ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 3, с. 409–422

УДК 532.5

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАЗВИТИЯ НЕВЯЗКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОМ ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

© 2023 г. Ю. Н. Григорьев[1,]*, И. В. Ершов[2,]**

[1]*Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия*

[2]*Новосибирский государственный аграрный университет, Новосибирск, Россия*

**e-mail: grigor@ict.nsc.ru*

***e-mail: ivershov1969@gmail.com*

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.
После доработки 15.03.2023 г.
Принята к публикации 24.03.2023 г.

Для плоского течения колебательно-возбужденного диссоциирующего двухатомного газа получены необходимые условия существования растущих (нейтральных) невязких возмущений, аналогичные условию Рэлея “обобщенной” точки перегиба. Представлены соответствующие формулы для случаев, имеющих определенную физическую трактовку. В частности, рассмотрена модель колебательно-возбужденного однокомпонентного газа, как начальная стадия термической диссоциации, а также распространенная модель с одной реакцией диссоциации–рекомбинации. В качестве промежуточного рассмотрен случай бинарной молекулярно-атомной смеси с колебательно-возбужденной молекулярной компонентой и “замороженной” газофазной реакцией диссоциации–рекомбинации. Проведены сравнительные численные расчеты, показавшие, в частности, что в условиях развитой диссоциации использование условия “обобщенной” точки перегиба не учитывает специфику процесса. Волновые числа и фазовые скорости I и II невязких мод, рассчитанные на его основе, могут существенно отличаться от результатов, полученных с использованием нового необходимого условия.

Ключевые слова: невязкие возмущения, критерий Рэлея “обобщенная” точка перегиба, колебательное возбуждение, реакция диссоциации–рекомбинации, I и II невязкие моды Мэка

DOI: 10.31857/S0032823523030049, **EDN:** ZSWUBU

1. Введение. Проблема нахождения растущих (нейтральных) невязких возмущений является частью общей задачи линейной теории устойчивости течений. Из спектра невязких возмущений выделяются наиболее растущие моды, которые воспроизводятся в вязкой задаче. Для параллельных течений идеальной несжимаемой жидкости необходимое условие существования таких возмущений, требующее наличия точки перегиба на профиле скорости стационарного течения, было получено Рэлеем [1]. Известно его уточнение, данное Фьертофтом [2]. В дальнейшем Толлмином [1] было доказано, что для сдвиговых течений типа пограничного слоя условие Рэлея является также достаточным. Проявление реальных свойств газа, таких как сжимаемость, колебательное возбуждение, диссоциация–рекомбинация, другие физико-химические процессы, влияет на физическую картину возникновения и развития возмущений.

При этом последовательный учет процесса развития невязких возмущений должен был приводить к дальнейшим обобщениям этих условий.

Для пограничного слоя идеального (невязкого, нетеплопроводного) газа необходимое и достаточное условие развития невязких возмущений, известное как критерий “обобщенной” точки перегиба, было получено в работе Лиза [3]. После обнаружения в сверхзвуковых пограничных слоях при числах Маха $M > 2.2$ более неустойчивых высокочастотных мод [4] в область применения этого критерия были включены так называемые моды Мэка. В [5] необходимое условие “обобщенной” точки перегиба выведено для плоского течения Куэтта сжимаемого невязкого газа.

С математической точки зрения учет физико-химических процессов, приводит к определенным сложностям при выводе соответствующих условий развития невязких возмущений. Это связано с появлением источников в уравнениях неразрывности и энергий исходного стационарного течения и соответствующих уравнениях для возмущений линейной теории устойчивости. Была сделана попытка [6] вывести необходимое условие развития невязких неустойчивостей для плоских течений сжимаемого колебательно-возбужденного газа. Но существенным ограничением было использование постоянных профилей термодинамических параметров стационарного течения. Кроме того, полученное условие было громоздким и трудно проверяемым. Получено [7] обобщение условия “обобщенной” точки перегиба для плоского течения Куэтта невязкого колебательно-возбужденного газа.

Представлено [8] необходимое условие роста невязких возмущений для модели газа с простой химической реакцией первого порядка. Однако при выводе в уравнении энергии для амплитуд возмущений было опущено слагаемое, соответствующее работе сил давления при объемной деформации среды. Такое неоправданное упрощение ставит под сомнение адекватность полученного результата, тем более не подтвержденного числовыми расчетами. Впоследствии [9] был дан контрпример, по крайней мере, ограничивающий область применения данного условия.

В статье рассматриваются необходимые условия существования нейтральных (роста) невязких возмущений в колебательно-возбужденном диссоциирующем газе для случая одномодовой колебательной релаксации и диссоциации—рекомбинации двухатомного газа по схеме

$$A_2 + B \leftrightarrow A + A + B,$$

где A_2 означает молекулу, A — атом, а B — партнер по соударению (третье тело при рекомбинации), которым может быть либо молекула, либо атом. Таким образом, рассматривается бинарная реагирующая газовая смесь.

Чтобы избежать громоздких вычислений, рассмотрение было ограничено частными случаями, имеющими определенную физическую трактовку. В частности, рассмотрена модель колебательно-возбужденного однокомпонентного газа, как начальная стадия термической диссоциации, когда концентрация атомов незначительна, кроме того представляющая самостоятельный интерес. В качестве другого приближения разобран случай бинарной молекулярно-атомной смеси с колебательно-возбужденной молекулярной компонентой и “замороженной” (в отсутствие объемной) газофазной реакцией диссоциации—рекомбинации, что соответствует условиям эксперимента в высокоэнтальпийной аэродинамической трубе. Практический интерес представляет условие существования нейтральных (растущих) невязких возмущений, полученное для широко используемой модели диссоциирующего газа без учета колебательного возбуждения, обоснованием которой служит существенное различие характерных времен двух процессов. Для проверки значимости полученных критериев выполнены численные расчеты для условий развитой диссоциации.

2. Основные уравнения. В качестве исходной рассматривается система уравнений плоского сверхзвукового течения двухатомного газа с учетом колебательной релаксации и реакции диссоциации–рекомбинации [10]. Пусть (x, y) и (u, v) – декартовы координаты и скорости реагирующей смеси соответственно вдоль и поперек потока. Система гидродинамических переменных включает плотность смеси ρ, массовую концентрацию свободных атомов c, массовую плотность внутренней энергии E_i, массовую плотность колебательной энергии E_v, статическую (поступательную) температуру T и колебательную температуру T_v.

