ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 6, с. 917–925

УДК 533.6.011

О ЗНАЧЕНИИ Q-ПАРАМЕТРА В ТОЧКЕ МИНИМУМА ДАВЛЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ НЕБАРОТРОПНОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2022 г. Г. Б. Сизых[1,*]

[1]*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*
**e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.02.2022 г.
После доработки 02.08.2022 г.
Принята к публикации 10.08.2022 г.

Рассматривается симметричное относительно некоторой плоскости небаротропное вихревое течение идеального газа. С использованием уравнений Эйлера для стационарных течений установлено, что если давление достигает строгого или нестрогого локального минимума во внутренней точке течения, расположенной на плоскости симметрии, и в этой точке течение дозвуковое, а скорость отлична от нуля, то значение Q-параметра в этой точке должно быть равно нулю. Также установлено, что если в рассматриваемой точке достигается локальный минимум или максимум давления не по пространству, а только по плоскости симметрии, то значение Q-параметра должно быть неположительным. Последнее утверждение оказывается верным как для дозвуковых, так и для звуковых и сверхзвуковых точек. Результаты могут быть использованы для верификации численных расчетов течения идеального газа за отошедшим скачком уплотнения при сверхзвуковом обтекании симметричных тел, а также для проверки численных расчетов обтекания симметричных тел вязким газом в областях, удаленных от источников завихренности, где влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь.

Ключевые слова: верификация расчетов, экстремальные свойства давления, уравнения Эйлера, вихревые течения газа, небаротропные течения, течение за отошедшим скачком уплотнения

DOI: 10.31857/S0032823522060145

Есть два направления в аэрогидродинамике, в которых второй скалярный инвариант тензора скоростей деформаций (Q-параметр) играет важную роль. Первое направление – визуализация результатов расчетов с использованием изображения поверхностей уровня Q-параметра. История этой традиции начинается с работы Труделла [1], в которой он привел ряд примеров, показывающих, что величина $\mathscr{W}_K = (1 - 4Q/\mathbf{\Omega}^2)^{-1/2}$, где $\mathbf{\Omega}$ – завихренность, лучше, чем $|\mathbf{\Omega}|$, отражает интуитивное представление физиков о том, насколько сложней завихренное течение по сравнению с движением жидкости как твердого тела или по сравнению со сдвиговым течением. При этом в своих примерах Труселл в основном рассматривал случаи $\mathscr{W}_K \leq 1$, $\mathscr{W}_K = 1$ и $\mathscr{W}_K \geq 1$, что равносильно рассмотрению случаев $Q \leq 0$, $Q = 0$ и $Q \geq 0$ соответственно. В результате Труселл предложил считать $\mathscr{W}_K$ "второй мерой завихренности". В теоретической аэрогидродинамике это предложение до сих пор не принято. Но в теории турбуленции была потребность дать строгое определение очень сложным областям турбулентных течений, которые называются "когерентными вихревыми структурами" ("вращающимися вихревыми воронками”, “eddy-зонами” или “E-зонами”). Исследователи определяли такие области интуитивно через поле скорости и завихренности. Во многих работах предлагались и обосновывались различные критерии, выводы которых в той или иной степени совпадали с интуитивными представлениями исследователей. Одним из главных “кандидатов” для формального определения E-зоны был Q-критерий (Q-criteria), согласно которому E-зоны — это области, где Q-параметр превышает некоторое неотрицательное пороговое значение. Так, например, в [2] предлагались Q-критерий и критерий минимума давления. Хотя строгое понятие E-зоны до сих пор отсутствует, в статье [3] Q-критерий был признан наиболее подходящим для обнаружения E-зон. С тех пор до настоящего времени используют Q-критерий и изображение поверхностей уровня параметра Q как один из способов визуализации E-зон. Например, в [4] Q-критерий использовался для анализа экспериментальных данных в вихревой горелке, в [5] — для представления процесса формирования области турбулентного течения при обтекании острой пластины, в [6] — для валидации пакета программ путем сравнения численного решения задачи об инжекции струи водорода в струю воздуха с данными натурного эксперимента. Популярность такого способа визуализации привела к тому, что в интерфейсы многих программных комплексов и пакетов программ (в частности, ANSYS) была заложена возможность представления поверхностей уровня Q-параметра по результатам расчетов. Наряду с этим в настоящее время все еще продолжается поиск (например, [7]) других критериев для обнаружения E-зон, которые, как показано в [8], совместно с Q-критерием могут давать результаты, более точно совпадающие с экспериментальными данными о следах, оставленными смерчами на песке.

