ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2019, № 2, с. 58–65

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 519.6+521.1+004.94

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ДВУХПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

А. Н. Прокопеня[a],*, М. Дж. Минглибаев[b,c], С. А. Шомшекова[b,c]

[a] *Варшавский университет естественных наук, Варшава, ул. Новоурсыновска, 159, 02-776 Польша*

[b] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, 050040 Казахстан*

[c] *Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы, Обсерватория, 23, 050020 Казахстан*

* *E-mail: Alexander_prokopenya@sggw.pl*

Поступила в редакцию 27.08.2018 г.
После доработки 27.08.2018 г.
Принята к публикации 20.09.2018 г.

Рассматривается классическая двухпланетная задача трех тел переменной массы в общем случае, когда массы тел изменяются неизотропно с различными скоростями. Получены дифференциальные уравнения движения в оскулирующих элементах апериодического движения по квазиконическим сечениям. Обсуждается алгоритм вычисления возмущающей функции в виде степенных рядов по малым параметрам и получение дифференциальных уравнений, определяющих вековые возмущения орбитальных элементов. Все необходимые символьные вычисления выполняются с использованием системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

DOI: 10.1134/S0132347419020092

I. ВВЕДЕНИЕ

Классическая проблема трех тел является базовой моделью небесной механики и имеет многочисленные приложения (см., напр., [1, 2]). В простейшем случае она описывает движение трех материальных точек постоянной массы, взаимодействующих друг с другом в соответствии с законом всемирного тяготения. Дифференциальные уравнения, определяющие движение тел, могут быть легко выписаны, но получить общее решение этих уравнений в виде конечных аналитических выражений до сих пор не удалось. Некоторые классы решений можно построить в виде степенных и тригонометрических рядов (см., напр., [3–5]). Построение и исследование таких решений обычно связано с выполнением весьма громоздких символьных вычислений, что стимулировало разработку соответствующих аналитических и численно-аналитических методов и алгоритмов [6–14]. Эти методы успешно используются при исследовании более сложных моделей [15–22].

Следует отметить, что реальные небесные тела не являются стационарными и такие их характеристики как масса, размеры, форма и внутренняя структура могут с течением времени изменяться (см. [23–25]). Учет зависимости параметров системы от времени существенно усложняет модель и даже задача двух тел переменной массы, общее решение которой при постоянных массах хорошо известно, допускает аналитическое решение только в специальных случаях (см. [26, 28]).

Проблема трех тел является неинтегрируемой даже при постоянных массах и для ее исследования обычно применяют теорию возмущений, используя в качестве нулевого приближения точное решение задачи двух тел. Такой подход оказался весьма успешным, например, при исследовании движения планеты или спутника в системе звезда—планета или двойная звезда [2, 29–31]. Поскольку массы небесных тел с течением времени изменяются [23, 24, 26, 27], представляет интерес исследовать влияние таких изменений на орбитальные параметры в рамках задачи трех тел. Специальный случай этой задачи, когда массы двух тел изменяются изотропно одинаковым образом, рассмотрен в работах [32–34].

Целью данной работы является исследование проблемы трех тел с переменными массами в общем случае, когда массы тел изменяются неизотропно с различными скоростями. Хотя уравнения движения системы получены в общем виде и могут быть использованы при исследовании проблемы трех тел с переменными массами в различных постановках, мы ограничиваемся наиболее изученным случаем двухпланетной проблемы трех тел [27, 33]. Основное внимание уделяется обсуждению вычислительных задач, возникающих при получении разложения возмущающей функции в степенной ряд по малым параметрам и определении эволюционных уравнений, для решения которых лучше всего использовать системы компьютерной алгебры. В данной работе все символьные вычисления выполняются с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica* [35], которая имеет удобный интерфейс и позволяет легко комбинировать различные виды вычислений. Поскольку для использования системы *Mathematica* требуется лицензия, для выполнения описанных в работе вычислений можно воспользоваться и другой системой компьютерной алгебры в зависимости от предпочтений исследователей.

II. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Предполагая, что наиболее массивное тело P_0 находится в начале координат, и используя относительные декартовы координаты $\vec{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, уравнения движения тел P_1, P_2 можно записать в виде (см. [21, 26, 27])

$$\ddot{\vec{R}}_1 + G(m_0 + m_1)\frac{\vec{R}_1}{R_1^3} - \frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1}\vec{R}_1 = \vec{\nabla}_{\vec{R}_1} W_1, \tag{1}$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 + G(m_0 + m_2)\frac{\vec{R}_2}{R_2^3} - \frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2}\vec{R}_2 = \vec{\nabla}_{\vec{R}_2} W_2, \tag{2}$$

где $m_0 = m_0(t)$, $m_1 = m_1(t)$, $m_2 = m_2(t)$ – массы тел P_0, P_1 и P_2 соответственно, G – гравитационная постоянная,

$$R_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2},$$
$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}, \quad (i, j = 1, 2),$$

а возмущающие функции W_1, W_2, приводящие к неинтегрируемости уравнений (1), (2), имеют вид (см. [26, 27])

$$W_1 = Gm_2\left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}{R_2^3}\right) - \frac{\ddot{\gamma}_1}{2\gamma_1}\vec{R}_1^2 + \vec{F}_1 \cdot \vec{R}_1,$$

$$W_2 = Gm_1\left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}{R_1^3}\right) - \frac{\ddot{\gamma}_2}{2\gamma_2}\vec{R}_2^2 + \vec{F}_2 \cdot \vec{R}_2.$$