Для рассмотрения течения в пограничном слое на пластине в качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны текущее расстояние $x = L$ вдоль пластины, параметры невозмущенного потока вне пограничного слоя, отмеченные индексом "∞", скорость U_∞, плотность ρ_∞ и температура T_∞, коэффициенты сдвиговой η_∞ и объемной вязкости $\eta_{\text{b}\infty}$, коэффициент теплопроводности, обусловленный переносом энергии в поступательных и вращательных степенях свободы, $\lambda_\infty = \lambda_{t\infty} + \lambda_{r\infty}$, коэффициент теплопроводности, описывающий диффузионный перенос энергии колебательных квантов, $\lambda_{\text{v}\infty}$. Для обезразмеривания давления и времени используются комбинированные величины $\rho_\infty U_\infty^2$ и L/U_∞ соответственно. Энергии и энтальпии обезразмериваются на комплекс $\rho_\infty T_\infty R/(2M_1)$, где R – универсальная газовая постоянная, M_1 – молекулярный вес атома. Скорость производства (гибели) атомарной компоненты $\dot{w}$ масштабируется на комплекс $k_{d\infty}\rho_\infty^2/(2M_1)$, $k_{d\infty}$ – константа диссоциации. При этом задача характеризуется безразмерными критериями – числом Рейнольдса $\text{Re}_\infty = \rho_\infty L U_\infty/\eta_\infty$, числом Маха $\text{M}_\infty = U_\infty/\sqrt{\gamma T_\infty R/(2M_1)}$, числом Дамкелера $\text{Da}_d = k_{d\infty}\rho_\infty^2 L/(2M_1 U_\infty)$, числом Шмидта $\text{Sc} = \eta_\infty/(\rho_\infty D_{12\infty})$ и другими. Здесь $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты и $D_{12\infty}$ – коэффициент взаимодиффузии.

В невязком приближении, которое будет рассматриваться, принимается, что в исходных уравнениях диффузионные члены малы по сравнению с конвективными. Как следствие, в пределе $\text{Re}_\infty \to \infty$ из исходной системы исключаются слагаемые, описывающие процессы диффузионного переноса импульса, тепла и массы.

В результате такого перехода система уравнений плоского сверхзвукового течения двухатомного газа [10] принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} = 0, \quad \rho\frac{\partial c}{\partial t} + \rho u\frac{\partial c}{\partial x} + \rho v\frac{\partial c}{\partial y} = \text{Da}_d\dot{w}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho u\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho\frac{\partial e_i}{\partial t} + \rho u\frac{\partial e_i}{\partial x} + \rho v\frac{\partial e_i}{\partial y} + \gamma \text{M}_\infty^2 p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \text{Da}_d\left(J - \frac{1}{2}e_\text{v}\dot{w}\right) - Q_{t-\text{v}} \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{\partial(1-c)e_\text{v}}{\partial t} + \rho u\frac{\partial(1-c)e_\text{v}}{\partial x} + \rho v\frac{\partial(1-c)e_\text{v}}{\partial y} = \frac{1}{2}\text{Da}_d e_\text{v}\dot{w} + Q_{t-\text{v}}$$

$$\gamma\text{M}_\infty^2 p = (1+c)\rho T$$

В уравнениях системы (2.1)

$$e_i = (c+5)T/2, \quad e_\text{v} = \theta_h\left(\exp(\theta_h/T_\text{v}) - 1\right)^{-1},$$

θ_h – характеристическая температура молекул рассматриваемого газа; безразмерный тепловой эффект реакций диссоциации–рекомбинации $J = h_1^0\dot{w}$, h_1^0 – безразмерная энтальпия образования атомов;

$$Q_{t-\mathrm{v}} = (1-c)\rho\frac{e_\mathrm{v}(T) - e_\mathrm{v}(T_\mathrm{v})}{\tau},$$

τ – время релаксации. Размерная скорость производства атомов в соответствии с [10] рассчитывается по формуле

$$\dot{w} = k_d^{(1)}\frac{(1-c)^2\rho^2}{4M_1} - k_r^{(1)}\frac{(1-c)c^2\rho^3}{2M_1^2}, \quad k_d^{(1)} = a_1T^{-1/2}\exp\left(-\frac{\theta_d}{T}\right), \quad k_r^{(1)} = b_1T^{-1/2},$$

где θ_d – энергия диссоциации молекулы газа. В обезразмеренной скорости производства атомов сохраняются исходные обозначения.

Для рассмотрения двумерных возмущений система (2.1) линеаризовалась на стационарном решении уравнений пограничного слоя для пластины. При выводе линеаризованных уравнений для возмущений мгновенные значения газодинамических переменных представлялись в виде

$$u = U_s + u', \quad v = v', \quad \rho = \rho_s + \rho', \quad c = c_s + c'$$
$$T = T_s + T', \quad T_\mathrm{v} = T_{\mathrm{v}s} + T_\mathrm{v}', \quad p = p_s + p'$$

Здесь индексом “s” обозначены значения переменных, относящиеся к стационарному течению, а штрихованные величины – возмущения этих переменных. Возмущения величин, функционально зависящих от основных переменных, выражались через их полные дифференциалы первого порядка. При этом входящие в них производные вычислялись на стационарном решении. Имеем следующие выражения:

$$\begin{gathered} e_i = e_{is} + e_i' = e_{is} + e_{iT}T' + e_{ic}c', \quad e_\mathrm{v} = e_{\mathrm{v}s} + e_\mathrm{v}' = e_{\mathrm{v}s} + e_{\mathrm{v}T_\mathrm{v}}T_\mathrm{v}' \\ \dot{w} = \dot{w}_s + \dot{w}' = \dot{w}_s + \dot{w}_\rho\rho' + \dot{w}_TT' + \dot{w}_cc' \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь

$$e_{iT} = \frac{c_s+5}{2}, \quad e_{ic} = \frac{T_s}{2}, \quad e_{\mathrm{v}T_\mathrm{v}} = \left(\frac{\theta_h}{T_{\mathrm{v}s}}\right)^2\exp\left(\frac{\theta_h}{T_{\mathrm{v}s}}\right)\left(\exp\left(\frac{\theta_h}{T_{\mathrm{v}s}}\right)-1\right)^{-2}$$

$$\dot{w}_\rho = k_{ds}^{(1)}\frac{(1-c_s)^2\rho_s}{2M_1} - k_{rs}^{(1)}\frac{3(1-c_s)c_s^2\rho_s^2}{2M_1^2}, \quad \dot{w}_c = -\left(k_{ds}^{(1)}\frac{(1-c_s)\rho_s}{M_1} - k_{rs}^{(1)}\frac{(2c_s-3c_s^2)\rho_s^3}{2M_1^2}\right)$$

$$\dot{w}_T = \frac{a_1}{T_s^{3/2}}\exp\left(-\frac{\theta_d}{T_s}\right)\left(\frac{\theta_d}{T_s}-\frac{1}{2}\right)\frac{(1-c_s)^2\rho_s^2}{4M_1} + \frac{3b_1}{2T_s^{3/2}}\frac{(1-c_s)c_s^2\rho_s^2}{2M_1^2}$$

Рассматривалась устойчивость периодических по продольной координате x возмущений в форме бегущих плоских волн

$$\mathbf{q}'(x,y,t) = \mathbf{q}(y)\exp(i\alpha(x-Vt))$$

$$\mathbf{q}'(x,y,t) = (u',v',\rho',T',T_\mathrm{v}',p',c',\dot{w}'), \quad \mathbf{q}(y) = (u,\alpha,v,\rho,\theta,\theta_\mathrm{v},p,C,\Omega),$$

где α – волновое число вдоль периодической переменной x, $V = V_r + iV_i$ – комплексная фазовая скорость, i – мнимая единица. Здесь для части амплитудных функций использованы обозначения соответствующих исходных переменных.

Подстановка $\mathbf{q}'(x, y, t)$ в систему уравнений для возмущений дает систему уравнений для их амплитуд:

$$D\rho + \alpha\rho_s\sigma + \alpha v\frac{d\rho_s}{dy} = 0, \quad D\rho_sC + \rho_s\alpha v\frac{dc_s}{dy} = \mathrm{Da}_d\,\Omega'$$

$$D\rho_su + \rho_s\alpha v\frac{dU_s}{dy} = -i\alpha p, \quad D\rho_s\alpha v = -\frac{dp}{dy}$$

$$D\rho_s e'_{ia} + \rho_s \alpha v \frac{de_{is}}{dy} + \gamma M_\infty^2 p_s \alpha\sigma = \mathrm{Da}_d \left(J'_a - \frac{1}{2}\left(e'_{\mathrm{v}a}\dot{w}_s + e_{\mathrm{v}s}\Omega' \right) \right) - Q'_{t-\mathrm{v},a} \quad (2.3)$$

$$(1 - c_s) D\rho_s e'_{\mathrm{v}a} - \rho_s e_{\mathrm{v}s} DC + \rho_s \alpha v \frac{d(1 - c_s) e_{\mathrm{v}s}}{dy} = \frac{\mathrm{Da}_d}{2}\left(e'_{\mathrm{v}a}\dot{w}_s + e_{\mathrm{v}s}\Omega' \right) + Q'_{t-\mathrm{v},a}$$

$$p = p_s \left(\frac{C}{1 + c_s} + \frac{\rho}{\rho_s} + \frac{\theta}{T_s} \right), \quad p_s = \frac{\rho_s T_s (1 + c_s)}{\gamma M_\infty^2},$$

где введены следующие обозначения

$$D = i\alpha W, \quad W = U_s - V, \quad \sigma = iu + \frac{du}{dy}, \quad \Omega' = \dot{w}_\rho \rho + \dot{w}_T \theta + \dot{w}_c C$$

В уравнениях (2.3) дополнительные индексы "a" в выражениях возмущений означают, что в формулах (2.2) подставлены значения соответствующих амплитуд, например:

$$e'_{ia} = e_{iT}\theta + e_{ic}C$$

$$Q'_{t-\mathrm{v},a} = (1 - c_s)\rho_s \frac{e'_{\mathrm{v}}(\theta) - e'_{\mathrm{v}}(\theta_{\mathrm{v}})}{\tau} - \left(C\rho_s - (1 - c_s)\rho \right) \frac{e_{\mathrm{v}s}(T_s) - e_{\mathrm{v}s}(T_{\mathrm{v}s})}{\tau}$$

Как известно [3, 4, 7, 9], система (2.3) с исключенными вторыми производными является переопределенной и сводится к двум уравнениям первого порядка для пары функций (v, p) или к уравнению второго порядка для одной из них.

3. Критерии невязкой неустойчивости. Чтобы избежать громоздких вычислений, мы ограничились частными случаями, имеющими определенную физическую трактовку. Во всех рассмотренных случаях вывод условий невязкой неустойчивости производится в рамках единой схемы вычислений, обобщающей подход [5]. На первом этапе система (2.3) сводится к уравнению второго порядка для амплитуды возмущения поперечной скорости v. Уравнение можно записать в следующем универсальном виде

$$\frac{1}{W}\frac{d}{dy}\left(\frac{v'W - vU'_s}{\chi} + vWS \right) = \alpha^2 \rho_s v, \quad v = v_r + iv_i \quad (3.1)$$

Здесь и далее штрихи означают производные по координате y, функции χ и S определяются в каждом конкретном случае.

К уравнению (3.1) присоединяются однородные граничные условия

$$v(0) = v(\delta) = 0, \quad (3.2)$$

где δ – условная верхняя граница пограничного слоя.

Чтобы перейти в (3.1), (3.2) к корректно поставленной спектральной задаче и при выводе условий, входящие сложным образом в выражения для χ и S комплексы D, содержащие спектральный параметр α, опускаются в предположении его малости.