В настоящей статье исследование свойств Q-параметра не связано с проблемой визуализации “когерентных вихревых структур”, а продолжает исследования Роуланда [9], Гамеля [10], Трусделла [1], Никольского [11] и автора настоящей статьи (например, [12, 13]) о принципах максимума давления (далее — ПМД). Эти ПМД предназначены не для визуализации расчета, а для его дополнительной верификации путем проверки выполнения этих принципов. Кратко историю этого второго направления аэрогидродинамики, в котором Q-параметр играет важную роль, можно представить следующим образом.

Роуланд [9] и Гамель [10] показали, что в течениях идеальной и вязкой несжимаемых жидкостей в области, где давление не постоянно, а параметр $Q \leq 0$, минимум давления не может достигаться во внутренней точке области (аналогично — для максимума при $Q \geq 0$). Позже появился ПМД для сжимаемых баротропных течений (в которых плотность можно представить функцией одного только давления), предложенный Трусделлом [1]. В условия этого баротропного принципа максимума также входит знак Q-параметра, но, кроме того, и знак некоторого выражения, зависящего от вторых производных компонент скорости, что делает этот принцип труднообозримым и непригодным для проверки численных расчетов, полученных методами первого порядка. Кроме того, ПМД Трусделла оставляет в стороне небаротропные течения.

Интерес к небаротропным течениям объясняется, как минимум, двумя практическими причинами. Во-первых, небаротропные течения формируются за отошедшим скачком уплотнения, который возникает при обтекании однородным сверхзвуковым потоком тел с гладкой выпуклой головной частью или с большим углом наклона в передней угловой точке, превышающем предельный угол, до которого возможен присоединенный скачок. Во-вторых, в некоторых областях, удаленных от источников завихренности, течение вязкого газа с высокой точностью описывается моделью небаротропного идеального газа.

Единственным давно известным принципом максимума давления для небаротропных течений был ПМД Никольского [11], в условия которого не входят значения Q-параметра: *в области плоского* (*возможно*, *небаротропного*) *дозвукового стационарно-*

го течения, в которой отсутствуют точки торможения, давление и угол наклона скорости, если они не постоянны в этой области, не могут достигать экстремальных значений во внутренней точке области. Примерно через 70 лет в [12] был получен ПМД для незакрученных осесимметричных течений: *в области незакрученного осесимметричного (возможно, небаротропного) дозвукового стационарного течения, в которой отсутствуют точки торможения, давление, если оно не постоянно в этой области, не может достигать минимального значения во внутренней точке области.* (В отличие от ПМД Никольского, отсутствует упоминание о максимуме давления.)

Недавно в [13] был получен дозвуковой принцип максимума давления для небаротропных течений идеального газа *в общем пространственном случае.* Было показано, что в дозвуковой области (возможно, небаротропного) течения оказывается верен принцип максимума [9, 10] для несжимаемой жидкости (невозможность достижения минимума и максимума в зависимости от знака и только от знака Q-параметра). Из этого следуют необходимые условия: во внутренней точке минимума Q-параметр должен быть неотрицательным, во внутренней точке максимума Q-параметр должен быть неположительным. Для проверки расчетов течений за отошедшим скачком уплотнения, насколько известно автору настоящей статьи, этот новый принцип максимума еще не использовался. При этом в [13] было предложено использовать проверку выполнения нового принципа для дополнительной верификации численных расчетов течений вязкого газа в областях, удаленных от источников завихренности (где применима модель небаротропного идеального газа). Разумеется, что выполнение принципа максимума еще не означает правильности решения, но его нарушение позволяет “отфильтровать” неправильное решение, как неверное. Этот подход показал свою эффективность, например, при расчете возмущений, вносимых крупным зданием (в форме параллелепипеда), расположенным вблизи взлетной полосы аэродрома, в боковой ветер [14], и при вычислении ветровой нагрузки на колесо обозрения [15]. В этих двух работах расчеты подвергались дополнительной верификации путем проверки выполнения ПМД [13]. В результате этого, в [14, 15] приходилось модифицировать и сгущать расчетную сетку в некоторых областях течения из-за нарушения принципа максимума на других сетках и на сетках с более крупными ячейками.

