

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И $(q-)$ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© 2019 г. А. А. Рябенко*

Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,
Москва, ул. Вавилова, 40, 119333 Россия

* E-mail: anna.ryabenko@gmail.com

Поступила в редакцию 10.07.2018 г.

После доработки 31.08.2018 г.

Принята к публикации 10.09.2018 г.

Рассматриваются неоднородные системы линейных обыкновенных дифференциальных, разностных и q -разностных уравнений. Коэффициенты системы — рациональные функции одной переменной над некоторым полем характеристики 0. Уравнения системы могут иметь произвольные порядки. Для дифференциальных систем с гиперэкспоненциальной и $(q-)$ разностных систем с гипергеометрической правой частью предлагается алгоритм поиска частных решений. Задача поиска частного решения таких систем сводится к одной или нескольким задачам поиска для неоднородной системы с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью частного решения, компоненты которого являются рациональными функциями. Предлагается реализация этого алгоритма в Maple 2018.

DOI: 10.1134/S0132347419020109

I. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое поле характеристики 0. Рассматриваем неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$A_r(x)y^{(r)}(x) + \dots + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = b(x), \quad (1)$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T$ — вектор-столбец неизвестных функций от независимой переменной x , коэффициенты $A_i(x)$ — квадратные матрицы порядка m , компоненты которых являются рациональными функциями от x : $A_i(x) \in \text{Mat}_m(\mathbb{K}(x))$. Правая часть системы $b(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_m(x))^T$ — вектор-столбец, ненулевые компоненты которого являются конечной суммой гиперэкспоненциальных функций (см. [1]), т.е. таких $h(x)$, что

$$h'(x) = r(x)h(x)$$

для некоторой рациональной функции $r(x) \in \mathbb{K}(x)$. В этой статье рассматривается поиск частного решения системы (1). Если система совместна, то существует частное решение $y(x)$ такое, что каждая его компонента $y_i(x)$ является конечной суммой гиперэкспоненциальных функций.

Аналогично ставится задача поиска частного решения системы разностных уравнений

$$A_r(x)y(x+r) + \dots + A_1(x)y(x+1) + A_0(x)y(x) = b(x) \quad (2)$$

и системы q -разностных уравнений

$$A_r(x)y(xq^r) + \dots + A_1(x)y(xq) + A_0(x)y(x) = b(x), \quad (3)$$

где $b(x)$ — вектор-столбец, компоненты которого являются конечными суммами гипергеометрических термов (см. [2]), т.е. таких $h(x)$, что для некоторой рациональной функции $r(x) \in \mathbb{K}(x)$ в случае разностной системы (2) выполняется

$$h(x+1) = r(x)h(x),$$

а в случае q -разностной системы (3) —

$$h(xq) = r(x)h(x).$$

В случае q -разностной системы, q — ненулевой элемент поля $\mathbb{K}$ такой, что $q^k \neq 1$ для любого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, независимая переменная x принимает значения из множества $\{1, q, q^2, \dots\}$, т.е. $x = q^k$, где k — переменная, принимающая значения в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Задачи построения рациональных решений $y(x) \in \mathbb{K}(x)^m$ для систем (1), (2) и (3), однородных и неоднородных с рациональной правой частью (т.е. $b(x) \in \mathbb{K}(x)^m$), а также поиск рациональных решений в скалярном случае (т.е. $m = 1$), рассмотрены в работах [3]–[25]. Реализации предложенных там алгоритмов для систем (1), (2) и (3) первого порядка (т.е. $r = 1$) выполнены в Maple-процедуре `RationalSolution` пакета `LinearFunctionalsystems` (см. [26]); для разностных систем произвольного порядка (т.е. $r \geq 1$) в процедуре `RationalSolution` пакета `LRS` (см. [27]); для q -разностных систем произвольного порядка в процедуре `RationalSolution` пакета `LqRS` (см. [28]).

Построение гипергеометрических решений для скалярных разностных и q -разностных уравнений рассмотрено в работах [29]–[32]. Реализация – в процедуре `hypergeomsols` пакета `LREtools` и процедуре `QHypergeometricSolution` пакета `QDifferenceEquations` (см. [26]). Построение гипергеометрических решений для систем рассмотрено в [25], [33]–[35]. Предварительный вариант реализации выполнен для разностных и q -разностных систем в процедуре `HypergeometricSolution` пакетов `LRS` (см. [27]) и `LqRS` (см. [28]).

В данной статье предлагается алгоритм и его реализация в Maple 2018 построения частных решений неоднородных систем (1), (2) и (3), использующий элементы теории полиномов Оре (см. [36]–[38]) и основанный на сведениях к задаче построения рационального решения неоднородной системы с рациональной правой частью.