Уравнение (3.1) умножается на комплексно сопряженную функцию v^* и из полученного уравнения вычитается комплексно сопряженное ему. После ряда преобразований приходим к дифференциальному тождеству:

$$\frac{v^* W^*}{|W|^2}\frac{d}{dy}\left(\frac{v'W - vU'_s}{\chi} + vWS \right) = \frac{vW}{|W|^2}\frac{d}{dy}\left(\frac{v'^* W^* - v^* U'_s}{\chi^*} + v^* W^* S^* \right) \quad (3.3)$$

Перегруппировав слагаемые в (3.3), получаем выражение

$$v^*\frac{d}{dy}\left(\frac{v'}{\chi}\right)-v\frac{d}{dy}\left(\frac{v'^*}{\chi^*}\right)=\frac{vv^*}{|W|^2}\left[W\frac{d}{dy}\left(\frac{U_s'}{\chi^*}\right)-W^*\frac{d}{dy}\left(\frac{U_s'}{\chi}\right)+\left(\frac{W}{\chi^*}-\frac{W^*}{\chi}\right)\frac{dU_s}{dy}+\right.$$
$$\left.+\left(WS^*\frac{dW^*}{dy}-W^*S\frac{dW}{dy}\right)+|W|^2\frac{d(S^*-S)}{dy}\right]+\left(vv'^*S^*-v^*v'S\right)$$

Для возмущений, близких к нейтральным, можно положить

$$|V_i|\ll|V_r|,|U_s|$$

и пренебречь мнимой составляющей в W. В результате получаем $W = W^*$, $\chi = \chi^*$, $S = S^*$. После этого выражение преобразуется к виду

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\chi}\frac{dv_rv_i}{dy}-v_rv_iS\right)=\frac{|v|^2V_i}{|W|^2}\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\chi}\frac{dU_s}{dy}\right)+S\frac{dU_s}{dy}\right)-v_rv_i\frac{dS}{dy}, \tag{3.4}$$

где выражения в обеих сторонах тождества чисто вещественные.

Необходимое условие существования растущих невязких возмущений при $V_i > 0$ получается из (3.4) на основе следующих рассуждений. В левой части (3.4) стоит производная дифференцируемой функции

$$F(y)=\frac{1}{\chi}\frac{dv_rv_i}{dy}-v_rv_iS,$$

в силу (3.2) обращающейся в нуль на концах интервала $[0, \delta]$. Гладкость $F(y)$ следует из дифференцируемости решений уравнения (3.1). Если уравнение (3.1) переписать в несамосопряженной форме, то непосредственно можно установить, что во всех рассматриваемых ниже случаях оно имеет вид

$$\frac{d^2v}{dy^2}+p_1(y)\frac{dv}{dy}+p_2(y)y=0$$

При этом коэффициент $p_1(y)$ имеет полюс первого порядка в точке $y = y_{cr}$, где $W = 0$, а коэффициент $p_2(y)$ в данном случае не имеет особенностей. При этом из теоремы Фукса [11] следует, что точка $y = y_{cr}$ является устранимой особенностью, а уравнение имеет два линейно независимых дифференцируемых решения, представляемых обобщенными степенными рядами. Для случая колебательно-возбужденного однокомпонентного газа такие решения были построены в явном виде [12].

По известной теореме Ролля [13] производная функции $F(y)$ должна обращаться в нуль хотя бы в одной внутренней точке интервала. В частности, в силу структуры правой части одной из таких точек должна быть координата критического слоя $y = y_{cr}$. Действительно, в этой точке первое слагаемое содержит сингулярность, которая должна быть скомпенсирована, чтобы сохранить ограниченность производной дифференцируемой функции $F(y)$ в левой части. При положительных инкрементах $V_i > 0$ это возможно, если и только если выражение в квадратных скобках обращается в нуль

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\chi}\frac{dU_s}{dy}\right)+S\frac{dU_s}{dy}=0$$

Чтобы эта точка была нулем производной $F(y)$, необходимо также потребовать

$$\frac{dS}{dy}=0$$

Таким образом, условием невязкой неустойчивости, определяющим координату критического слоя, может служить система уравнений

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\chi_1}\frac{dU_s}{dy}\right)+S_1\frac{dU_s}{dy}=0,\quad \frac{dS_1}{dy}=0, \tag{3.5}$$

где χ_1, S_1 – выражения функций χ, S при $W = 0$, совместное решение которых определяет координату y_{cr}.

Полученная система (3.5) сложна для практического использования в качестве критерия, в частности, в случае учета объемной диссоциации–рекомбинации. В предположении ведущей роли первого уравнения, компенсирующего сингулярность $(U_s - V_r) = 0$, были рассмотрены возможные упрощения. В результате оценочных расчетов выбрано приближение в виде уравнения

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\chi_1}\frac{dU_s}{dy}\right)+\left(\max_y S_1\right)\frac{dU_s}{dy}=0, \tag{3.6}$$

первые корни которого отличаются от корней системы (3.5) не более, чем в третьем знаке после запятой.

3.1. Колебательно-возбужденный газ без учета реакции диссоциации–рекомбинации. Этот случай соответствует начальному этапу термической диссоциации, которой всегда предшествует колебательное возбуждение, но концентрация атомов пренебрежимо мала и газ остается однокомпонентным. В этом случае при выводе уравнения (3.1) в системе (2.3) следует обратить в нуль все величины, связанные с диссоциацией–рекомбинацией, и использовать уравнение состояния для пограничного слоя идеального газа [10]

$$p=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{\rho}{\rho_s}+\frac{\theta}{T_s}\right),\quad \rho_sT_s=1$$

Уравнения энергий удобно переписать в терминах возмущений температур:

$$D\theta+\alpha vT_s''+\frac{\alpha\sigma}{\rho_sc_{V,\text{tr}}}=-\gamma_{\text{v}}\frac{\theta-\theta_{\text{v}}}{\tau},\quad D\theta_{\text{v}}+\alpha vT_s''=\frac{\theta-\theta_{\text{v}}}{\tau}$$

$$\gamma_{\text{v}}=\frac{c_{V,\text{v}}}{c_{V,\text{tr}}},\quad c_{V,\text{tr}}=\frac{de_i}{dT}=\frac{5}{2},\quad c_{V,\text{v}}=\frac{de_{\text{v}}}{dT_{\text{v}}}=\left(\frac{\theta_h}{T_{\text{v}}}\right)^2\exp\left(\frac{\theta_h}{T_{\text{v}}}\right)\left(\exp\left(\frac{\theta_h}{T_{\text{v}}}\right)-1\right)^{-2}$$