В настоящей статье рассматривается практически важный класс стационарных небаротропных течений с плоскостью симметрии. Течения с плоскостью симметрии возникают, когда скорость невозмущенного набегающего потока лежит в плоскости симметрии обтекаемого тела. Оказывается, что для точек минимума давления, расположенных на плоскости симметрии, можно получить утверждение относительно значений Q-параметра, верное и для сверхзвуковых течений, а для дозвуковых течений можно предложить более жесткий “фильтр”, чем проверка принципа максимума [13]. Этому посвящена настоящая статья.

Ниже будут рассмотрены два типа экстремумов (минимумов или максимумов) давления. В обоих типах рассматриваются только точки экстремума давления, лежащие на плоскости симметрии (в некоторых течениях такие точки экстремума могут отсутствовать). В первом типе в точке достигается строгий или нестрогий экстремум в некоторой ее пространственной окрестности. Такой экстремум будет называться экстремумом по пространству, а когда в точке достигается строгий или нестрогий экстремум в некоторой ее (двумерной) окрестности на плоскости симметрии — экстремумом по плоскости симметрии. Такой экстремум может не быть экстремумом по пространству.

1. Основные обозначения и уравнения движения. Ниже, следуя [16], газ, в котором отсутствуют вязкость и теплопроводность будем называть идеальным, а газ, в котором выполняется уравнение Менделеева—Клапейрона — совершенным. Стационарное течение идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями c_p и c_v описывается следующей системой уравнений [16]:

$$\operatorname{div}(\rho V) = 0 \tag{1.1}$$

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} = -(\nabla p)/\rho \tag{1.2}$$

$$\mathbf{V}\cdot\nabla(p\rho^{-k}) = 0, \tag{1.3}$$

где ρ — плотность, p — давление, $\mathbf{V}$ — скорость, $V = |\mathbf{V}|$, $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{V}$ — завихренность, $k = c_p/c_v > 1$.

Будем рассматривать пространственные течения с плоскостью симметрии. В таких течениях могут быть дозвуковые и сверхзвуковые зоны. Также возможно наличие точек торможения (например, передняя точка торможения на обтекаемом теле). Допустим, что на плоскости симметрии есть точка A, в которой давление достигает (строгого или нестрогого) локального минимума по пространству, и в некоторой пространственной окрестности G точки A течение дозвуковое и отсутствуют точки торможения:

$$0 < M = V\Big/\sqrt{kp/\rho} < 1 \tag{1.4}$$

Расположим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью симметрии течения, а положительное направление оси x совпало с направлением скорости газа в точке A (при этом начало координат на плоскости симметрии можно выбрать произвольно). Предположим, что компоненты скорости, плотность и давление имеют в G непрерывные вторые производные. Как обычно, обозначим $Q = 0.5[\Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2]$, где u, v, w — компоненты вектора скорости.

Сформулированные выше требования подразумевают, что точка A расположена внутри течения (в частности, не на поверхности обтекаемого тела) и не может быть расположена на скачке уплотнения или на тангенциальном разрыве.