II. ПОЛИНОМЫ ОРЕ

Приведем необходимые сведения о теории полиномов Оре.

Пусть на некотором поле K (здесь это поле рациональных функций: $K = \mathbb{K}(x)$) определены автоморфизм σ и дифференцирование δ относительно σ так, что выполняются условия: $\delta(a+b) = \delta a + \delta b$ и $\delta(ab) = \sigma(a)\delta b + (\delta a)b$ для любых $a, b \in K$. Пусть далее $\mathcal{L}_K$ – некоторое линейное пространство над K и отображение

$$\xi: \mathcal{L}_K \mapsto \mathcal{L}_K$$

псевдолинейно относительно σ и δ , т.е.

$$\xi(u+v) = \xi(u) + \xi(v),$$

$$\xi(au) = \sigma(a)\xi(u) + \delta(a)u$$

для любых $a \in K, u, v \in \mathcal{L}_K$.

Рассматриваем систему уравнений вида

$$A_r(x)\xi^r y(x) + \dots + A_1(x)\xi y(x) + A_0(x)y(x) = b(x), \quad (4)$$

где $A_i(x) \in \text{Mat}_m(\mathbb{K}(x))$, $i = 0, 1, \dots, r$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $A_r(x)$, $A_0(x) \neq 0$, $y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x))^T$. Полагаем, что

$$\xi y(x) = (\xi y_1(x), \dots, \xi y_m(x))^T,$$

и, что рассматриваемая система имеет полный ранг, т.е. уравнения системы (4) линейно независимы над $\mathbb{K}(x)[\xi]$. Системе соответствует линейный оператор с матричными коэффициентами:

$$L = A_r(x)\xi^r + \dots + A_1(x)\xi + A_0(x).$$

Системы (1), (2) и (3) являются частным случаем системы (4), где в дифференциальном случае:

$$\xi y(x) = y'(x), \quad \sigma y(x) = y(x), \quad \delta y(x) = y'(x),$$

в разностном:

$$\xi y(x) = y(x+1), \quad \sigma y(x) = y(x+1), \quad \delta y(x) = 0,$$

в q -разностном:

$$\xi y(x) = y(qx), \quad \sigma y(x) = y(qx), \quad \delta y(x) = 0.$$

III. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕРМЫ

Определение 1. Назовем $h(x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}(x)}$ гипергеометрическим термом над $\mathbb{K}(x)$ по ξ , если соотношение $\xi h(x)/h(x) = r(x)$ является рациональной функцией от x : $r(x) \in \mathbb{K}(x)$; при этом $r(x)$ называется сертификатом для $h(x)$.

Пример 1. Рациональная функция является гипергеометрическим термом для любого ξ . В дифференциальном случае (т.е. $\xi y(x) = y'(x)$), гипергеометрическим термом с сертификатом $r(x)$ является

$$h(x) = h(x_0) e^{\int_{x_0}^x r(t) dt}.$$

Такая функция называется экспоненциальной или гиперэкспоненциальной по x . В разностном случае (т.е. $\xi y(x) = y(x+1)$):

$$h(x) = h(x_0) \prod_{t=x_0}^{x-1} r(t),$$

в q -разностном (т.е. $\xi y(x) = y(qx)$):

$$h(x) = h(q^{k_0}) \prod_{t=k_0}^{k-1} r(q^t), \quad \text{где} \quad x = q^k.$$

Множество всех гипергеометрических термов над $\mathbb{K}(x)$ по ξ обозначим $\mathcal{H}(\xi)_{\mathbb{K}(x)}$. Это множество не является линейным пространством. Обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\xi)_{\mathbb{K}(x)})$ пространство всех конечных сумм элементов из $\mathcal{H}(\xi)_{\mathbb{K}(x)}$.

Далее рассматривается задача построения частного решения $y(x)$ для системы (4) с гипергеометрической правой частью:

$$b(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\xi)_{\mathbb{K}(x)}).$$

IV. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

В работе [29], в частности, был предложен алгоритм построения гипергеометрических решений для скалярных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами и гипергеометрической правой частью. Этот алгоритм был перенесен на случай q -разностных уравнений в [30]. Необходимые для построения частного решения утверждения, теоремы и алгоритм из [29] нетрудно перенести на случай системы (4). Переформулируем Prop. 5.1 из [29].

