

УДК 534.1

*Светлой памяти Л.Д. Акуленко***АВТОКОЛЕБАНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА РЕЛЕЯ
С КУБИЧЕСКОЙ ВОЗВРАЩАЮЩЕЙ СИЛОЙ**© 2023 г. С. А. Кумакшев^{1,*}¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия***e-mail: kumak@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 04.06.2023 г.

После доработки 13.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Исследована колебательная система с механизмом возбуждения как в осцилляторе Релея, но с нелинейной (кубической) возвращающей силой. С помощью метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру построены предельные циклы и вычислены амплитуды и периоды автоколебаний. Это сделано для широкого диапазона значений коэффициента обратной связи, в котором этот коэффициент не является асимптотически малым или большим. Предложенная итерационная процедура позволяет достичь заданной точности вычислений. Проведен анализ особенностей предельного цикла, вызванных увеличением коэффициента самовозбуждения. Полученные результаты сопоставлены с автоколебаниями классического осциллятора Релея с линейной возвращающей силой.

Ключевые слова: автоколебания, предельный цикл, уравнение Релея**DOI:** 10.31857/S0032823523050090, **EDN:** QIZOZG

1. Введение. Автоколебания возникают в различных физических системах и исследование автоколебательных процессов имеет большой научный и прикладной интерес для многих областей науки, например механики и, возможно в большей степени, радиотехники. Методам исследования и определения характеристик автоколебательных систем посвящена обширная литература [1–7]. Для динамических систем разработаны качественные и топологические методы, определяющие критерии существования предельных циклов и устойчивости автоколебаний. Приближенно форма предельного цикла может быть найдена методом изоклин [2–4]. Для квазилинейных колебательных систем с малыми значениями коэффициента самовозбуждения широко известны аналитические методы, дающие приближенное решение: методы малого параметра Ляпунова–Пуанкаре, метод усреднения Крылова–Боголюбова и др. [2, 4–10]. С другой стороны, если коэффициент обратной связи асимптотически велик, то такая сингулярно возмущенная автоколебательная система совершает релаксационные колебания [1]. В этом случае предельный автоколебательный цикл можно построить приближенно, используя метод “припасовывания” А.А. Дородницына [4, 5, 11] или методов теории релаксационных колебаний [7, 12]. Однако для технических приложений представляют интерес автоколебания в промежуточной области коэффициентов обратной связи, где они не являются асимптотически большими или малыми. Построение характеристик автоколебательной системы в этой области предполагает числен-

ное решение с контролем точности, что в силу резких изменений параметров системы представляет собой большую вычислительную трудность. Существующие подходы немногочисленны, громоздки в использовании и не позволяют контролировать точность полученных решений. Предлагаемый подход основан на использовании численно-аналитического метода ускоренной сходимости [16] для вычислений совместно с процедурой продолжения по параметру. В частности, ранее, в рамках такого подхода, решены задачи об автоколебаниях классических осцилляторов Релея и Ван дер Поля [17]. Использование метода ускоренной сходимости позволяет контролировать точность вычислений, в отличие от более ранних результатов по исследованию уравнения Ван дер Поля [12–14]. Также была исследована колебательная система, описываемая уравнением Ван дер Поля с возвращающей силой третьего порядка [15]. Для нее были построены предельные циклы в зависимости от коэффициента обратной связи и определены амплитуда и период автоколебаний. Данная работа продолжает этот цикл исследований.

2. Приведение уравнений к стандартной форме. Рассмотрим колебания системы, описываемой уравнением типа Льенара, содержащее степенные функции обобщенной координаты x и скорости $\dot{x}$ вида

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + g(x, \dot{x})\dot{x} + f(x) &= 0 \\ g &= -k|x|^\beta |\dot{x}|^{\gamma-1} + l|x|^\delta |\dot{x}|^{\sigma-1}, \quad f = c|x|^{\alpha-1}x \\ m, c, k, l &> 0, \quad \infty > \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \geq 0, \quad \delta + \sigma > \beta + \gamma, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где m отвечает за инерцию в системе, а f играет роль возвращающей силы с коэффициентом упругости c . Это уравнение имеет периодическое решение с устойчивым предельным циклом. При определенных достаточных условиях стационарная точка $x = \dot{x} = 0$ неустойчива. Отметим, что структура уравнения не меняется, если провести замену $x \rightarrow -x$ и $\dot{x} \rightarrow -\dot{x}$. Это свидетельствует о том, что предельный цикл будет центрально симметричен и достаточно определить половину периода.