Предположим, что $Q(A) < 0$. Тогда в силу непрерывности это строгое неравенство сохранится в некоторой области $D \subset G$, содержащей точку A. Однако, как показано в [13], при принятых выше уравнениях движения и при предположении (1.4) в такой (трехмерной) области, в которой всюду $Q < 0$, отсутствуют внутренние точки минимума давления (имеется в виду минимум по пространству). То есть неравенство $Q(A) < 0$ невозможно. Поэтому

$$Q(A) \geq 0 \tag{1.5}$$

2. Значение Q-параметра в точке A. Обозначим $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$ — единичный вектор, касательный к линиям тока. Как замечено в [17], поскольку $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = V(\mathbf{e}\cdot\nabla)(V\mathbf{e}) = \mathbf{e}V(\mathbf{e}\cdot\nabla)V + V^2(\mathbf{e}\cdot\nabla)\mathbf{e}$, уравнение Эйлера (1.2) можно записать в виде: $\mathbf{e}V(\mathbf{e}\cdot\nabla)V + V^2(\mathbf{e}\cdot\nabla)\mathbf{e} = -(\nabla p)/\rho$. В точке минимума давления $\nabla p = 0$ и в точке A последнее уравнение упрощается:

$$\mathbf{e}V(\mathbf{e}\cdot\nabla)V + V^2(\mathbf{e}\cdot\nabla)\mathbf{e} = 0 \tag{2.1}$$

Из известного векторного тождества $\nabla\mathbf{a}^2 = 2(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}$ следует, что $(\mathbf{e}\cdot\nabla)\mathbf{e} = -\mathbf{e}\times\operatorname{rot}\mathbf{e}$. Поэтому (2.1) равносильно

$$\mathbf{e}V(\mathbf{e}\cdot\nabla)V = V^2\mathbf{e}\times\operatorname{rot}\mathbf{e} \quad \text{(в точке } A) \tag{2.2}$$

Левая и правая части (2.2) ортогональны друг другу, и, следовательно, они обе равны нулю. Учитывая, что $V \neq 0$, имеем

$$(\mathbf{e}\cdot\nabla)V = 0, \quad \mathbf{e}\times\operatorname{rot}\mathbf{e} = 0 \quad \text{(в точке } A) \tag{2.3}$$

В общем пространственном случае из второго равенства не следует, что $\operatorname{rot}\mathbf{e} = 0$. Однако на плоскости симметрии течения (где расположена точка A) векторы $\mathbf{e}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{e}$

ортогональны. Поэтому из (2.3) следует, что в точке A $\operatorname{rot}\mathbf{e} = 0$. Воспользуемся этим при вычислении завихренности в точке A:

$$\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} V\mathbf{e} = V \operatorname{rot}\mathbf{e} - \mathbf{e}\times\nabla V = -\mathbf{e}\times\nabla V$$

Первое уравнение (2.3) можно записать как равенство нулю скалярного произведения $\mathbf{e}\cdot\nabla V = 0$. Это значит, что векторы $\mathbf{e}$ и ∇V ортогональны, из чего в свою очередь следует, что $|\mathbf{\Omega}| = |\mathbf{e}\times\nabla V| = |\mathbf{e}|\cdot|\nabla V| = |\nabla V| = \left|\nabla\sqrt{u^2+v^2+u^2}\right|$. Чтобы найти квадрат завихренности вычислим компоненты вектора $\nabla\sqrt{u^2+v^2+u^2}$. Система координат выбрана так, что в точке A $u = V > 0$, $v = 0$, $w = 0$. Поэтому $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u^2+v^2+w^2} =$ $= \dfrac{u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial x}v + w\frac{\partial}{\partial x}w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \dfrac{\partial}{\partial x}u$. Аналогично $\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{u^2+v^2+w^2} = \frac{\partial}{\partial y}u$ и $\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{u^2+v^2+w^2} =$ $= \frac{\partial}{\partial z}u$. Поэтому $\mathbf{\Omega}^2 = \left(\nabla\sqrt{u^2+v^2+w^2}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}u\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}u\right)^2 = (\nabla u)^2$. Подставляя это выражение для $\mathbf{\Omega}^2$ в формулу для Q-параметра, получаем

$$\begin{aligned} Q(A) &= 0.5\left((\nabla u)^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2\right) = \\ &= 0.5\left(-(\nabla v)^2 - (\nabla w)^2\right) \le 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