Предложение 1. Пусть $L \in \text{Mat}_m(\mathbb{K}(x))[\xi]$, $h(x) \in \mathcal{H}(\xi)_{\mathbb{K}(x)}$ и $F(x) \in \mathbb{K}(x)^m$. Тогда

$$L(F(x)h(x)) = R(x)h(x),$$

где $R(x) \in \mathbb{K}(x)^m$.

Доказательство.

Пусть $r(x) \in \mathbb{K}(x)$ — сертификат $h(x)$, т.е.

$$\xi h(x) = r(x)h(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi(F(x)h(x)) &= \sigma(F(x))\xi h(x) + \delta(F(x))h(x) = \\ &= (r(x)\sigma F(x) + \delta F(x))h(x) = F_1(x)h(x), \end{aligned}$$

где $F_1(x) \in \mathbb{K}(x)^m$. Далее, для любого $i \geq 2$

$$\begin{aligned} \xi^i(F(x)h(x)) &= \xi(\xi^{i-1}(F(x)h(x))) = \\ &= \xi(F_{i-1}(x)h(x)) = F_i(x)h(x), \end{aligned}$$

где $F_i(x) \in \mathbb{K}(x)^m$. Отсюда следует предложение 1.

Рассмотрим систему вида

$$Ly(x) = R(x)h(x),$$

где $h(x) \in \mathcal{H}(\xi)_{\mathbb{K}(x)}$ и $R(x) \in \mathbb{K}(x)^m$. Система неоднородная, т.е. вектор $R(x)$ — ненулевой. Из предложения 1 следует, что если эта система совместна, то существует частное решение вида $F(x)h(x)$, где

$F(x) \in \mathbb{K}(x)^m$. Выполним в $Ly(x) = R(x)h(x)$ подстановку $y(x) = F(x)h(x)$, где $F(x)$ — вектор-столбец новых неизвестных. Выполняя подстановку, как в доказательстве предложения 1, получим $F_i(x) = \ell_i F(x)$, где в дифференциальном случае $\ell_i \in \mathbb{K}(x)[\delta]$ — линейные дифференциальные операторы, коэффициенты которых являются рациональными функциями от x , поскольку $\sigma F(x) = F(x)$; в разностном и q -разностном случае $\ell_i \in \mathbb{K}(x)[\sigma]$, поскольку $\delta F(x) = 0$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} L(F(x)h(x)) &= (A_r(x)\ell_r F(x) + \dots + A_1(x) \times \\ &\times \ell_1 F(x) + A_0(x)F(x))h(x), \end{aligned}$$

т.е.

$$L(F(x)h(x)) = (L_h F(x))h(x),$$

где $L_h \in \text{Mat}_m(\mathbb{K}(x))[\delta]$, либо $L_h \in \text{Mat}_m(\mathbb{K}(x))[\sigma]$.

Если система $L_h F(x) = R(x)$ имеет рациональное решение $F(x) \in \mathbb{K}(x)^m$, то $y(x) = F(x)h(x)$ является решением для $Ly(x) = R(x)h(x)$. В дифференциальном, разностном, q -разностном случае решения $L_h F(x) = R(x)$ можно найти, например, с помощью алгоритмов из [23, 25].

Пример 2. Найдем частное решение дифференциальной системы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y''(x) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} y'(x) = \sqrt{x} \begin{bmatrix} \frac{4x^2 - 1}{4x^2} \\ \frac{4x^3 - x^2 - 4}{4x^2(x^2 + 4)} \end{bmatrix}.$$

Подстановкой $y(x) = \sqrt{x}F(x)$ получаем

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F'''(x) + \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix} F'(x) + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{4x^2} & 0 \\ -\frac{1}{4x^2} & x \end{bmatrix} F(x) = \begin{bmatrix} \frac{4x^2 - 1}{4x^2} \\ \frac{4x^3 - x^2 - 4}{4x^2(x^2 + 4)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
 > S := \begin{bmatrix} x & 1 \\ x^2 + x & 0 \end{bmatrix} \cdot y(x+1) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2x^2 - 4x & x^2 + 3x + 2 \end{bmatrix} \cdot y(x) = \\
 &= \begin{bmatrix} (x^2 + x - 1)x! - (-1)^x x \\ (x^3 - 3x)x! + (-4x^2 - 8x - 2)(-1)^x \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Система уравнений S .

$$F(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{x^2 + 4} \end{bmatrix}, \quad y(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{x} \\ \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 4} \end{bmatrix}.$$

Частное решение системы $Ly(x) = b(x)$, где $b(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\xi))_{\mathbb{K}(x)}$, получаем выполнением следующих шагов:

1. Записать правую часть системы в виде конечной суммы:

$$b(x) = h_1(x)R_1(x) + \dots + h_s(x)R_s(x),$$

где $R_j(x) \in \mathbb{K}(x)^m$ и $h_1(x), \dots, h_s(x)$ — попарно *неподобные* гипергеометрические термы, т.е. $\frac{h_i(x)}{h_j(x)} \notin \mathbb{K}(x)$ для $i \neq j$.