Для приведения к безразмерному виду сделаем замену переменной x и аргумента t [10]

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= d^{-1}x, \quad d = \left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{1-\kappa}{\xi}} \left(\frac{c}{m}\right)^{-\frac{\eta}{\lambda\xi}} \\ \tilde{t} &= vt, \quad v = \left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{\alpha-1}{\lambda\xi}} \left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ \xi &= \delta + \sigma - \beta - \gamma > 0, \quad \eta = \sigma - \gamma, \quad \lambda = 2 + \frac{(\alpha-1)\eta}{\xi} > 0 \\ \kappa &= \frac{(\alpha-1)\eta}{\lambda\xi} = \frac{(\alpha-1)\eta}{2\xi + (\alpha-1)\eta} \neq 1, \end{aligned}$$

тогда уравнение (2.1) перепишется в виде (знак $\sim$ опускаем)

$$\ddot{\tilde{x}} + \varepsilon \left(-|\tilde{x}|^\beta |\dot{\tilde{x}}|^{\gamma-1} + |\tilde{x}|^\delta |\dot{\tilde{x}}|^{\sigma-1} \right) \dot{\tilde{x}} + |\tilde{x}|^{\alpha-1} \tilde{x} = 0; \quad \varepsilon = \frac{k}{m} d^{\beta+\gamma-1} v^{\gamma-2}$$

В этом уравнении один безразмерный параметр $\varepsilon > 0$, имеющий смысл коэффициента обратной связи или самовозбуждения автоколебаний.

Теперь можно получить представление для уравнения типа Релея с нелинейной возвращающей силой

$$\ddot{\tilde{x}} - \varepsilon(1 - \tilde{x}^2)\dot{\tilde{x}} + |\tilde{x}|^{\alpha-1} \tilde{x} = 0; \quad \alpha \geq 0, \quad \beta = \delta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \sigma = 3 \quad (2.2)$$

Классическое уравнение Релея получается, если положить $\alpha = 1$. В данной работе будет исследован случай $\alpha = 3$, то есть когда возвращающая сила имеет кубический вид.

Также интересно сравнить полученные характеристики такой автоколебательной системы с системой, описываемой классическим уравнением Релея. Некоторые результаты для классического случая при умеренно-больших значениях коэффициента самовозбуждения получены в [17]. Далее будет проведено сравнение с этими результатами.

3. Применение метода возмущений. Чтобы применить численно-аналитический метод ускоренной сходимости совместно с процедурой продолжения по параметру ϵ , воспользуемся методами Ляпунова—Пуанкаре [2, 10]. Надо найти периодическое решение, у которого $x(0) = x(2T)$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}(2T)$, где T — неизвестный полупериод. Пользуясь подходом Пуанкаре [10], введем “возмущенный” аргумент θ вместо t для того, чтобы явно выделить зависимость от T следующим образом: $\theta = (t\Theta)/T$, где Θ — полупериод автоколебаний по θ будет фиксирован. Таким образом $x = x(\theta + \Theta, \epsilon) = x(\theta, \epsilon)$. Пользуясь центральной симметрией искомого решения, нам достаточно рассмотреть задачу на этом новом полупериоде. Положим полупериод Θ равным единице.

Получаем из (2.2) нелинейную периодическую краевую задачу

$$\ddot{x} - \epsilon T(1 - T^{-2}\dot{x}^2)\dot{x} + T^2x^3 = 0; \quad x = x(\theta, \epsilon) \quad (3.1)$$

$$x(0) = A(\epsilon), \quad x(1) = -A(\epsilon), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0$$

Здесь A — неизвестная амплитуда колебаний. Точками обозначены производные по новому аргументу θ .

