

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
ДВИЖЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ МАШИНЫ АТВУДА
С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2020 г. А. Н. Прокопеня*

*Варшавский университет естественных наук – SGGW,
Польша 02-776 Варшава, ул. Новоурсыновска, Польша***E-mail: alexander_prokopenya@sggw.pl*

Поступила в редакцию 13.08.2019 г.

После доработки 18.09.2019 г.

Принята к публикации 20.10.2019 г.

Обсуждается проблема поиска периодического движения обобщенной машины Атвуда, в которой шкив конечного радиуса заменяется двумя отдельными малыми шкивами и один груз может колебаться в вертикальной плоскости. Выполнив необходимые символьные вычисления, мы получили уравнения движения системы и построили их периодические решения в виде степенных рядов по малому параметру в случае малых колебаний. Показано, что при небольшой разнице в массах грузов существует состояние динамического равновесия системы, когда колеблющийся груз ведет себя как маятник, длина которого совершает малые колебания. При этом наблюдается резонанс частот вида $2 : 1$, т.е. частота колебаний длины маятника в два раза превышает частоту колебаний угловой переменной. Сравнение полученных результатов с соответствующими численными решениями уравнений движения подтверждает их корректность. Все необходимые вычисления выполняются с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

DOI: 10.31857/S0132347420020090

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая машина Атвуда, первоначально разработанная для демонстрации равноускоренного движения, состоит из двух грузов, соединенных невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через шкив, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси (см. [1]). Предполагая, что грузы могут перемещаться только вдоль вертикали, а нить не проскальзывает по шкиву, получаем простую механическую систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой легко интегрируется. Простейшее обобщение этой системы, когда один из грузов во время движения может совершать колебания в вертикальной плоскости, приводит к появлению дополнительной степени свободы, что существенно усложняет уравнения движения и их общее решение не может быть записано в символьной форме [2]. Однако динамика такой системы была исследована довольно подробно [3]. В частности, было показано, что уравнения движения являются интегрируемыми только в том случае, когда отношение масс грузов равняется 3. При этом система может демонстрировать раз-

личные виды движения, например, квазипериодическое и хаотическое движение (см. [4–6]). Радиус шкива также влияет на динамику системы (см. [7]), но его изменение не приводит к каким-либо качественным изменениям движения.

Следует отметить, что именно колебания груза существенно влияют на характер движения системы, особенно при небольшой разнице масс грузов. Исследование движения машины Атвуда с одним колеблющимся грузом показало (см. [8]), что колебания приводят к возрастанию средней силы натяжения нити, причем ее величина зависит от амплитуды колебаний. Если оба груза одинаковой массы ($m_1 = m_2$) находятся в равновесии и одному из них сообщается горизонтальная начальная скорость, то этот колеблющийся груз начинает движение вниз и тянет второй груз вверх даже в случае малых колебаний. При этом длина отрезка нити r между колеблющимся грузом и шкивом увеличивается, а амплитуда его колебаний и средняя сила натяжения нити убывают. Таким образом, при наличии колебаний одного из двух одинаковых грузов равновесное решение уравнений движения машины Атвуда $r = \text{const}$ не

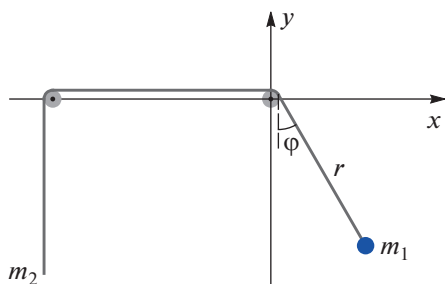


Рис. 1. Обобщенная машина Атвуда.

существует. Такое решение возможно только в том случае, когда колебания отсутствуют или же оба груза совершают колебания в противофазе с одинаковыми амплитудами и частотами (см. [9]).