2. Для каждого $j = 1, \dots, s$ с помощью подстановки $y(x) = F_j(x)h_j(x)$ и алгоритмов из [23, 25] найти частное решение $F_j(x) \in \mathbb{K}(x)^m$ системы

$$L(F_j(x)h_j(x)) = R_j(x)h_j(x). \quad (5)$$

3. Если для некоторого $j = 1, \dots, s$ не существует рационального решения для (5), то исходная система не имеет решения. Иначе, получаем частное решение:

$$y(x) = h_1(x)F_1(x) + \dots + h_s(x)F_s(x).$$

V. РЕАЛИЗАЦИЯ

Представленный алгоритм реализован в Maple 2018 в процедуре `HypergeometricSolution` пакета `LFS` (Linear Functional Systems).

Реализация выполнена для систем вида (1), (2) и (3), коэффициенты которых — рациональные функции одной переменной, например, x , над полем рациональных чисел (т.е. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$) в дифференциальном и разностном случаях. В q -разностном случае q может быть либо натуральным чис-

лом $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, либо именем, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q)$. Система задается в виде линейного операторного уравнения с матричными коэффициентами. Правая часть системы — вектор-столбец, элементы которого должны быть записаны в виде суммы, каждое слагаемое которой распознается стандартными процедурами Maple как гипергеометрический терм. Например, на рис. 1 приведен фрагмент Maple-сессии, где задана система разностных уравнений S . Правая часть системы S содержит четыре гипергеометрических терма, из которых можно выделить два неподобных: $x!$ и $(-1)^x$. Получаем частное решение S с помощью пакета `LFS` следующим образом:

```
> LFS:-HypergeometricSolution(S, y(x),
'output' = 'partsol');
```

$$\begin{bmatrix} x! + (-1)^x \\ -(-1)^x \end{bmatrix}$$

Результатом работы процедуры является вектор-столбец, если система имеет полный ранг и решение существует, иначе процедура возвращает `NULL`.

При реализации использованы процедуры стандартного Maple-пакета `OreTools` для выполнения постановки $y(x) = F(x)h(x)$ в систему. Для того, чтобы определить сертификат гипергеометрического терма используются процедуры `IsHyperexponential` пакета `DEtools`, `IsHypergeometricTerm` пакетов `SumTools` и `QDifferenceEquations`. Для построения рациональных решений систем используется процедура `RationalSolution` пакета `LFS`, реализованная Д.Е. Хмельновым по алгоритмам из [21, 22, 25].

Пакет `LFS`, его описание и примеры использования процедур доступны по адресу <http://www.ccas.ru/ca/lfs>.