Точка над символом в уравнениях (1), (2) означает полную производную соответствующей функции по времени. Дважды непрерывно дифференцируемые функции $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ определяются соотношениями

$$\gamma_1(t) = \frac{m_{00} + m_{10}}{m_0(t) + m_1(t)}, \quad \gamma_2(t) = \frac{m_{00} + m_{20}}{m_0(t) + m_2(t)},$$

где $m_{00} = m_0(0)$, $m_{10} = m_1(0)$, $m_{20} = m_2(0)$ – значения масс тел в начальный момент времени. Реактивные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, которые возникают вследствие неизотропности изменения массы тел, можно представить в виде

$$\vec{F}_i = \frac{\dot{m}_i}{m_i}\vec{V}_i - \frac{\dot{m}_0}{m_0}\vec{V}_0, \quad (i = 1, 2), \tag{3}$$

где относительные скорости $\vec{V}_j$, $(j = 0, 1, 2)$ частиц, покидающих тело P_j или осаждающихся на нем, являются заданными функциями времени. Законы изменения масс во времени $m_j(t)$, $(j = 0, 1, 2)$ определяются на основе наблюдений за движением небесных тел и также считаются известными. Потому далее будем считать, что реактивные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ являются заданными функциями времени.

Поскольку получить общее решение уравнений (1), (2) не представляется возможным, для исследования динамики системы воспользуемся теорией возмущений. Отметим, что в случае $W_1 = W_2 = 0$ оба уравнения (1), (2) являются интегрируемыми и определяют движение тел P_1 и P_2 вокруг тела P_0 по квазиконическим сечениям (см. [26]). Соответствующие точные решения, которые будем использовать в качестве нулевого приближения, можно представить в виде

$$X_j = \gamma_j\rho_j(\cos u_j \cos\Omega_j - \sin u_j \sin\Omega_j \cos i_j),$$
$$Y_j = \gamma_j\rho_j(\cos u_j \sin\Omega_j + \sin u_j \cos\Omega_j \cos i_j),$$
$$Z_j = \gamma_j\rho_j \sin u_j \sin i_j, \tag{4}$$

где $u_j = v_j + \omega_j$,

$$\rho_j = \frac{a_j(1 - e_j^2)}{1 + e_j \cos v_j}, \quad (j = 1, 2), \tag{5}$$

а параметры a_j, e_j, i_j, ω_j, Ω_j, определяемые из начальных условий движения, соответствуют известным из классической задачи двух тел кеплеровским орбитальным элементам и являются аналогами большой полуоси, эксцентриситета, наклонения, долготы перицентра и долготы восходящего узла невозмущенной квазиэллиптической орбиты каждого из тел P_1 и P_2 (см. [1, 2, 26, 36]). Истинная аномалия v_j характеризует положение тела на орбите и определяется уравнением

$$\begin{aligned}\int_0^{v_j} \frac{dv_j}{(1 + e_j\cos v_j)^2} &= \frac{1}{(1 - e_j^2)^{3/2}}(E_j - e_j\sin E_j) = \\ &= \frac{M_j}{(1 - e_j^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{K_{j0}}}{a_j^{3/2}(1 - e_j^2)^{3/2}}(\Phi_j(t) - \Phi_j(\tau_j)),\end{aligned} \tag{6}$$

где τ_j – время прохождения тела P_j через перицентр, M_j – средняя аномалия,

$$\Phi_j(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma_j^2(t)}, \quad K_{j0} = G(m_{00} + m_{j0}), \quad (j = 1, 2),$$

а эксцентрическая аномалия E_j связана с истинной аномалией соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{v_j}{2} = \sqrt{\frac{1 + e_j}{1 - e_j}}\operatorname{tg}\frac{E_j}{2}. \tag{7}$$

Легко видеть, что при заданных орбитальных параметрах a_j, e_j, i_j, ω_j, Ω_j, τ_j каждого из тел P_1 и P_2, а также известных функциях $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, которые зависят от законов изменения масс всех трех тел, уравнение (6) позволяет найти средние аномалии M_j как функции времени. Решая затем уравнение Кеплера,

$$E_j - e_j \sin E_j = M_j, \tag{8}$$

находим эксцентрические аномалии E_j и, используя соотношение (7), вычисляем истинные аномалии v_j. В результате соотношения (4), (5) позволяют вычислить относительные декартовы координаты тел P_1 и P_2 и полностью описать их невозмущенное движение.

Следует отметить, что в случае постоянных масс, когда $\gamma_j(t) \equiv 1$, уравнения (4)–(7) определяют движение тел P_1 и P_2 вокруг тела P_0 по коническим сечениям. Наличие в выражениях (4) масштабного множителя $\gamma_j(t)$, зависящего от времени, приводит к деформации конических сечений и непериодичности движения. Поэтому говорят, что решения уравнений движения (1), (2) в случае $W_1 = W_2 = 0$ описывают апериодическое движение тел по квазиконическим сечениям (см. [26]).