В итоге, с учетом (1.5), которое верно в силу (1.4), приходим к первому основному результату: $Q(A) = 0$. *То есть если во внутренней точке стационарного дозвукового течения, скорость в которой отлична от нуля и которая расположена на плоскости симметрии течения, достигается локальный минимум давления по пространству, то значение Q-параметра в этой точке равно нулю.*

В приведенном доказательстве размер пространственной окрестности G, в которой скорость должна отличаться от нуля и быть дозвуковой (условие (1.4)), не имеет значения и может быть сколь угодно мал. Поэтому достаточно потребовать выполнения (1.4) в самой точке A, и тогда в силу непрерывности (для внутренней точки течения) найдется окрестность G, в которой условие также будет выполнено. Другими словами, при верификации расчетов существование окрестности G можно не проверять, если только условия (1.4) выполнены в точке A. Если же точка A лежит на разрыве, то условия гладкости, сформулированные в первом разделе будут нарушены в любой окрестности этой точки и полученное выше равенство $Q(A) = 0$ будет не обосновано (как и неравенство (1.5)).

3. Случай экстремума по плоскости симметрии. Возможна ситуация, при которой точка A не является точкой экстремума (т.е. не является точкой минимума или максимума) давления в своей малой пространственной окрестности. Но при этом является точкой строгого или нестрогого экстремума в некоторой плоской окрестности, лежащей на плоскости симметрии (экстремум по плоскости симметрии). В этом случае неравенство (1.5) использовать нельзя. Однако поскольку на плоскости симметрии поперечная производная давления всегда равна нулю, в точке экстремума по плоскости верно равенство $\nabla p = 0$, на котором основано доказательство второго раздела. Кроме того, при выводе формулы (2.4) использовалось не двойное неравенство (1.4), а только его левая часть ($0 < \mathrm{M}$) (правая часть использовалась после получения формулы (2.4) для обоснования неравенства (1.5)). Поэтому доказательство неравенства (2.4) можно повторить, и оно остается в силе и для звуковых, и для сверхзвуковых точек. В результате имеем второй основной результат. *Независимо от того, является ли точка A*

(*внутренняя точка течения, скорость в которой отлична от нуля*), *лежащая на плоскости симметрии стационарного течения, точкой локального экстремума давления по пространству, если только она есть точка локального экстремума давления по плоскости симметрии, то* $Q(A) \le 0$.

4. Применение для верификации расчетов. При использовании полученных результатов для проверки расчетов течений, которые описываются системой (1.1)–(1.3), предлагается придерживаться следующей последовательности действий. Сначала следует найти точку минимума или максимума давления (если она есть) по плоскости симметрии, т.е. такую лежащую на плоскости симметрии точку A, в плоской окрестности которой (также лежащей на плоскости симметрии) $p \ge p(A)$ или $p \le p(A)$. В такой точке должно быть $Q(A) \le 0$ (нарушение этого неравенства будет означать ошибочность расчета). Если, более того, точка A окажется точкой локального минимума давления по пространству (т.е. если неравенство $p \ge p(A)$ выполняется в некоторой трехмерной окрестности точки A), и в ней верно двойное неравенство (1.4), то должно выполняться более сильное условие $Q(A) = 0$. Однако при выполнении этой последовательности действий следует учитывать некоторые моменты.

Во-первых, точка A должна быть внутренней точкой течения. В частности, должны быть исключены из рассмотрения точки экстремума давления, лежащие на поверхности обтекаемого тела.

Во-вторых, скорость в точке A должна быть отлична от нуля (она может быть дозвуковой, звуковой или сверхзвуковой), а сама точка должна лежать в области гладких параметров течения (в частности, должны быть исключены из рассмотрения точки, лежащие на скачке и на тангенциальном разрыве).

Только при выполнении этих условий можно утверждать, что в верном расчете в точке экстремума давления по плоскости симметрии должно выполняться неравенство $Q(A) \le 0$. (Если же, кроме того, точка A есть точка минимума давления по пространству, и скорость в ней дозвуковая, то должно быть $Q(A) = 0$.)