Задача содержит четыре неизвестных параметра — две постоянные интегрирования, амплитуда и полупериод автоколебаний. Их можно найти их четырех краевых условий. Таким образом будет найдена одна половина предельного цикла, вторая половина получится симметричным отображением.

При $\epsilon = 0$ задача имеет тривиальный характер, позволяющий легко найти соответствующие значения амплитуды и полупериода колебаний. Обозначим их как A^* и T^* .

Однако, теперь величины A^* и T^* можно использовать как начальные приближения при достаточно малом $\epsilon > 0$, отличным от нуля. Для уточнения этих величин используем метод ускоренной сходимости [16]. Далее еще увеличим ϵ , а в качестве приближенного решения опять используем значения A и T с предыдущего шага. Эти значения снова будут уточнены с помощью метода ускоренной сходимости. Таким образом задача будет решена с помощью процедуры продолжения по параметру ϵ и методе ускоренной сходимости.

4. Применение метода ускоренной сходимости. Для того, чтобы построить Θ — периодическое решение уравнения (3.1), надо для каждого ϵ найти два неизвестных параметра $T(\epsilon)$ и $A(\epsilon)$. На первом шаге для $\epsilon = 0$ имеем значения T^* и A^* , которые используем как начальные приближения на следующем шаге численно-аналитической процедуры. Уточняющая рекуррентная процедура имеет вид

$$T_{(n+1)}(\epsilon) = T_{(n)}(\epsilon) + \delta T_{(n)}(\epsilon), \quad A_{(n+1)}(\epsilon) = A_{(n)}(\epsilon) + \delta A_{(n)}(\epsilon)$$

Уточняющие добавки $\delta T_{(n)}$, $\delta A_{(n)}$ вычисляются из условия обнуления невязок по краевым условиям задачи (3.1):

$$\delta T_{(n)}(\epsilon) = \frac{X'_n(W_n + 1) - (A_{(n)} + X_n)W'_n}{\Delta_n}$$

$$\delta A_{(n)}(\epsilon) = \frac{(A_{(n)} + X_n)Z'_n - X'_nZ_n}{\Delta_n}$$

$$\Delta_n = Z_nW'_n - Z'_n(W_n + 1) \neq 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь введены коэффициенты чувствительности W_n, Z_n, W'_n, Z'_n , и невязки решения $X_n + A_{(n)}, X'_n$, которые на каждом шаге n определяются как высокоточное решение следующей задачи Коши

$$\begin{aligned}\dot{y} = \ddot{x} &= -T_{(n)}^2 x^3 + \varepsilon T_{(n)} y (1 - T_{(n)}^{-2} y^2) = 0 \\ w &= \partial x / \partial A, \quad \dot{r} = \ddot{w} = -T_{(n)}^2 3x^2 w + \varepsilon T_{(n)} r (1 - 3T_{(n)}^{-2} y^2) = 0 \\ z &= \partial x / \partial T \\ \dot{q} = \ddot{z} &= -T_{(n)} x^2 (2x - 3T_{(n)} z) + \varepsilon y (1 + T_{(n)}^{-2} y^2) + \varepsilon T_{(n)} q (1 - 3T_{(n)}^{-2} y^2) = 0\end{aligned}$$

с начальными условиями вида:

$$\begin{aligned}x(0) &= A_{(n)}(\varepsilon), \quad \dot{x}(0) = 0 \\ w(0) &= 1, \quad \dot{w}(0) = 0 \\ z(0) &= \dot{z}(0) = 0\end{aligned}$$

Как видно, краевая задача для x, y не зависит от краевых задач для r, w, q и z . Решение этих дополнительных задач Коши для нахождения введенных функций чувствительности позволяет уточнить значения параметров T и A на каждом шаге итерационной процедуры.

Предложенная итерационная процедура позволяет достичь необходимой заданной точности вычислений.

5. Численные результаты. Представим полученные результаты и сравним их с классическим случаем уравнения Релея с линейной возвращающей силой [17]. Отметим, что в [17] была использована другая процедура решения при которой амплитуда автоколебаний получена не была. Основываясь на численной процедуре, изложенной в данной работе, эта характеристика была получена.