БЛАГОДАРНОСТИ

Частичная поддержка РФФИ, грант 16-01-00174-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cluzeau T., van Hoeij M.* A modular algorithm to compute the exponential solutions of a linear differential operator // *J. Symbolic Computation*. 2004. V. 38. P. 1043–1076.
2. *Petkovšek M., Wilf H.S., Zeilberger D.* $A = B$. Peters, 1996.
3. *Абрамов С.А.* Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1989. Т. 29. № 11. С. 1611–1620.
4. *Абрамов С.А.* Рациональные решения линейных разностных и q -разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // *Программирование*. 1995. № 6. С. 3–11.
5. *Barkatou M.* A fast algorithm to compute the rational solutions of systems of linear differential equations, RR 973–M–Mars, IMAG–LMC, Grenoble, 1997.
6. *Abramov S.A., Barkatou M.A.* Rational solutions of first order linear difference systems. *Proceedings of IS-SAC'98*, 1998. P. 124–131.
7. *van Hoeij M.* Rational solutions of linear difference equations. *Proceedings of ISSAC'98*, 1998. P. 120–123.
8. *Abramov S.A.* EG–eliminations // *J. Difference Equations and Applications*. 1999. V. 5. P. 393–433.
9. *Barkatou M.A.* On rational solutions of systems of linear differential equations // *J. Symbolic Computation*. 1999. V. 28. P. 547–567.
10. *Abramov S.A., Bronstein M.* Hypergeometric dispersion and the orbit problem. *Proceedings of ISSAC'00*, 2000. P. 8–13.
11. *Хмельнов Д.Е.* Улучшенные алгоритмы решения разностных и q -разностных уравнений // *Программирование*. 2000. № 2. С. 70–78.
12. *Abramov S.A., Bronstein M.* On solutions of linear functional systems. *Proceedings of the ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 2001. P. 1–6.
13. *Abramov S.A.* A direct algorithm to compute rational solutions of first order linear q -difference systems // *Discrete Math.* 2002. V. 246. P. 3–12.
14. *Abramov S.A., Bronstein M.* Linear algebra for skew-polynomial matrices. INRIA. Rapport de recherche, March 2002. № 4420.
15. *Abramov S.A., Bronstein M., Khmelnov D.* Regularization of linear recurrence systems // *Trans. A.M. Liapunov Inst.* 2003. V. 4. P. 158–171.
16. *Хмельнов Д.Е.* Поиск полиномиальных решений линейных функциональных систем с помощью индуцированных рекурренций // *Программирование*. 2004. № 2. С. 8–16.
17. *Абрамов С.А., Поляков С.П.* Уточненные универсальные знаменатели // *Программирование*. 2007. № 3. С. 16–23.
18. *Abramov S.A., Gheffar A.* Valuations of rational solutions of linear difference equations at irreducible polynomials // *Adv. Appl. Math.* 2010. V. 47. P. 352–364.
19. *Abramov S.A., Gheffar A., Khmelnov D.E.* Factorization of polynomials and gcd computations for finding universal denominators. *Proceedings of Computer Algebra in Scientific Computing*, 2010. P. 4–18.
20. *Абрамов С.А., Геффар А., Хмельнов Д.Е.* Рациональные решения линейных разностных уравнений: универсальные знаменатели и границы знаменателей // *Программирование*. 2011. № 2. С. 28–39.
21. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Особые точки решений линейных обыкновенных дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами // *Фундаментальная и прикладная матем.* 2011/2012. Т. 17. № 1. С. 3–21.
22. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Знаменатели рациональных решений линейных разностных систем произвольного порядка // *Программирование*. 2012. № 2. С. 45–54.
23. *Абрамов С.А.* Поиск рациональных решений дифференциальных и разностных систем с помощью формальных рядов // *Программирование*. 2015. № 2. С. 69–80.
24. *Abramov S.A.* EG-eliminations as a tool for computing rational solutions of linear q -difference systems of arbitrary order with polynomial coefficients. *Материалы 2-й Международной конференции “Компьютерная алгебра”*. Москва, 2017. С. 54–60.
25. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Лорановы, рациональные и гипергеометрические решения линейных q -разностных систем произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами // *Программирование*. 2018. № 2. С. 60–73.
26. Maple online help: <http://www.maplesoft.com/support/help/>
27. *Ryabenko A.A.* LRS, 2017, <http://www.ccas.ru/ca/lrs/>
28. *Ryabenko A.A.* LqRS, 2017, <http://www.ccas.ru/ca/lqrs/>
29. *Petkovšek M.* Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients // *J. Symbolic Computation*. 1992. V. 14. P. 243–264.
30. *Abramov S.A., Petkovšek M., Paule P.* q -Hypergeometric solutions of q -difference equations // *Discrete Math.* 1998. V. 180. P. 3–32.
31. *van Hoeij M.* Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equations // *J. Pure and Appl. Algebra*. 1999. V. 139. P. 109–131.
32. *Cluzeau T., van Hoeij M.* Computing hypergeometric solutions of linear recurrence equations // *Applicable Algebra in Eng., Commun. and Computing*. 2006. V. 17. P. 83–115.
33. *Abramov S.A., Petkovšek M., Ryabenko A.A.* Hypergeometric solutions of first-order linear difference systems with rational-function coefficients. *CASC'2015 Proceedings // Lect. Notes Comput. Sci.* 2015. V. 9301. P. 1–14.

34. *Abramov S.A., Petkovšek M., Ryabenko A.A.* Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016. V. 56. № 7. P. 894–910.
35. *Рябенко А.А.* Поиск гипергеометрических решений q -разностных систем с помощью разрешающих последовательностей. Материалы 2-й Международной конференции “Компьютерная алгебра”. Москва, 2017. С. 151–157.
36. *Ore O.* Theory of non-commutative polynomials // *Annals Math.* 1933. V. 34. P. 480–508.
37. *Bronstein M., Petkovšek M.* On Ore rings, linear operators and factorisation // *Programming and Computer Software*. 1994. № 1. P. 27–43.
38. *Bronstein M., Petkovšek M.* An introduction to pseudo-linear algebra // *Theor. Comput. Sci.* 1996. V. 157. P. 3–33.