5. Обсуждение. Как следует из ПМД [11, 12], в плоскопараллельном и в незакрученном осесимметричном течениях минимум давления не может достигаться в точке, скорость в которой отлична от нуля. Условие отличия от нуля скорости в точке минимума в этих принципах максимума неустранимо, поскольку есть пример точного решения для идеальной жидкости (сферический вихрь Хилла), свойства такой жидкости при малых значениях числа Маха качественно идентичны свойствам идеального газа. В этом примере есть внутренняя точка торможения, в которой давление минимально (подробнее см. [12]). Плоскопараллельные и незакрученные осесимметричные течения – суть простейшие примеры рассматриваемых в настоящей статье течений с плоскостью симметрии. В этих примерах экстремум по пространству и экстремум по плоскости симметрии эквивалентны. Поэтому при обнаружении в численных расчетах таких течений минимума в точке, скорость в которой отлична от нуля, можно сразу говорить об ошибочности решения (не применяя полученных в настоящей статье утверждений). Если же в расчете незакрученного осесимметричного течения обнаруживается максимум в точке, скорость в которой отлична от нуля, то следует проверить полученное выше условие $Q(A) \le 0$. В [12] точки максимума давления не рассматривались, поэтому полученный выше результат усиливает ПМД [12] (для незакрученных осесимметричных течений).

В отличие от ПМД [11, 12] (где рассматривались только точки максимума давления), в настоящей статье, как и в [13], не исключаются из рассмотрения точки минимума давления по пространству, скорость в которых отлична от нуля. Если в общем пространственном случае примером может служить закрученное осесимметричное течение с постоянной осевой скоростью (на оси достигается нестрогий минимум давления), то автору настоящей статьи не удалось найти аналогичный пример для минимума давления на плоскости симметрии. Поэтому вопрос остается открытым. Нужно или найти новый ПМД, который исключает достижение минимума давления в такой точке, расположенной на плоскости симметрии, в которой $V \neq 0$, или привести пример течения, в котором минимум давления достигается в такой точке. Это представляет собой отдельную содержательную задачу, выходящую за рамки настоящей статьи. Если будет найден упомянутый ПМД, то наличие в численном решении минимума по пространству на плоскости симметрии в точке A, в которой $V \neq 0$, сразу будет означать ошибочность решения, независимо от значения $Q(A)$. А пока такой ПМД не найден, нельзя исключать возможность достижения минимума давления на плоскости симметрии в точке, в которой $V \neq 0$, и поэтому обнаружение такой точки в численном решении будет означать ошибочность расчета только при нарушении полученного в настоящей статье условия $Q(A) = 0$.

Что касается условий расположения точек экстремума давления на скачках и поверхностях тел, то эти вопросы также представляют собой сложные задачи, выходящие за рамки статьи. Однако можно указать несколько свойств для точек экстремума, лежащих на поверхности обтекаемого тела. А именно. Если точка A экстремума давления лежит на гладком участке поверхности тела, то условие экстремума для внутренних точек $(\nabla p = 0)$ заменяется на два условия: производная давления по касательному к поверхности направлению в этой точке должна быть равна нулю, а нормальная к поверхности производная должна быть неотрицательна в случае минимума и неположительна в случае максимума. Если в этой точке $V \neq 0$, то в силу условия непротекания вектор $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$ направлен по касательной к поверхности. Поэтому из уравнения $\mathbf{e}V(\mathbf{e}\cdot\nabla)V + V^2(\mathbf{e}\cdot\nabla)\mathbf{e} = -(\nabla p)/\rho$ (оно получено в начале второго раздела) следует, что в точке экстремума производная модуля скорости V по касательному к поверхности тела направлению должна быть равна нулю, а поверхность должна быть выпуклой в сторону течения в случае минимума и вогнутой в случае максимума. Если эти условия на численном решении не выполняются, то решение ошибочно.