В рассматриваемом случае двухпланетной задачи трех тел предполагается, что масса центрального тела P_0 значительно превышает массы тел P_1 и P_2. Потому их орбиты будут квазиконическими сечениями, определяемыми уравнениями (4)–(7), с малыми отклонениями, которые возникают вследствие взаимного гравитационного притяжения тел P_1 и P_2. Кроме того, изменение массы тел и возникающие при этом реактивные силы также будут влиять на изменение орбитальных параметров. Все эти факторы определяются возмущающими функциями $W_1 \neq 0$ и $W_2 \neq 0$, градиенты которых находятся в правых частях уравнений (1), (2). Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие временную эволюцию орбитальных параметров, удобно перейти к новым каноническим переменным, известным как элементы Делоне и переписать уравнения (1), (2) в канонической форме (см. [2, 26, 36]). Используя решение (4) и выполняя стандартные, но довольно громоздкие символьные преобразования (см., напр., [34]), определяем три пары канонически сопряженных координат и импульсов (l_j, L_j), (g_j, G_j), (h_j, H_j) для каждого из тел P_1 и P_2, которые связаны с аналогами кеплеровских элементов орбиты соотношениями

$$l_j = M_j, \quad L_j = \sqrt{K_{j0}a_j},$$
$$g_j = \omega_j, \quad G_j = \sqrt{K_{j0}a_j(1 - e_j^2)},$$
$$h_j = \Omega_j, \quad H_j = \sqrt{K_{j0}a_j(1 - e_j^2)}\cos i_j. \tag{9}$$

Соответствующие функции Гамильтона имеют вид

$$\mathscr{H}_j = -\frac{K_{j0}^2}{2\gamma_j^2 L_j^2} - W_j, \quad (j = 1, 2), \tag{10}$$

где возмущающие функции W_1, W_2 были введены ранее в уравнениях (1), (2).

Далее будем предполагать, что во время движения выполняются условия $i_j \ll 1$ и $e_j \ll 1$, т.е. тела движутся вблизи экваториальной плоскости по траекториям с малым эксцентриситетом. В этом приближении уравнения движения тел можно упростить, выбирая новые канонические переменные таким образом, чтобы во время движения некоторые из них оставались малыми величинами, и заменяя возмущающие функции их разложениями в степенные ряды по малым параметрам. Такие переменные, образующие три пары канонически сопряженных координат и импульсов (λ_j, Λ_j), (η_j, ξ_j), (q_j, p_j), известны в литературе как вторая система элементов Пуанкаре (см. [2, 26, 36]) и определяются через элементы Делоне (9) соотношениями

$$\lambda_j = l_j + g_j + h_j, \quad \Lambda_j = L_j,$$
$$\eta_j = \sqrt{2\Gamma_j}\sin\pi_j, \quad \xi_j = \sqrt{2\Gamma_j}\cos\pi_j,$$
$$q_j = \sqrt{2Z_j}\sin z_j, \quad p_j = \sqrt{2Z_j}\cos z_j, \tag{11}$$

где

$$\Gamma_j = \Lambda_j(1 - \sqrt{1 - e_j^2}),$$
$$Z_j = \Lambda_j\sqrt{1 - e_j^2}(1 - \cos i_j),$$
$$\pi_j = -g_j - h_j, \quad z_j = -h_j. \tag{12}$$

При этом функции Гамильтона сохраняют вид (10), а уравнения Гамильтона принимают вид

$$\dot{\lambda}_j = \frac{\partial \mathscr{H}_j}{\partial \Lambda_j} = \frac{K_{j0}^2}{\gamma_j^2 \Lambda_j^3} - \frac{\partial W_j}{\partial \Lambda_j}, \quad \dot{\Lambda}_j = -\frac{\partial \mathscr{H}_j}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial W_j}{\partial \lambda_j},$$

$$\dot{\eta}_j = \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial \xi_j} = -\frac{\partial W_j}{\partial \xi_j}, \quad \dot{\xi}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial \eta_j} = \frac{\partial W_j}{\partial \eta_j}, \tag{13}$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial p_j} = -\frac{\partial W_j}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial W_j}{\partial q_j}.$$

Отметим, что возмущающие функции W_1, W_2 в уравнениях (13) должны быть выражены через новые канонические переменные.

III. РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Уравнения движения (13) показывают, что в отсутствие возмущений ($W_1 = W_2 = 0$) канонические переменные Пуанкаре $\Lambda_j, \eta_j, \xi_j, q_j, p_j$, а также орбитальные элементы a_j, e_j, i_j, ω_j, Ω_j, остаются постоянными, а средняя долгота λ_j и средняя аномалия M_j являются возрастающими функциями времени (см. (6), (9), (11)). Гравитационное взаимодействие тел P_1 и P_2, а также изменения масс всех трех тел, описываемые возмущающими функциями W_1, W_2, приводят к изменениям орбитальных параметров. Для исследования их зависимости от времени возмущающие функции обычно заменяют их разложениями в ряды по малым параметрам с требуемой точностью (см. [2]), что позволяет найти приближенные решения уравнений (13). Следует отметить, что разложение возмущающих функций W_1, W_2 в ряды требует выполнения довольно громоздких символьных вычислений и представляет собой нетривиальную задачу, которая весьма эффективно решается при помощи систем компьютерной алгебры.