После преобразований полученной таким образом системы приходим к уравнению вида (3.1) для возмущения поперечной скорости v, в котором коэффициентные функции определены как

$$\chi=T_s-m^2M_\infty^2W^2,\quad S=\frac{1}{\chi}\frac{\gamma_{\text{v}}(T_s'-T_{\text{v}s}')}{\gamma_{\text{v}}+\gamma(1-\tau D)},\quad m^2=m_r^2+im_i^2, \tag{3.7}$$

где

$$m_r^2=\frac{R_1(1+\gamma_{\text{v}}+\alpha\tau V_i)+\Delta^2}{R_1^2+\Delta^2},\quad m_i^2=-\frac{\gamma_{\text{v}}}{\gamma}\frac{(\gamma-1)\Delta}{R_1^2+\Delta^2}$$

$$R_1=1+\frac{\gamma_{\text{v}}}{\gamma}+\alpha\tau V_i,\quad \Delta=\alpha\tau V_r$$

В соответствии с определением (3.7) при $W = 0$ получаем

$$\chi_1=T_s,\quad S_1=\frac{1}{T_s}\frac{\gamma_{\text{v}}(T_s'-T_{\text{v}s}')}{\gamma_{\text{v}}+\gamma}$$

В результате согласно (3.6) условие невязкой неустойчивости для колебательно-возбужденного газа выражается как

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T_s}\frac{dU_s}{dy}\right)+\max_y\left(\frac{1}{T_s}\frac{\gamma_v(T_s'-T_{vs}')}{\gamma_v+\gamma}\right)\frac{dU_s}{dy}=0 \qquad (3.8)$$

Непосредственно видно, что в отсутствии колебательного возбуждения условие (3.8) переходит в известное условие “обобщенной” точки перегиба [2]

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T_s}\frac{dU_s}{dy}\right)=0 \qquad (3.9)$$

3.2. “Замороженная” реакция диссоциации—рекомбинации с учетом колебательного возбуждения. В данном случае принимается, что газофазная реакция диссоциации—рекомбинации “заморожена” в объеме, что соответствует $\dot{w}=0$ в (2.1) и $\Omega'=0$ в (2.3), и остается гетерогенная реакция на твердой поверхности. В сверхзвуковых потоках такая модель соответствует быстрому расширению термически диссоциированного газа, когда рекомбинация замедляется [9]. При этом фактически имеет место смесь двух нереагирующих газов, одна компонента в котором колебательно возбуждена. Для каждой из компонент удобно рассматривать отдельные уравнения неразрывности и уравнения энергий, записанные через температуры. При этом система уравнений для амплитуд возмущений (2.3) в двухкомпонентном газе переписывается в виде

$$D\rho_1+\alpha\rho_{1s}\sigma+\alpha v\frac{d\rho_{1s}}{dy}=0,\quad D\rho_2+\alpha\rho_{2s}\sigma+\alpha v\frac{d\rho_{2s}}{dy}=0$$

$$D\rho_s u+\rho_s\alpha v\frac{dU_s}{dy}=-i\alpha p,\quad D\rho_s\alpha v=-\frac{dp}{dy}$$

$$D\rho_{1s}\theta+\alpha v\rho_{1s}T_s''+\frac{\alpha\sigma\rho_{1s}}{\rho_s c_{V1,\mathrm{tr}}}=0 \qquad (3.10)$$

$$D\rho_{2s}\theta+\alpha v\rho_{2s}T_s''+\frac{\alpha\sigma\rho_{2s}}{\rho_s c_{V2,\mathrm{tr}}}=-\gamma_v\rho_{2s}\frac{\theta-\theta_v}{\tau},\quad D\rho_{2s}\theta_v+\alpha v\rho_{2s}T_s''=\rho_{2s}\frac{\theta-\theta_v}{\tau}$$

$$p=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\left((2\rho_{1s}+\rho_{2s})\theta+(2\rho_1+\rho_2)T_s\right),\quad \rho_s=\rho_{1s}+\rho_{2s}$$

Так как давление постоянно поперек слоя, то $\rho_s T_s(1+c_s)=1+c_{s\infty}$, где c_∞ — значение массовой концентрации атомов на верхней границе пограничного слоя.

Здесь

$$\gamma_v=\frac{c_{V2,v}}{c_{V2,\mathrm{tr}}},\quad c_{V1,\mathrm{tr}}=\frac{3}{2},\quad c_{V2,\mathrm{tr}}=\frac{5}{2},\quad c_{V2,v}=\left(\frac{\theta_h}{T_v}\right)^2\exp\left(\frac{\theta_h}{T_v}\right)\left(\exp\left(\frac{\theta_h}{T_v}\right)-1\right)^{-2}$$

Исключив из системы (3.10) все зависимые переменные, кроме возмущения поперечной скорости v, переходим к уравнению второго порядка вида (3.1), в котором коэффициентные функции имеют вид

$$\chi=T_s\left(\frac{1+c_s}{1+c_\infty}\right)\left(1-\frac{\gamma M_\infty^2W^2}{(1+c_s)T_sA}\right),\quad A=\frac{\gamma_v+\gamma(1+\tau D)}{1+\gamma_v+\tau D},\quad S=\frac{1}{\chi}\frac{\gamma_v(T_s'-T_{vs}')}{\gamma_v+\gamma(1-\tau D)} \qquad (3.11)$$

При $W=0$ выражения (3.11) принимают вид

$$\chi_1=T_s\left(\frac{1+c_s}{1+c_{s\infty}}\right),\quad S_1=\frac{1}{\chi_1}\frac{\gamma_v(T_s'-T_{vs}')}{(\gamma+\gamma_v)}$$

В результате согласно условию (3.6) критерий невязкой неустойчивости для колебательно возбужденного газа с "замороженной" реакцией диссоциации–рекомбинации дается формулой

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T_s}\left(\frac{1+c_{s\infty}}{1+c_s}\right)\frac{dU_s}{dy}\right)+\max_y\left(\left(\frac{1+c_{s\infty}}{1+c_s}\right)\frac{\gamma_v(T_s'-T_{vs}')}{(\gamma+\gamma_v)T_s}\right)\frac{dU_s}{dy}=0 \qquad (3.12)$$

Если пренебречь колебательным возбуждением в (3.12), то можно получить критерий невязкой неустойчивости для газа с "замороженной" обменной реакцией в виде

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T_s}\left(\frac{1+c_{s\infty}}{1+c_s}\right)\frac{dU_s}{dy}\right)=0 \qquad (3.13)$$

Переход от формул (3.12) и (3.13) к критерию "обобщенной" точки перегиба (3.9) очевиден.