Заключение. Получены два необходимых условия, которые должны выполняться в точке локального экстремума давления, расположенной на плоскости симметрии стационарного небаротропного течения идеального газа. Если рассматривать экстремум давления по плоскости симметрии (независимо от того, является ли он экстремумом по пространству), то, если скорость газа в этой точке отлична от нуля, значение Q-параметра должно быть равно нулю или меньше нуля. Это утверждение есть первый из известных принципов максимума, охватывающий трансзвуковые и сверхзвуковые течения.

Если же в точке, лежащей на плоскости симметрии, достигается локальный минимум по пространству, а не только по плоскости симметрии, то, если скорость газа в этой точке отлична от нуля и меньше местной скорости звука, значение Q-параметра должно быть равно нулю.

Предлагается использовать эти свойства для проверки численных расчетов течений с плоскостью симметрии. Для этого в четвертом разделе приведена “инструкция” по верификации расчетов путем проверки обнаруженных принципов максимума, не требующая знакомства с остальным текстом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Truesdell C.* Two measures of vorticity // J. Rational Mech. Anal. 1953. V. 2. P. 173–217.
2. *Hunt J.C.R., Wray A.A., Moin P.* Center for turbulence research // Proc. Summer Program. 1988. P. 193–208.
3. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // J. Fluid Mech. 1995. V. 285. P. 69–94.
4. *Cala C.E., Fernandes E.C., Heitor M.V., Shtork S.I.* Coherent structures in unsteady swirling jet flow // Exp. Fluids. 2006. V. 40. № 2. P. 267–276.

5. *Егоров И.В., Федоров А.В., Динь К.Х.* Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при сверхзвуковом обтекании острой пластины // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Т. XLIX. № 5. С. 17–25.
6. *Troshin A., Vlasenko V., Sabelnikov V.* Large eddy simulation of a transverse hydrogen jet in supersonic crossflow // Proc. 8th Europ. Conf. for Aeronautics and Space Sci. 2019.
7. *Dong X., Gao Y., Liu C.* New normalized Rortex/vortex identification method // Phys. Fluids. 2019. V. 31. № 1.
8. *Zhan J., Li Y., Onyx Wai W., Hu W.* Comparison between the Q criterion and Rortex in the application of an in-stream structures // Phys. Fluids. 2019. V. 31.
9. *Rowland H.* On the motion of a perfect incompressible fluid when no bodies are present // Amer. J. Math. 1880. V. 3. P. 226–268.
10. *Hamel G.* Ein allgemeiner Satz uber den Druck bei der Bewegung volumbestandiger Flussigkeiten // Monatshefte Math. Phys. 1936. V. 43. P. 345–363.
11. *Никольский А.А.* Теоретические исследования по механике жидкости и газа // Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
12. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б., Чернов С.В.* Экстремальные свойства давления в осесимметричных вихревых течениях газа // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Т. 49. № 5. С. 26–33.
13. *Вышинский В.В., Сизых Г.Б.* О верификации расчетов стационарных дозвуковых течений и о форме представления результатов // Матем. модел. 2018. Т. 30. № 6. С. 21–38.
14. *Вышинский В.В., Зоан К.Т.* Численное моделирование обтекания фрагментов ландшафта и вопросы верификации решений // Уч. зап. ЦАГИ. 2020. Т. 51. № 6. С. 60–68.
15. *Айрапетов А.Б., Вышинский В.В., Катунин А.В.* К вопросу о верификации расчетов стационарных дозвуковых течений около плохообтекаемых тел // Уч. зап. ЦАГИ. 2021. Т. 52. № 1. С. 34–40.
16. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 528 с.
17. *Сизых Г.Б.* Угол примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 734–741.