Напомним, что в рассматриваемом случае эксцентриситеты e_j и наклонения i_j орбит являются малыми величинами. Соответственно малыми величинами будут и две пары переменных Пуанкаре (η_j, ξ_j), (q_j, p_j). Действительно, из соотношений (11), (12) получаем

$$e_j^2 = \frac{\eta_j^2 + \xi_j^2}{\Lambda_j}\left(1 - \frac{\xi_j^2 + \xi_j^2}{4\Lambda_j}\right), \tag{14}$$

$$\frac{p_j^2 + q_j^2}{2\Lambda_j} = 1 - \cos i_j = 2\sin^2\frac{i_j}{2}. \tag{15}$$

Таким образом, при $e_j \ll 1$, $i_j \ll 1$ переменные η_j, ξ_j и эксцентриситет e_j, а также переменные q_j, p_j и наклонение i_j являются величинами одного порядка. Выполняя в (11), (12), (14), (15) необходимые разложения с точностью до второго порядка по η_j, ξ_j, q_j и p_j включительно, получаем следующие соотношения:

$$e_j \cos\pi_j = \frac{\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}}, \quad e_j \sin\pi_j = \frac{\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}}, \tag{16}$$

$$\sin i_j \cos z_j = \frac{p_j}{\sqrt{\Lambda_j}}, \quad \sin i_j \sin z_j = \frac{q_j}{\sqrt{\Lambda_j}}. \tag{17}$$

При $e_j \ll 1$ решение уравнения Кеплера (8) также можно записать в виде сходящегося степенного ряда (см. [2]), что с точностью до второго порядка по e_j дает

$$E_j = M_j + e_j \sin M_j + \frac{e^2}{2}\sin(2M_j) + \ldots. \tag{18}$$

Принимая во внимание соотношения $M_j = \lambda_j + \pi_j$, $\omega_j = z_j - \pi_j$, $\Omega_j = -z_j$ (см. (9), (11), (12)) и используя разложения (16)–(18), выражения (4) для декартовых координат тел P_1 и P_2 с точностью до второго порядка по переменным Пуанкаре η_j, ξ_j, q_j, p_j получаем в виде

$$\begin{aligned}
\frac{X_j}{\gamma_j a_j} &= \cos\lambda_j - \frac{\xi_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}(3 - \cos(2\lambda_j)) - \\
&- \frac{\eta_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}\sin(2\lambda_j) + \frac{3\xi_j^2}{8\Lambda_j}(\cos(3\lambda_j) - \cos\lambda_j) - \\
&- \frac{\xi_j\eta_j}{4\Lambda_j}(3\sin(3\lambda_j) + \sin\lambda_j) - \frac{\eta_j^2}{8\Lambda_j}(3\cos(3\lambda_j) + \\
&+ 5\cos\lambda_j) - \frac{p_j q_j}{2\Lambda_j}\sin\lambda_j - \frac{q_j^2}{2\Lambda_j}\cos\lambda_j, \\
\frac{Y_j}{\gamma_j a_j} &= \sin\lambda_j + \frac{\eta_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}(3 + \cos(2\lambda_j)) + \\
&+ \frac{\xi_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}\sin(2\lambda_j) - \frac{3\eta_j^2}{8\Lambda_j}(\sin(3\lambda_j) + \sin\lambda_j) + \\
&+ \frac{\xi_j\eta_j}{4\Lambda_j}(3\cos(3\lambda_j) - \cos\lambda_j) + \frac{\xi_j^2}{8\Lambda_j}(3\sin(3\lambda_j) - \\
&- 5\sin\lambda_j) - \frac{p_j q_j}{2\Lambda_j}\cos\lambda_j - \frac{p_j^2}{2\Lambda_j}\sin\lambda_j, \\
\frac{Z_j}{\gamma_j a_j} &= \frac{p_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\sin\lambda_j + \frac{q_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\cos\lambda_j + \\
&+ \frac{\xi_j p_j}{2\Lambda_j}\sin(2\lambda_j) - \frac{\xi_j q_j}{2\Lambda_j}(3 - \cos(2\lambda_j)) + \\
&+ \frac{\eta_j p_j}{2\Lambda_j}(3 + \cos(2\lambda_j)) - \frac{\eta_j q_j}{2\Lambda_j}\sin(2\lambda_j).
\end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что использование встроенной в систему *Mathematica* функции *Series* (см. [35]) существенно упрощает вычисление разложений (19). Поскольку каждая из функций (4) разлагается в ряд по четырем переменным η_j, ξ_j, p_j, q_j в окрестности точки $\eta_j = \xi_j = p_j = q_j = 0$, при выполнении вычислений удобно воспользоваться следующим приемом: добавляем множитель ε у каждой из четырех переменных и выполняем разложение функции по ε в окрестности нуля с точностью до второго порядка. Соответствующая команда в системе *Mathematica* имеет вид:

$$Series[f[\varepsilon\eta, \varepsilon\xi, \varepsilon p, \varepsilon q], \{\varepsilon, 0, 2\}] \,//\, Normal.$$