3.3. Диссоциирующий газ без учета колебательного возбуждения. Колебательное возбуждение в этом случае косвенно учитывается в константах диссоциации. Здесь из системы (2.3) исключается уравнение для колебательной энергии и полагается $\gamma_v = 0$. Из-за громоздкости выражений коэффициентные функции в уравнении вида (3.1) для возмущения поперечной скорости v здесь не приводятся. При $W = 0$ они имеют вид

$$\chi_1=\frac{1}{\rho_s},\quad S_1=\Lambda\left(\rho_s\left(h_1^0\frac{dc_s}{dy}-\frac{de_{is}}{dy}\right)+N\frac{d\rho_s}{dy}\right),\quad \Lambda=\frac{\rho_s}{\rho_s N-\gamma M_\infty^2 p_s}$$
$$N=(1+c_s)(h_1^0-e_{is})+(e_{isT}T_s+(1+c_s)(h_1^0-e_{is}))\frac{(1+c_s)\dot w_c-\rho_s\dot w_\rho}{(1+c_s)\dot w_c-T_s\dot w_T} \qquad (3.14)$$

Используя условие (3.6) и равенства (3.14), получаем, что необходимое условие роста невязких возмущений дается выражением

$$\frac{d}{dy}\left(\rho_s\frac{dU_s}{dy}\right)+\max_y\left(\Lambda\left(\rho_s\left(h_1^0\frac{dc_s}{dy}-\frac{de_{is}}{dy}\right)+N\frac{d\rho_s}{dy}\right)\right)\frac{dU_s}{dy}=0 \qquad (3.15)$$

Без учета диссоциации–рекомбинации критерий (3.15) переходит в классическое условие (3.9). Действительно, дробное выражение в (3.14), преобразованное к виду

$$-e_{is}\frac{(1+c_s)-\rho_s\dot w_\rho/\dot w_c}{(1+c_s)-T_s\dot w_T/\dot w_c},$$

при переходе к идеальному газу превращается в $-T_s$. Соответственно, содержимое квадратных скобок в (3.14) переходит в выражение

$$-\rho_s\frac{dT_s}{dy}-T_s\frac{d\rho_s}{dy}=-\frac{d}{dy}(\rho_s T_s),$$

которое в силу условия $\rho_s T_s = 1$ обращается в нуль, что и дает требуемый переход. Аналогично в случае "замороженной" реакции условие (3.15) переходит в соответствующее условие (3.13).

4. Численные расчеты. Для предварительной оценки значимости полученных условий при выделении наиболее растущих невязких мод был выбран режим гиперзвукового полета в невозмущенной атмосфере. Рассматривался пограничный слой на пластине. В расчетах все физические характеристики газа брались по данным для азота. В качестве граничных условий на верхней границе пограничного слоя использовались параметры потока за косым скачком уплотнения [14] на заостренной головной части тела, летящего в верхних слоях атмосферы:

$$M_\infty = 6.337,\quad T_\infty = T_{v\infty} = 1986.3\ \text{K},\quad p_\infty = 57688.2\ \text{Па}$$

Профили газодинамических величин в стационарном потоке рассчитывались на основе локально автомодельных уравнений [10]. На верхней границе пограничного слоя обезразмеренные граничные условия имели вид

$$U_s(\delta) = 1, \quad T_s(\delta) = T_{vs}(\delta) = 1, \quad c_s(\delta) = c_\infty = 0.01$$

Верхняя граница пограничного слоя δ выбиралась из условия $\left|\dfrac{U_\infty - u(\delta)}{U_\infty}\right| \le 10^{-6}$. На поверхности пластины ставились граничные условия, соответствующие адиабатической абсолютно некаталитической стенке [10]

$$U_s(0) = 0, \quad T_s'(0) = 0, \quad T_{vs}(0) = T_s(0), \quad c_s'(0) = 0$$

Выбранное условие на колебательную температуру связано с тем, что при гиперзвуковых числах Маха температура адиабатической стенки достаточна для возбуждения колебательных степеней свободы.

Рассчитанные профили параметров стационарного течения приведены на рис. 1, где $Y = \dfrac{1}{2\delta\sqrt{x}}\int_0^y \rho(z)dz$.

Используя полученные распределения, на основе формул (3.8), (3.9), (3.12), (3.15) были вычислены координаты критического слоя y_{cr}, где фазовые скорости возмущения равны скорости стационарного потока $V_r = U_s(y_{cr})$. Затем для каждого значения фазовой скорости при $M_\infty = 6.337$ на основе уравнения (3.1) с однородными граничными условиями (3.2) были получены вещественные волновые числа $\alpha_k^{(j)}$ для первых четырех невязких мод Мэка [4], где $k = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{IV}$, а верхний индекс j фиксирует критерий, используя который они рассчитывались. Далее для каждого волнового числа $\alpha_k^{(j)}$ решалась спектральная задача (3.1), (3.2), собственными значениями которой являются комплексные фазовые скорости $V_k^{(j)} = V_{rk}^{(j)} + iV_{ik}^{(j)}$, и вычислялись частоты возмущений $\omega_k^{(j)} = \alpha_k^{(j)}V_{ik}^{(j)}$. Все спектральные задачи решались методом "стрельбы". Для этого задача (3.1), (3.2) заменялась нормальной системой уравнений первого порядка с однородными граничными условиями. Полученная таким образом система интегрировалась численно с помощью процедуры Рунге–Кутты четвертого порядка на интервалах $y = (0, 0.5\delta)$ и $y = (0.5\delta, \delta)$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Точкой "прицеливания" служила середина пограничного слоя $y = 0.5\delta$, в которой требовалось, чтобы вычисленные "слева" и "справа" в точке $y = 0.5\delta$ значения решения совпадали с точностью до 10^{-6}.