На рис. 1 представлены графики амплитуды $A(\varepsilon)$ и периода $T(\varepsilon)$ автоколебаний при увеличении ε . Верхняя линия на обоих графиках соответствует классическому случаю. Видно, что наличие кубической возвращающей силы резко уменьшает и период, и амплитуду автоколебаний при увеличении коэффициента обратной связи. В классическом случае эти параметры возрастают довольно быстро, и при этом вид кривых имеет ярко выраженный линейный характер. При наличии кубической возвращающей силы значения T и A растут гораздо медленнее, вид кривых не имеет линейного характера и наличествует слабый выгиб кверху.

Отметим, что теперь, имея численные значения T и A , можно получить остальные характеристики колебаний просто проинтегрировав задачу Коши (3.1).

На рис. 2 представлены семейства предельных циклов с шагом по ε равным пяти. Случай с кубической возвращающей силой представлен на рис. 2,а, а классический случай уравнения Релея — на рис. 2,б. Можно отметить, что в классическом случае, как видно на рис. 2, предельный цикл представляет собой эллипс при $\varepsilon = 0$.

При отличном от нуля ε , в классическом случае предельные циклы представляют собой выпуклую кривую, имеющую резкие повороты касательной (типа угловых точек) во втором и четвертом квадрантах. Это связано с практически релейным изменением скорости при достижении колебательной системой наибольшего отклонения. В целом, предельный цикл имеет “ромбовидную” форму.

При наличии кубической возвращающей силы в этих угловых точках появляется новый эффект: скорость достигает максимального значения с значительным запаздыванием по отношению к моменту, когда колебательная система проходит максималь-

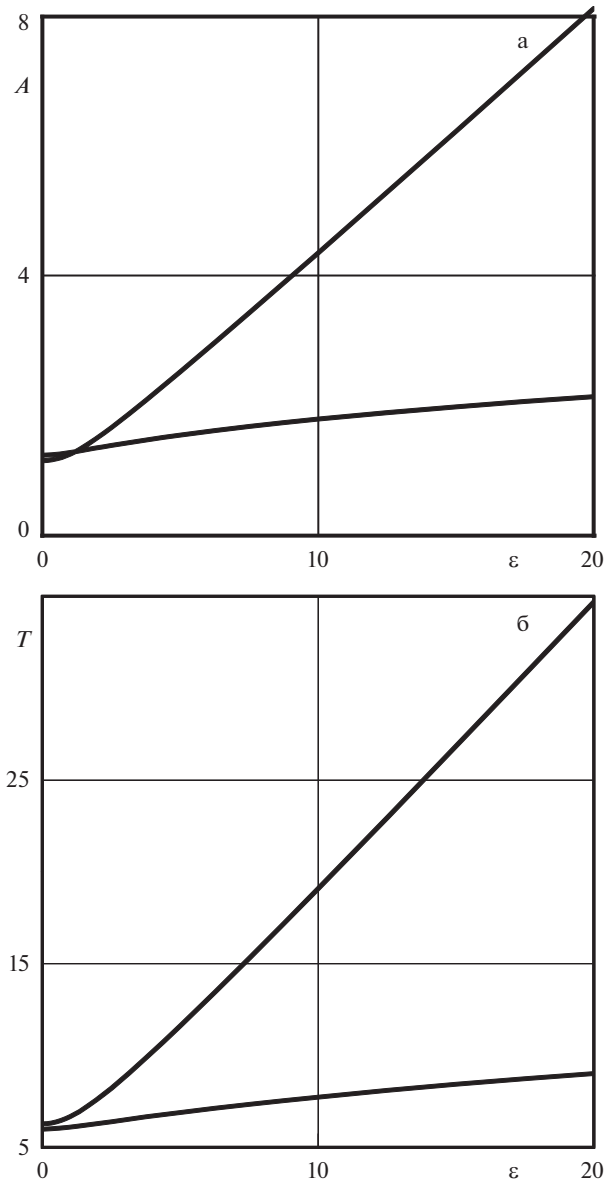


Рис. 1. Амплитуда A и период T автоколебаний для классического уравнения Релея (верхние кривые) и для случая кубической возвращающей силы.