В результате получаем следующее разложение:

$$\begin{gathered} f[0,0,0,0] + \varepsilon(qf^{(0,0,0,1)}[0,0,0,0] + \\ + pf^{(0,0,1,0)}[0,0,0,0] + \xi f^{(0,1,0,0)}[0,0,0,0] + \\ + \eta f^{(1,0,0,0)}[0,0,0,0]) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(q^2 f^{(0,0,0,2)}[0,0,0,0] + \\ + 2pqf^{(0,0,1,1)}[0,0,0,0] + p^2 f^{(0,0,2,0)}[0,0,0,0] + \\ + 2q\xi f^{(0,1,0,1)}[0,0,0,0] + 2p\xi f^{(0,1,1,0)}[0,0,0,0] + \\ + \xi^2 f^{(0,2,0,0)}[0,0,0,0] + 2q\eta f^{(1,0,0,1)}[0,0,0,0] + \\ + 2p\eta f^{(1,0,1,0)}[0,0,0,0] + 2\eta\xi f^{(1,1,0,0)}[0,0,0,0] + \\ + \eta^2 f^{(2,0,0,0)}[0,0,0,0]). \end{gathered}$$

Полагая $\varepsilon = 1$, получаем искомый полином второй степени, причем функция *Series* используется только один раз, а степень полинома определяется точностью разложения по ε.

Применение функции *Series* позволяет также получить следующие выражения, которые будут использованы при вычислении разложений возмущающих функций W_1 и W_2:

$$\begin{gathered} \frac{R_j^2}{\gamma_j^2 a_j^2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{\Lambda_j}}(\eta_j \sin\lambda_j - \xi_j \cos\lambda_j) + \\ + \frac{\eta_j^2}{2\Lambda_j}(3 + \cos(2\lambda_j)) + \frac{\eta_j\xi_j}{\Lambda_j}\sin(2\lambda_j) + \\ + \frac{\xi_j^2}{2\Lambda_j}(3 - \cos(2\lambda_j)), \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} \frac{\gamma_j^3 a_j^3}{R_j^3} = 1 - \frac{3\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\sin\lambda_j + \frac{3\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\cos\lambda_j + \\ + \frac{3\eta_j^2}{2\Lambda_j}(1 - 3\cos(2\lambda_j)) - \frac{9\eta_j\xi_j}{\Lambda_j}\sin(2\lambda_j) + \\ + \frac{3\xi_j^2}{2\Lambda_j}(1 - 3\cos(2\lambda_j)), \quad (j = 1,2). \end{gathered} \tag{21}$$

Аналогичным образом вычисляется разложение выражения $1/R_{12}$, которое описывает возмущения, связанные с гравитационным взаимодействием тел P_1 и P_2. Поскольку получаемое выражение более громоздко, мы его не приводим. Отметим только, что в результате получается многочлен второго порядка относительно переменных Пуанкаре η_j, ξ_j, q_j, p_j, коэффициенты которого являются периодическими функциями средних долгот λ_1, λ_2 и представляют собой рациональные выражения, в числителях которых содержатся тригонометрические функции $\sin(k\lambda_j)$, $\cos(k\lambda_j)$, $\sin(k\lambda_1 \pm n\lambda_2)$, $\cos(k\lambda_1 \pm n\lambda_2)$, $(k, n = 1, 2, 3)$, а знаменатели содержат выражения Δ_0, Δ_0^3, Δ_0^5, где

$$\Delta_0 = (1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda_1 - \lambda_2))^{1/2},$$

и введен параметр

$$\alpha = \frac{\gamma_1 a_1}{\gamma_2 a_2} < 1.$$

Ограничение на величину параметра α является следствием предположения, что траектория планеты P_1 располагается внутри траектории планеты P_2, т.е. в любой момент времени выполняется условие $R_1 < R_2$.

Поскольку Δ_0 является периодической функцией параметра $(\lambda_1 - \lambda_2)$, имеют место следующие разложения в ряды Фурье (см. [2]):

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cos(k(\lambda_1 - \lambda_2)), \\ \frac{\gamma_1\gamma_2 a_1 a_2}{\Delta_0^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \cos(k(\lambda_1 - \lambda_2)), \\ \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2 a_1^2 a_2^2}{\Delta_0^5} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cos(k(\lambda_1 - \lambda_2)), \end{gathered} \tag{22}$$

причем коэффициенты A_k, B_k, C_k связаны между собой рекуррентными соотношениями и выражаются через два коэффициента A_0 и A_1, которые определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi a_2 \gamma_2}\int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\lambda)^{1/2}} = \\ &= \frac{4}{\pi a_2\gamma_2(1 + \alpha)} K\left(\frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}\right), \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi a_2 \gamma_2} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda d\lambda}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda)^{1/2}} =$$
$$= \frac{2}{\pi a_2 \gamma_2 \alpha (1+\alpha)} \left((1+\alpha^2) K\left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\right) - \right. \tag{23}$$
$$\left. - (1+\alpha)^2 E\left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\right)\right).$$

Функции $K(4\alpha/(1+\alpha)^2)$ и $E(4\alpha/(1+\alpha)^2)$ в (23) обозначают соответственно эллиптические интегралы первого и второго рода.

