A.I. et al. On convective instability of the counter propagating fluxes of inter-soluble liquids // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2014. V. 10. № 2. P. 195–208.
29. Шварц К.Г. Устойчивость адвективного течения во вращающемся горизонтальном теплоизолированном снизу слое несжимаемой жидкости с твердыми границами при малом числе Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 2. С. 38–50.
30. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Перм. ун-т, 2006. 155 с.
31. Тарунин Е.Л., Шварц К.Г. Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // Выч. технол. 2001. Т. 6. № 6. С. 108–117.
32. Шварц К.Г. Конечно-амплитудные пространственные возмущения адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // Выч. технол. 2001. Т. 6. Спец. вып. Ч. 2. Тр. Межд. конф. RDAMM-2001. С. 702–707.
33. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.

Stability of Advective Flow in a Horizontal Fluid Layer Insulated from below with Solid Boundaries

K. G. Shvarts^{a,#} and Yu. A. Shvarts^{a,##}

^aPerm State University, Perm, Russia

[#]e-mail: kosch@psu.ru

^{##}e-mail: jul-schwarz@psu.ru

The stability of advective flow in a flat horizontal layer of incompressible fluid with solid boundaries is investigated. The linear temperature distribution is specified on the upper boundary of the layer and the lower boundary is heat-insulated. The plane-parallel flow, which has arisen under the action of horizontal convection, is described analytically in the form of an exact solution of the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation. Within the framework of the linear theory, the stability of advective flow with respect to small normal perturbations is investigated for different values of Prandtl number. The most dangerous modes are determined and neutral curves are constructed. In the framework of nonlinear formulation of the problem, the structure of finite-amplitude perturbations in the supercritical region near the minima of neutral curves is studied.

Keywords: horizontal convection, advective flows, exact solution, normal perturbations, stability, finite-amplitude perturbations

REFERENCES

1. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., Nepomnyashchii A.A. Stability of Convective Flows. Moscow: Nauka, 1989.
2. Ostroumov G.A. Free Convection under the Conditions of the Internal Problem. NASA TM, 1958.
3. Andreev V.K. Birikh solutions of the convection equations and its certain generalizations // Prepr. no. 1–10, Krasnoyarsk: Inst. Numerical Mathematics SB RAS, 2010.

4. *Birikh R.V.* Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44.
5. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // *Microgr. Q.*, 1992, vol. 2, no. 3, pp. 141–151.
6. *Andreev V.K., Bekezhanova V.B.* Stability of non-isothermal fluids (Review) // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2013, no. 2, pp. 171–184.
7. *Schwarz K.G.* Stability of thermocapillary advective flow in a slowly rotating liquid layer under microgravity conditions // *Fluid Dyn.*, 2012, vol. 47, no. 1, pp. 37–49.
8. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* Advective flow in a rotating liquid film // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 188–194. <https://doi.org/10.1134/S0021894416010211>
9. *Schwarz K.G.* Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 438–442. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040036>
10. *Shvarts K.G.* Plane-parallel advective flow in a horizontal layer of an incompressible fluid with an internal linear heat source // *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, suppl. 1, pp. S24–S28. <https://doi.org/10.1134/S0015462818040237>
11. *Schwarz K.G., Schwarz Yu.A.* Stability of advective flow in a horizontal incompressible fluid layer in the presence of the navier slip condition // *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 1, pp. 31–42.
12. *Lyubimov D.V., Shklyayev S.N.* Thermal convection in an acoustic field // *Fluid Dyn.*, 2000, vol. 35, no. 3, pp. 321–330.
13. *Lyubimova T.P., Nikitin D.A., Skuridin R.V.* About the influence of acoustic wave on the stability of advective flow in the plane layer // *Vestn. Permskogo Univ. Mat. Mech. Inform.*, 2011, iss. 5 (9), pp. 143–147.
14. *Ivantsov A.O.* Weakly non-linear analysis of thermoacoustic advective flow // *Vestn. Permskogo Univ. Phys.*, 2019, no. 3, pp. 28–44.
15. *Slavtchev S., Hennenberg M., Valhev G. et al.* Stability of ferrofluid flows in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient and an oblique magnetic field // *Microgr. Sci. Technol.*, 2008, vol. 20, iss. 1, pp. 199–203. <https://doi.org/10.1007/s12217-008-9027-2>
16. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer // *Fluid Dyn.*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 330–335.
17. *Aristov S.N., Prosviryakov E.Y.* A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293.
18. *Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu.* A Couette-type flow with a perfect slip condition on a solid surface // *Tomsk State Univ. J. Math. & Mech.*, 2021, no. 74, pp. 79–94. <https://doi.org/10.17223/19988621/74/9>
19. *Demin V.A.* Convective separators // *Prikl. Phys.*, 2013, no. 4, pp. 60–67. <https://appphys.orion-ir.ru/appl-13/13-4/PF-13-4-60.pdf>
20. *Hart J.* A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations // *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 132, pp. 271–281.
21. *Laure P.* Etude des mouvements de convection dans une cavite rectangulaire soumise a un gradient de temperature horizontal // *J. Mec. Theor.*, 1987, vol. 6, pp. 351–382.
22. *Kuo H.P., Korpela S.A.* Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side // *Phys. Fluids*, 1988, vol. 31 (1), pp. 33–42.
23. *Wang P., Daniels P.G.* Numerical solutions for the flow near the end of a shallow laterally heated cavity // *J. Engng. Math.*, 1994, vol. 28, pp. 211–226.
24. *Lubimov D.V., Lyubimova T.P., Nikitin D.A., Perminov A.V.* Stability of a binary-mixture advective flow in a plane horizontal layer with perfectly heat conducting boundaries // *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 458–467.
25. *Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Morozov V.A. et al.* Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 1. Effect of aspect ratio and Prandtl number // *J. Fluid Mech.*, 2009, vol. 635, pp. 275–295.

26. *Lyubimova T.P., Nikitin D.A.* Stability of the advective flow in a horizontal rectangular channel with adiabatic boundaries // *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 240–249.
27. *Mizev A., Mosheva E., Kostarev K. et al.* Stability of solutal advective flow in a horizontal shallow layer // *Phys. Rev. Fluids*, 2017, vol. 2, no. 10, pp. 103903.
28. *Demin V.A., Kostarev K.G., Mizev A.I. et al.* On convective instability of the counter propagating fluxes of inter-soluble liquids // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10. no. 2, pp. 195–208.
29. *Schwarz K.G.* Stability of advective flow in a rotating horizontal incompressible fluid layer heat-insulated from below with rigid boundaries at low Prandtl number // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 146–157.
30. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* Vortex Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer. Perm: Perm Univ., 2006.
31. *Tarunin E.L., Shvarts K.G.* Investigation of the linear stability of advective flow by the grid method // *Vychisl. Tekhnol.*, 2001, vol. 6, no. 6, pp. 108–117.
32. *Shvarts K.G.* Finite-amplitude spatial perturbations of advective flow in the rotating horizontal fluid layer // *Vychisl. Tekhnol.*, 2001, vol. 6, Special iss., pt. 2, Proc. Int. Conf. RDAMM-2001, pp. 702–707.
33. *Tarunin E.L.* Computational Experiment in Problems of Free Convection. Irkutsk: Irkutsk Univ., 1990.