Расчетные данные для первых четырех невязких мод Мэка сведены в табл. 1. Как следует из таблицы, для всех выведенных условий I и II моды являются растущими. Это важно с той точки зрения, что в отличие от классического критерия (3.9), полученные условия по логике вывода являются только необходимыми и формально не гарантируют роста выделяемых на их основе возмущений. Все условия определяют II моду как наиболее растущую, что также подтверждает их физичность. Результаты, рассчитанные на одних и тех же профилях газодинамических переменных с учетом совместного колебательного возбуждения и реакций диссоциации–рекомбинации, имеют относительный характер. Они дают возможность оценить погрешность, связанную с использованием критерия "обобщенной" точки перегиба (3.9), в условиях, отличных от идеального газа. Сравнивая данные, полученные по условиям (3.8) и (3.9), можно видеть, что в рассчитанном режиме колебательное возбуждение практически не влияет на волновые числа невязких растущих мод. Сделанный вывод косвенно подтверждается сравнением соответствующих результатов, полученных на основе условий (3.12) и (3.15). Это позволяет предположить, что если колебательное возбуж-

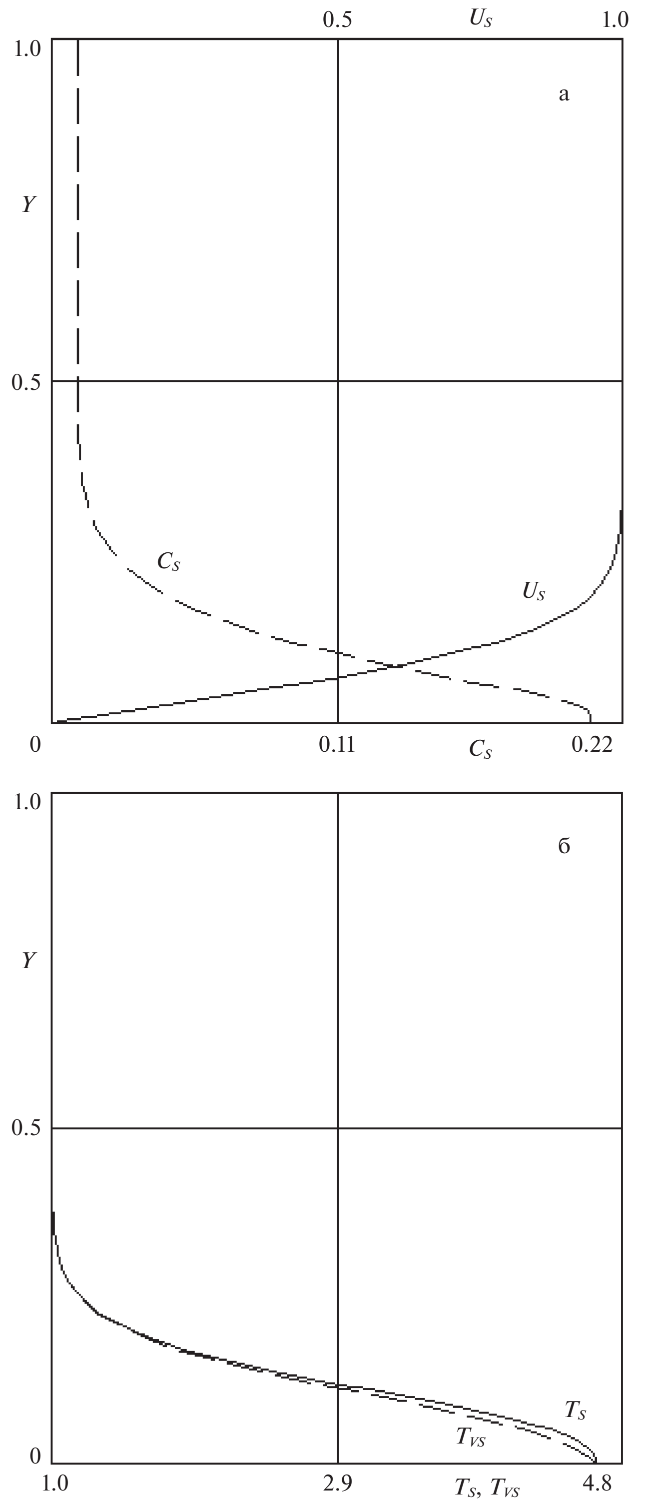

Рис. 1. Профили газодинамических переменных стационарного течения.

Таблица 1. Волновые числа $\alpha_k^{(j)}$ и частоты возмущений $\omega_k^{(j)}$ первых четырех невязких мод Мэка

Критерий	$\alpha_k^{(j)}$				$\omega_k^{(j)} \times 10^3$			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
(3.9)	0.0959	0.2726	0.3233	0.5548	0.9452	3.8041	0.8199	–0.3999
(3.8)	0.0957	0.2721	0.3226	0.5537	0.8309	3.3474	0.7209	–0.3515
(3.12)	0.0843	0.2392	0.2849	0.4878	0.7329	2.9424	0.6366	–0.3104
(3.15)	0.0821	0.2329	0.2773	0.4748	0.7136	2.8641	0.6198	–0.3022

дение, далекое от начала диссоциации, является единственным отклонением от идеального газа, можно ограничиться использованием условия “обобщенной” точки перегиба, как это было сделано в [15]. Относительное отклонение волновых чисел I и II мод, рассчитанных по критерию (3.9) для идеального газа и условию (3.15) для диссоциирующего газа без учета колебательного возбуждения, составляет порядка 14.5%. В то же время относительное отклонение мнимых частот (инкрементов нарастания) лежит в пределах 24–25%, которое является существенным. При этом условие (3.15) дает меньшие инкременты нарастания, что прямо соответствует демпфирующему эффекту процесса диссоциации [9]. Проведенный анализ показывает, что полученные условия, в частности, (3.15) для диссоциирующего газа, позволяют учесть влияние реальных свойств газа на характеристики растущих невязких возмущений, а через них на результаты расчетов устойчивости соответствующих течений.