Используя выражения (19)–(22) и выполняя необходимые символьные вычисления, мы получаем разложение возмущающих функций W_1 и W_2 в ряды по степеням переменных Пуанкаре η_j, ξ_j, q_j, p_j, $(j = 1,2)$ с точностью до второго порядка включительно. Полученное выражение весьма громоздко и потому мы его не приводим. Отметим только, что коэффициенты полученного полинома содержат синусы и косинусы переменных λ_1 и λ_2, которые представляют собой быстро изменяющиеся величины. Поскольку нас интересует влияние изменений масс тел на эволюцию орбитальных параметров тел P_1 и P_2 на больших интервалах времени, короткопериодические возмущения, связанные с движением тел P_1, P_2, следует устранить путем усреднения возмущающих функций по средним долготам λ_1 и λ_2 (см. [2, 29]). Фактически это означает, что в полученных разложениях следует оставить только члены, не зависящие от λ_1 и λ_2. При этом предполагается, что в разложениях возмущающих функций отсутствуют резонансные члены, т.е. отсутствует соизмеримость средних движений тел P_1 и P_2. В результате получим следующие вековые части возмущающих функций:

$$\begin{aligned}
W_1^{(sec)} &= Gm_2 \left(\frac{A_0}{2} + \Pi_{11} \frac{\eta_1^2 + \xi_1^2}{2\Lambda_1} + \right. \\
&+ \Pi_{12} \frac{\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} + \Pi_{22} \frac{\eta_2^2 + \xi_2^2}{2\Lambda_2} - \\
&\left. - B_1 \left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{8\Lambda_1} - \frac{p_1p_2 + q_1q_2}{4\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} + \frac{p_2^2 + q_2^2}{8\Lambda_2} \right) \right) - \\
&- \frac{\ddot{\gamma}_1 \Lambda_1^4}{2\gamma_1 K_{10}^2} \left(1 + \frac{3}{2\Lambda_1} (\xi_1^2 + \eta_1^2) \right) + \\
&+ \frac{3\gamma_1 \Lambda_1^2}{2K_{10}} \left(-F_{1x} \frac{\xi_1}{\sqrt{\Lambda_1}} + F_{1y} \frac{\eta_1}{\sqrt{\Lambda_1}} + F_{1z} \frac{p_1\eta_1 - q_1\xi_1}{\Lambda_1} \right),
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
W_2^{(sec)} &= Gm_1 \left(\frac{A_0}{2} + \Pi_{11} \frac{\eta_1^2 + \xi_1^2}{2\Lambda_1} + \right. \\
&+ \Pi_{12} \frac{\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} + \Pi_{22} \frac{\eta_2^2 + \xi_2^2}{2\Lambda_2} - \\
&\left. - B_1 \left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{8\Lambda_1} - \frac{p_1p_2 + q_1q_2}{4\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} + \frac{p_2^2 + q_2^2}{8\Lambda_2} \right) \right) - \\
&- \frac{\ddot{\gamma}_2 \Lambda_2^4}{2\gamma_2 K_{20}^2} \left(1 + \frac{3}{2\Lambda_2} (\xi_2^2 + \eta_2^2) \right) + \\
&+ \frac{3\gamma_2 \Lambda_2^2}{2K_{20}} \left(-F_{2x} \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2}} + F_{2y} \frac{\eta_2}{\sqrt{\Lambda_2}} + F_{2z} \frac{p_2\eta_2 - q_2\xi_2}{\Lambda_2} \right),
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\Pi_{11} = -\frac{3\alpha}{4} B_0 - \frac{1}{2} B_1 + \frac{15 + 6\alpha^2}{8} C_0 - \frac{3\alpha}{2} C_1 - \frac{9}{8} C_2,$$

$$\Pi_{12} = \frac{1}{8}(9B_0 + B_2) - \frac{9(1+\alpha^2)}{8\alpha} C_0 + \\ + \frac{21}{16} C_1 + \frac{3(1+\alpha^2)}{8\alpha} C_2 + \frac{3}{16} C_3,$$

$$\Pi_{22} = -\frac{3}{4\alpha} B_0 - \frac{1}{2} B_1 + \frac{15\alpha^2 + 6}{8\alpha^2} C_0 - \frac{3}{2\alpha} C_1 - \frac{9}{8} C_2.$$

IV. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Эволюционные уравнения, определяющие поведение орбитальных параметров на больших интервалах времени, получаются из уравнений движения (13), если вместо возмущающих функций W_1, W_2 подставить их усредненные разложения (24), (25). Поскольку $W_1^{(sec)}$, $W_2^{(sec)}$ не зависят от координат λ_1, λ_2, соответствующие им канонические импульсы Λ_1, Λ_2, а также большие полуоси $a_j = \Lambda_j^2 / K_{j0}$, $(j = 1,2)$, не зависят от времени.

Вековые возмущения элеметнов Пуанкаре η_j, ξ_j, q_j, p_j $(j = 1,2)$ определяются как решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\eta}_1 = -\frac{\partial W_1^{(sec)}}{\partial \xi_1} = -\left(\frac{Gm_2 \Pi_{11}}{\Lambda_1} - \frac{3\ddot{\gamma}_1 \Lambda_1^3}{2\gamma_1 K_{10}^2} \right) \xi_1 - \\ - \frac{Gm_2 \Pi_{12}}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \xi_2 + \frac{3\gamma_1 \Lambda_1^{3/2}}{2K_{10}} F_{1x} + \frac{3\gamma_1 \Lambda_1}{2K_{10}} F_{1z} q_1,$$