ное отклонение. Наиболее отчетливо этот эффект виден при значениях $\varepsilon \approx 5$. При возрастании ε локальная кривизна в этих точках становится более выраженной.

Также можно отметить появление значительных участков, на которых система движется с почти постоянной скоростью. Из-за этого, в целом, предельный цикл приобретает “квадратный” вид.

Оставшееся общим свойством предельных циклов заключается в том, что около крайних положений колебательной системы происходит резкое изменение скорости.

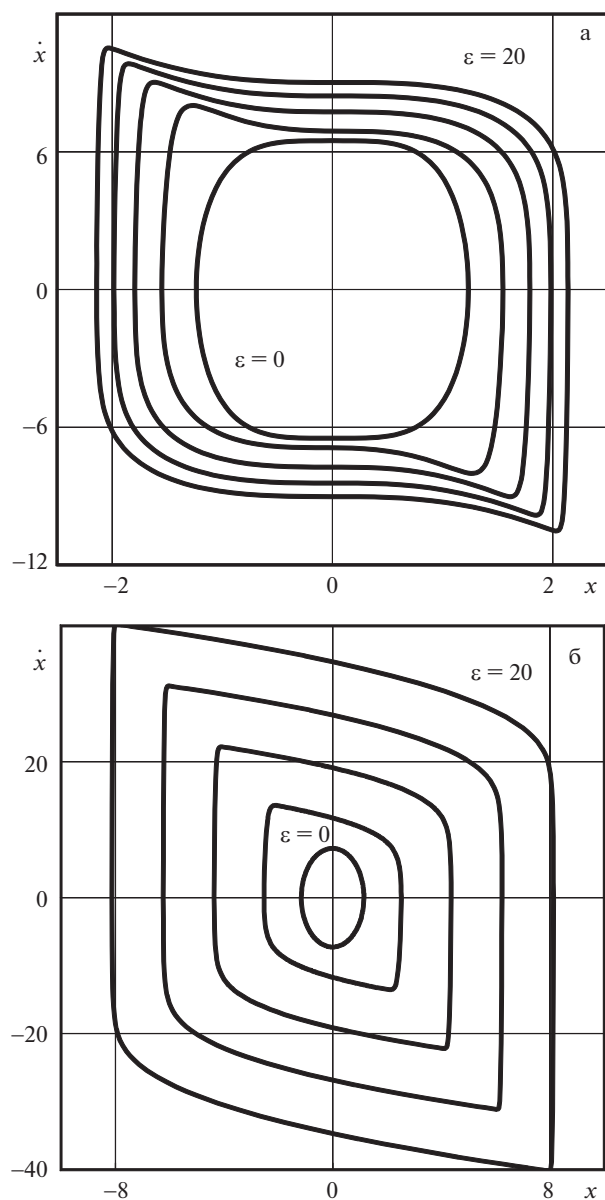


Рис. 2. Предельные циклы автоколебаний для случая кубической возвращающей силы (а) и для классического уравнения Релея (б).

Заключение. Для колебательной системы с механизмом возбуждения как в осциляторе Релея, но с нелинейной (кубической) возвращающей силой построены предельные циклы и вычислены амплитуды и периоды автоколебаний. Задача решена с помощью метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру для широкого диапазона значений коэффициента обратной связи. Предложенная итерационная процедура позволяет достичь заданной точности вычислений. Проведен анализ особен-

ностей предельного цикла, вызванных нелинейной возвращающей силой при увеличении коэффициента самовозбуждения. Полученные результаты сопоставлены с автоколебаниями классического осциллятора Релея с линейной возвращающей силой.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 123021700055-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харкевич А.А. Автоколебания. М.: Гостехиздат, 1953. 171 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
3. Лefшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
6. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
7. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
8. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
9. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
10. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
11. Дородницын А.А. Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 3. С. 313–328.
12. Cartwright M.L. Van der Pol's equation for relaxation oscillations // Contribut. to Theory Nonlin. Oscill. Ann. Math. Studies. 1952. № 29. P. 3–18.
13. Krogdahl W.S. Numerical solutions of the Van der Pol equation // Z. Angew. Math. Phys. 1960. V. 2. № 1. P. 59–63.
14. Urabe M. Numerical study of periodic solutions of Van der Pol's equation // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. Т. 2. С. 367–376.
15. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Автоколебания существенно нелинейной системы // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 42–48.
16. Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 723–741.
17. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Автоколебания осцилляторов Релея и Ван дер Поля при умеренно больших коэффициентах обратной связи // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 273–281.