Заключение. Для плоского течения колебательно-возбужденного диссоциирующего двухатомного газа в пограничном слое найдены необходимые условия существования растущих (нейтральных) невязких возмущений, обобщающие невязкий критерий “обобщенной” точки перегиба на профиле скорости невозмущенного потока. В качестве исходных использованы уравнения для амплитуд синусоидальных возмущений. Вывод соответствующих зависимостей является естественным обобщением известных выкладок для получения критерия “обобщенной” точки перегиба в сжимаемом газе. Получены условия для колебательно-возбужденного однокомпонентного газа, как начальной стадии термической диссоциации, а также для газа с одной реакцией диссоциации–рекомбинации. В качестве промежуточного рассмотрен случай бинарной молекулярно-атомной смеси с колебательно-возбужденной молекулярной компонентой и “замороженной” газофазной реакцией диссоциации–рекомбинации. Показано, что все соотношения при пренебрежении колебательным возбуждением и диссоциацией переходят в классическое условие “обобщенной” точки перегиба. Проведенные сравнительные численные расчеты для условий развитой диссоциации показали, что использование критерия “обобщенной” точки перегиба не учитывает специфику процесса. Волновые числа и фазовые скорости I и II невязких мод, рассчитанные на его основе, могут существенно отличаться от результатов, полученных с использованием нового необходимого условия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-01-00168а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
2. *Drasin P.G., Reid G.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 2004. 605 p.
3. *Lees L.* The Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. NACA Technical note, No. 1360. Washington: NACA, 1947. 169 p.

4. *Mack L.M.* Boundary Layer Stability Theory. JPL Technical Rep., Document 900–277. Pasadena: California Instit. Technology, 1969. 272 p.
5. *Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y.* On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 131–165.
6. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 581–593.
7. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбуждениого газа. 1. Невязкая задача // ПМТФ. 2014. Т. 55. № 2. С. 80–93.
8. *Shen S.F.* Effect of chemical reaction on the inviscid criterion for laminar stability of parallel flows // Proc. 5-th Midwest. Conf. Fluid Mech. Ann Arbor. 1957. P. 11–20.
9. *Гапонов С.А., Петров Г.В.* Устойчивость пограничного слоя неравновесного диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 95 с.
10. *Григорьев Ю.Н., Горобчук А.Г., Ершов И.В.* Модель пограничного слоя колебательно-возбужденного диссоциирующего газа // Теплофиз. и аэромех. 2021. Т. 28. № 5. С. 667–689.
11. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд. иностр лит., 1962. 351 с.
12. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Асимптотическая теория кривой нейтральной устойчивости течения Куэтта сжимаемого и колебательно-возбужденного газа // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 1. С. 3– 21.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 680 с.
14. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 676 с.
15. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Линейная устойчивость сверхзвукового пограничного слоя релаксирующего газа на пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 3–15.

Necessary Conditions for Development of Inviscid Instabilities in a Vibrationally Excited Dissociating Gas

Yu. N. Grigoryev[a,#] and I. V. Ershov[b,##]

[a] *Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia*
[b] *Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, Russia*
[#] *e-mail: grigor@ict.nsc.ru*
[##] *e-mail: ivershov1969@gmail.com*

For a plane flow of a vibrationally excited dissociating diatomic gas the necessary conditions of the existence of growing (neutral) inviscid perturbations, similar to the Rayleigh criterion of a “generalized” inflection point, are obtained. The corresponding formulas are presented for cases with a certain physical interpretation. In particular, the model of a vibrationally excited one-component gas is considered as the initial stage of thermal dissociation, as well as a wide spread model with one dissociation-recombination reaction. The case of a binary molecular-atomic mixture with a vibrationally excited molecular component and a “frozen” gas-phase dissociation-recombination reaction is considered as an intermediate one. Comparative numerical calculations were carried out, which showed, in particular, that under conditions of developed dissociation, the use of the criterion of the “generalized” inflection point does not take into account the specifics of the process. The wave numbers and phase velocities of the I and II inviscid modes calculated on its basis may differ significantly from the results obtained using the new necessary condition.

Keywords: inviscid perturbations, Rayleigh criterion, “generalized” inflection point, vibrational excitation, dissociation-recombination reaction, I and II inviscid modes

REFERENCES

1. *Lin C.C.* The Theory of Hydrodynamics Stability. Cambridge: Univ. Press, 1955. 155 p.
2. *Drasin P.G., Reid G.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 2004. 605 p.

3. *Lees L.* The Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. NACA Technical note, No. 1360. Washington: NACA, 1947. 169 p.
4. *Mack L.M.* Boundary Layer Stability Theory. JPL Technical Rep., Document 900–277. Pasadena: California Instit. Technology, 1969. 272 p.
5. *Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y.* On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech., 1994, vol. 258, pp. 131–165.
6. *Grigoryev Yu.N., Ershov I.V.* The linear stability of inviscid shear flow of vibrationally excited diatomic gas // JAMM, 2011, vol. 75, iss. 4, pp. 410–418.
7. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Linear stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. 1. Inviscid problem // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2014, vol. 55, no. 2, pp. 258–269.
8. *Shen S.F.* Effect of chemical reaction on the inviscid criterion for laminar stability of parallel flows // Proc. 5-th Midwest. Conf. Fluid Mech. Ann Arbor., 1957, pp. 11–20.
9. *Gaponov S.A., Petrov G.V.* Stability of the Boundary Layer of a Nonequilibrium Dissociating Gas. Novosibirsk: Nauka, 2013. 95 p. (in Russian)
10. *Grigoryev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V.* Model of the boundary layer of a vibrationally excited dissociating gas // Thermophys. Aeromech., 2021, vol. 28, no. 5, pp. 635–647.
11. *Tricomi F.* Differential Equations. Blackie & Son Limited, 1961. 326 p.
12. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Asymptotic theory of neutral stability curve of the Couette flow of a vibrationally excited gas // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2017, vol. 58, no. 1, pp. 1–16.
13. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1. Moscow: Fizmatlit, 2003. 680 p. (in Russian)
14. *Loitsyanskii L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Pergamon, 1966. 804 p.
15. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 3, pp. 295–307.