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial W_1^{(sec)}}{\partial \eta_1} = \left(\frac{Gm_2 \Pi_{11}}{\Lambda_1} - \frac{3\ddot{\gamma}_1 \Lambda_1^3}{2\gamma_1 K_{10}^2} \right) \eta_1 + \\ + \frac{Gm_2 \Pi_{12}}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \eta_2 + \frac{3\gamma_1 \Lambda_1^{3/2}}{2K_{10}} F_{1y} + \frac{3\gamma_1 \Lambda_1}{2K_{10}} F_{1z} p_1,$$

$$\dot{\eta}_2 = -\frac{\partial W_2^{(sec)}}{\partial \xi_2} = -\left(\frac{Gm_1\Pi_{22}}{\Lambda_2} - \frac{3\ddot{\gamma}_2\Lambda_2^3}{2\gamma_2 K_{20}^2}\right)\xi_2 - $$
$$ - \frac{Gm_1\Pi_{12}}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\xi_1 + \frac{3\gamma_2\Lambda_2^{3/2}}{2K_{20}}F_{2x} + \frac{3\gamma_2\Lambda_2}{2K_{20}}F_{2z}q_2,$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial W_2^{(sec)}}{\partial \eta_2} = \left(\frac{Gm_1\Pi_{22}}{\Lambda_2} - \frac{3\ddot{\gamma}_2\Lambda_2^3}{2\gamma_2 K_{20}^2}\right)\eta_2 + $$
$$ + \frac{Gm_1\Pi_{12}}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\eta_1 + \frac{3\gamma_2\Lambda_2^{3/2}}{2K_{20}}F_{2y} + \frac{3\gamma_2\Lambda_2}{2K_{20}}F_{2z}p_2,$$

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial W_1^{(sec)}}{\partial p_1} = \frac{Gm_2B_1}{4\sqrt{\Lambda_1}}\left(\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right) - \frac{3\gamma_1\Lambda_1}{2K_{10}}F_{1z}\eta_1,$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial W_1^{(sec)}}{\partial q_1} = -\frac{Gm_2B_1}{4\sqrt{\Lambda_1}}\left(\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1}} - \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right) - \frac{3\gamma_1\Lambda_1}{2K_{10}}F_{1z}\xi_1,$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{Gm_1B_1}{4\sqrt{\Lambda_2}}\left(\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right) - \frac{3\gamma_2\Lambda_2}{2K_{20}}F_{2z}\eta_2,$$

$$\dot{p}_2 = \frac{Gm_1B_1}{4\sqrt{\Lambda_2}}\left(\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1}} - \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right) - \frac{3\gamma_2\Lambda_2}{2K_{20}}F_{2z}\xi_2.$$

Напомним, что массы тел $m_j(t)$, $(j = 0,1,2)$ и реактивные силы $(F_{jx}(t), F_{jy}(t), F_{jz}(t))$, $(j = 1, 2)$ являются функциями времени. Следовательно, зависят от времени и отношения масс $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, а также параметр $\alpha(t)$ и коэффициенты Лапласа B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2, C_3. Поэтому коэффициенты полученной системы из восьми линейных дифференциальных уравнений являются довольно сложными функциями от времени, и записать общее решение этой системы в символьной форме не представляется возможным. Однако эту систему можно решать численно, задавая различные законы изменения масс и реактивные силы и исследуя их влияние на вековые возмущения орбитальных элементов.

Отметим также, что вычисление правой части первого дифференциального уравнения системы (13), определяеющего зависимость от времени средних долгот λ_1, λ_2, которое принимает вид

$$\dot{\lambda}_j = \frac{K_{j0}^2}{\gamma_j^2\Lambda_j^3} - \frac{\partial W_j^{(sec)}}{\partial \Lambda_j},$$

требует весьма громоздких символьных вычислений, поскольку возмущающие функции (24), (25) зависят от импульсов Λ_j как явным образом, так и посредством зависимости от Λ_j параметра α и коэффициентов Лапласа B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2, C_3. Тем не менее, это уравнение также допускает численное интегрирование.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе обсуждается классическая двухпланетная задача трех тел переменной массы в общем случае, когда массы тел изменяются неизотропно с различными скоростями, что приводит к появлению реактивных сил. Поскольку дифференциальные уравнения движения являются неинтегрируемыми, проблема исследуется в рамках теории возмущений, причем в качестве нулевого приближения используется точное решение задачи двух тел с переменными массами, описывающее апериодическое движение тел по квазиконическим сечениям. Подробно описаны основные типы вычислений, связанных с разложением возмущающих функций в степенные ряды, и получены выражения для возмущающих функций с точностью до второго порядка по эксцентриситетам и наклонениям. Получены эволюционные уравнения, определяющие вековые возмущения орбитальных элементов, которые допускают численное интегрирование при заданных законах изменения масс тел.