Self-sustained Oscillations and Limit Cycles in Rayleigh System with Cubic Return Force

S. A. Kumakshev^{a,#}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: kumak@ipmnet.ru*

An oscillatory system with an excitation mechanism as in a Rayleigh oscillator, but with a nonlinear (cubic) returning force, is investigated. Using the accelerated convergence method and the continuation procedure for the parameter, limit cycles are constructed and the amplitudes and periods of self-oscillations are calculated. This is done for a wide range of feedback coefficient values, in which this coefficient is not asymptotically small or large. The proposed iterative procedure allows to achieve the specified accuracy of calculations. The analysis of the features of the limit cycle caused by an increase in the self-excitation co-

efficient is carried out. The results obtained are compared with the self-oscillations of a classical Rayleigh oscillator with a linear returning force.

Keywords: self-oscillations, limit cycle, Rayleigh oscillator

REFERENCES

1. *Kharkevich A.A.* Self-Induced Vibrations. Moscow: Gostekhizdat, 1953. 171 p. (in Russian)
2. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillations. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 915 p. (in Russian)
3. *Lefschetz S.* Differential Equations: Geometric Theory. N.Y.: Wiley, 1957. 390 p.
4. *Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A.* Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Nauka, 1958. 462 p.
5. *Blaquiere A.* Nonlinear System Analysis. N.Y.: Acad. Press, 1966. 408 pp.
6. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Applied Methods in the Vibration Theory. Moscow: Nauka, 1988. 326 p. (in Russian)
7. *Mishchenko E.F., Rozov N.Kh.* Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations. N. Y.: Plenum Press, 1980. 228 p.
8. *Volosov V.M., Morgunov B.I.* Method of Averaging in the Theory of Nonlinear Oscillatory Systems. Moscow: Izd-vo MGU, 1971. 507 p. (in Russian)
9. *Akulenko L.D.* Asymptotic Methods of Optimal Control. Moscow: Nauka, 1987. 365 p. (in Russian)
10. *Malkin I.G.* Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Gostekhizdat, 1956. 491 p. (in Russian)
11. *Dorodnicyn A.A.* Asymptotic solution of Van Der Pol's equation // PMM, 1947, vol. 11, no. 3, pp. 313–328.
12. *Cartwright M.L.* Van der Pol's equation for relaxation oscillations // Contribut. to Theory Nonlin. Oscill. Ann. Math. Studies, 1952, no. 29, pp. 3–18.
13. *Krogdahl W.S.* Numerical solutions of the Van der Pol equation // Z. Angew. Math. Phys., 1960, vol. 2, no. 1, pp. 59–63.
14. *Urabe M.* Numerical study of periodic solutions of van der Pol's equation. // in: Tr. Mezhdunarod. Simpoz. Nelinejnym Kolebaniyam, Mezhdunarod. Soyuz. Teor. Prikl. Mekh., Kiev, 1961, 1963, no. 2, pp. 367–375.
15. *Akulenko L.D., Korovina L.I., Nesterov S.V.* Self-induced vibrations in an essentially nonlinear system // Mech. Solids, 2002, vol. 37, no. 3, pp. 36–41.
16. *Akulenko L.D., Kumakshev S.A., Nesterov S.V.* Effective numerical-analytical solution of isoperimetric variational problems of mechanics by an accelerated convergence method // JAMM, 2002, vol. 66, no. 5, pp. 693–708.
17. *Akulenko L.D., Korovina L.I., Kumakshev S.A., Nesterov S.V.* Self-sustained oscillations of Rayleigh and Van der Pol oscillators with moderately large feedback factors // JAMM, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 241–248.