On the Value of the Q Criteria at the Point of Minimum Pressure on the Plane of Symmetry of Non-Barotropic Flow

G. B. Sizykh[a,#]

[a]*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyj, Russia*
#e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Non-barotropic vortex flow of an ideal gas symmetric with respect to some plane is considered. Using the Euler equations for stationary flows, it is established that if the pressure reaches a strict or nonstrict local minimum at an internal point of the flow located on the plane of symmetry, and at this point the flow is subsonic, and the velocity is different from zero, then the value of the Q criteria at this point should be equal to zero. It was also found that if at the considered point a local pressure minimum or maximum is reached not in space, but only in the plane of symmetry, then the value of the Q criteria should not be positive. The last statement turns out to be true both for subsonic and for sonic and supersonic points. The results can be used to verify numerical calculations of an ideal gas flow behind a detached shock wave in a supersonic flow around symmetric bodies, as well as to verify numerical calculations of a viscous gas flow around symmetric bodies in regions remote from sources of vorticity, where the influence of viscosity and thermal conductivity can be neglected.

Keywords: verification of calculations, extreme properties of pressure, Euler equations, vortex gas flows, non-barotropic flows, flow behind a detached shock wave

REFERENCES

1. *Truesdell C.* Two measures of vorticity // J. Rational Mech. Anal., 1953, vol. 2, pp. 173–217.

2. *Hunt J.C.R., Wray A.A., Moin P.* Center for turbulence research // Proc. Summer Program, 1988, pp. 193–208.
3. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // J. Fluid Mech., 1995, vol. 285, pp. 69–94.
4. *Cala C.E., Fernandes E.C., Heitor M.V., Shtork S.I.* Coherent structures in unsteady swirling jet flow // Exp. Fluids, 2006, vol. 40, no. 2, pp. 267–276.
5. *Egorov I.V., Fedorov A.V., Din Q.H.* Direct numerical simulation of laminar-turbulent transition at supersonic flow over sharp plate // TsAGI Sci. J., 2018, vol. XLIX, no. 5, pp. 495–505.
6. *Troshin A., Vlasenko V., Sabelnikov V.* Large eddy simulation of a transverse hydrogen jet in supersonic crossflow // Proc. 8^{th} Europ. Conf. for Aeronautics and Space Sci., 2019.
7. *Dong X., Gao Y., Liu C.* New normalized Rortex/vortex identification method // Phys. Fluids, 2019, vol. 31, no. 1.
8. *Zhan J., Li Y., Onyx Wai W., Hu W.* Comparison between the Q criterion and Rortex in the application of an in-stream structures // Phys. Fluids, 2019, vol. 31.
9. *Rowland H.* On the motion of a perfect incompressible fluid when no bodies are present // American J. Math., 1880, vol. 3, pp. 226–268.
10. *Hamel G.* A general theorem about the pressure in the movement of volume-constant fluids // Monatshefte Math. Phys., 1936, vol. 43, pp. 345–363. (in German)
11. *Nikol'skii A.A.* Theoretical research on fluid and gas mechanics // Trudy TsAGI, 1981, no. 2122, pp. 74–85. (in Russian)
12. *Golubkin V.N., Sizykh G.B., Chernov S.V.* Extremal properties of pressure in axisymmetric vortex gas flows // TsAGI Sci. J., 2018, vol. 49, iss. 5, pp. 507–514.
13. *Vyshinsky V.V., Sizykh G.B.* The verification of the calculation of stationary subsonic flows and the presentation of results // Math. Models&Comput. Simul., 2019, vol. 11, no. 1, pp. 97–106.
14. *Vyshinsky V.V., Zoan K.T.* Numerical simulation of the flow around landscape fragments and solution verification // TsAGI Sci. J., 2020, vol. 51, no. 6, pp. 641–650.
15. *Airapetov A.B., Vyshinsky V.V., Katunin A.V.* To the problem of verification of calculations of stationary subsonic flows around bluff bodies // Uch. Zap. TsAGI, 2021, vol. 52, no. 1, pp. 34–40. (in Russian)
16. *Sedov L.I.* A Course in Continuum Mechanics. Vol. 1. Netherlands: Wolters-Noordhoff Publ., 1971. 305 p.
17. *Sizykh G.B.* The attachment angle of a sonic line to the streamlined surface // Fluid Dyn., 2021, vol. 56, pp. 937–942.