Отметим, что все описанные символьные вычисления реализованы в системе компьютерной алгебры *Mathematica*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рой А.Э.* Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.
2. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы / Пер. с англ. под ред. И.И. Шевченко. М.: Физматлит, 2010. 588 с.
3. *Мерман Г.А.* О представлении общего решения задачи трех тел сходящимися рядами // Бюлл. ин-та теор. астрономии. 1958. Т. 6. С. 713–732.
4. *Брумберг В.А.* Ряды полиномов в задаче трех тел // Бюлл. ин-та теор. астрономии. 1963. Т. 9. № 4. С. 234–256.
5. *Борунов В.П., Рябов Ю.А.* Построение численно-аналитического тригонометрического решения задачи трех тел в ССВ Mathematica и Maple. Применение систем Mathematica и Maple в научных исследованиях. М.: ВЦ РАН, 2001. С. 63–77.
6. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
7. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы в небесной механике. М.: Наука, 1980. 208 с.
8. *Абрамов С.А., Зима Е.Б., Ростовцев В.А.* Компьютерная алгебра // Программирование. 1992. № 5. С. 4–25.
9. *Васильев Н.Н., Еднерал В.Ф.* Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях // Программирование. 1994. № 1. С. 70–82.
10. *Прокопеня А.Н.* Некоторые алгоритмы символьных вычислений в исследованиях проблем космической динамики // Программирование. 2006. Т. 32. № 2. С. 16–22.
11. *Prokopenya A.N.* Determination of the stability boundaries for the Hamiltonian systems with periodic coeffi-

cients // Math. Modelling and Analysis. 2005. V. 10. № 2. P. 191–204.

12. *Prokopenya A.N.* Computing the stability boundaries for the Lagrange triangular solutions in the elliptic restricted three-body problem // Math. Modelling and Analysis. 2006. V. 11. № 1. P. 95–104.
13. *Прокопеня А.Н.* Символьные вычисления в исследованиях устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Программирование. 2007. Т. 33. № 2. С. 9–16.
14. *Прокопеня А.Н.* Нормализация гамильтониана в ограниченной задаче многих тел методами компьютерной алгебры // Программирование. 2012. Т. 38. № 3. С. 65–78.
15. *Будько Д.А., Прокопеня А.Н.* Символьно-численный анализ равновесных решений в ограниченной задаче четырех тел // Программирование. 2010. Т. 3. № 2. С. 13–20.
16. *Будько Д.А., Прокопеня А.Н.* Символьно-численные методы поиска положений равновесия в ограниченной задаче четырех тел // Программирование. 2013. Т. 39. № 2. С. 30–37.
17. *Schmidt D., Vidal C.* Stability of the planar equiibrium solutions of a restricted 1+N body problem // Regular Chaotic Dyn. 2014. V. 19. № 5. P. 533–547.
18. *Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Beketauov B.A.* Secular perturbations of quasi-elliptic orbits in the restricted three-body problem with variable masses // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2015. V. 73. P. 58–63.
19. *Prokopenya A.N.* Symbolic-numerical analysis of the relative equilibria stability in the planar circular restricted four-body problem. Computer Algebra in Scientific Computing/CASC'2017 / Gerdt V.P., Koepf W., Seiler W.M., Vorozhtsov E.V. Eds. LNCS 10490. Berlin: Springer-Verlag, 2017. P. 329–345.
20. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.* Исследование ограниченной задачи трех тел с переменными массами методами компьютерной алгебры // Программирование. 2017. Т. 435. С. 18–23.
21. *Minglibayev M.Zh., Prokopenya A.N., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U.* Three-body problem with variable masses that change anisotropically at different rates // Mathematics in Computer Sci. 2017. V. 11. № 334. P. 383–391.
22. *Prokopenya A.N.* Numerical-symbolic methods for searching relative equilibria in the restricted problem of four bodies // Math. Modelling and Analysis. 2018. V. 23. № 3. P. 507–525.
23. *Bekov A.A., Omarov T.B.* The theory of orbits in non-stationary stellar systems // Astron. Astrophys. Trans. 2003. V. 22. № 2. P. 145–153.
24. *Eggleton P.* Evolutionary processes in binary and multiple stars. Cambridge University Press, 2006. 332 p.
25. *Veras D., Hadjidemetriou J.D., Tout C.A.* An exoplanet's response to anisotropic stellar mass-loss during birth and death // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. V. 435. № 3. P. 2416–2430.
26. *Минглибаев М.Дж.* Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. 224 с.
27. *Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М., Шомшекова С.А.* Дифферециальные уравнения относительного движения нестационарных экзопланетных систем // Вестник Казахского Национального педагогического университета им. Абая. Серия "Физ.-мат. науки". 2017. Т. 57. № 1. С. 147–152. http://kaznpu.kz/docs/vestnik/fizika_matematika/1.2017-ilovepdf-compressed_1.pdf
28. *Berkovič L.M.* Gylden-Meščerski problem // Celestial Mechanics. 1981. V. 24. P. 407–429.
29. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трех тел // Письма в Астрон. журн. 1994. Т. 20. № 10. С. 781–795.
30. *Ford E.B., Kozinsky B., Rasio F.A.* Secular evolution of hierarchical triple star systems // Astron. J. 2000. V. 535. P. 385–401.
31. *Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В.* О разложении вековой части возмущающей функции взаимного притяжения в спутниковой системе планеты // Астрон. вестник. 2013. Т. 47. № 1. С. 32–39.
32. *Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M.* Investigation of the evolutionary equations of the three-body problem with variable masses // Appl. Math. Sci. 2013. V. 7. № 89. P. 4439–4454.
33. *Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M.* Evolution of the orbital-plane orientations in the two-protoplanet three-body problem with variable masses // Astron. Rep. 2014. V. 58. № 9. P. 667–677.
34. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М.* Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами // Программирование. 2014. Т. 40. № 2. С. 51–59.
35. *Wolfram S.* An elementary introduction to the Wolfram Language. Wolfram Media, Inc., 2016.
36. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.