С другой стороны, при небольшой разнице масс колебания груза меньшей массы приводят к возможности квазипериодического движения системы (см. [8]). Естественно предположить, что при подходящих начальных условиях система может находиться в состоянии динамического равновесия, когда груз большей массы совершает поступательное движение и колеблется около некоторого равновесного положения, а движение груза меньшей массы представляет собой наложение двух взаимно перпендикулярных колебаний. Соответствующее решение уравнений движения системы должно быть периодическим.

Целью данной работы является построение периодического решения уравнений движения машины Атвуда в виде степенного ряда по малому параметру и определение начальных условий, при которых такое движение может происходить. Отметим, что построение и исследование таких решений обычно связано с выполнением весьма громоздких символьных вычислений, которые удобно выполнять с помощью систем компьютерной алгебры (см., напр., [10–14]). В данной работе для выполнения всех расчетов и визуализации полученных результатов используется система компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* [15].

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается обобщенная модель машины Атвуда, в которой шкив конечного радиуса заменяется двумя отдельными малыми шкивами и один груз может колебаться в вертикальной плоскости (Рис. 1). Такая модификация классической машины Атвуда не изменяет ее физической природы, но позволяет исключить влияние размеров шкива и сосредоточиться на исследовании влияния колебаний на движение системы.

Функция Лагранжа рассматриваемой системы имеет вид

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{r}^2 + m_1gr \cos \varphi - m_2gr, \quad (2.1)$$

где точка над символом означает полную производную соответствующей функции по времени, g — ускорение свободного падения, r — расстояние между шкивом и грузом m_1 , а угол φ определяет отклонение груза от вертикали (см. рис. 1). Выражение (2.1) записано в предположении, что радиус шкива пренебрежимо мал и изменением длины нити r при колебаниях груза за счет наматывания нити на шкив можно пренебречь.

Уравнения движения, записанные в форме Лагранжа с использованием (2.1), имеют вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = -m_2g + m_1g \cos \varphi + m_1r\dot{\varphi}^2, \quad (2.2)$$

$$r\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (2.3)$$

Легко видеть, что при $r = R_0 = \text{const}$ уравнение (2.3) сводится к уравнению колебаний математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R_0} \sin \varphi = 0,$$

однократное интегрирование которого приводит к закону сохранения механической энергии

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R_0}(\cos \varphi - \cos \Phi_0), \quad (2.4)$$

где Φ_0 — амплитуда колебаний. При $r = \text{const}$ уравнение (2.2) с учетом (2.4) принимает вид

$$3 \cos \varphi = 2 \cos \Phi_0 + \frac{m_2}{m_1}. \quad (2.5)$$

Поскольку $\dot{\varphi}^2 \geq 0$ и, следовательно, $|\varphi| \leq \Phi_0$, уравнение (2.5) имеет единственное решение $\varphi = \Phi_0 = 0$ только в случае равных масс грузов ($m_1 = m_2$). Таким образом, система (2.2)–(2.3) имеет равновесное решение $r = R_0 = \text{const}$, $\varphi = 0$ только при условии $m_1 = m_2$.

Далее будем предполагать, что колебания груза m_1 являются малыми (выполняется условие $|\varphi| \ll 1$), и заменим тригонометрические функции в уравнениях (2.2), (2.3) их разложениями в степенные ряды с точностью до второго порядка включительно. Тогда уравнения движения примут вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = -m_2g + m_1g \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + m_1r\dot{\varphi}^2, \quad (2.6)$$

$$r\ddot{\phi} = -g\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}. \quad (2.7)$$

Заметим, что уравнения (2.6), (2.7) являются нелинейными и существование периодических движений грузов, которыми мы интересуемся в данной работе, возможно только вследствие нелинейного взаимодействия между степенями свободы системы. В линейном приближении переменные $r(t)$ и $\phi(t)$ разделяются и интересные нелинейные эффекты, которые проявляются даже в случае малых колебаний, теряются.

3. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Напомним, что колебания груза m_1 приводят к увеличению средней силы натяжения нити и она становится больше силы тяжести m_1g (см. [8]). Следовательно, можно ожидать, что при небольшой разнице в массах грузов, когда выполняется условие $(|m_2 - m_1|/m_1 \equiv \varepsilon \ll 1)$, средняя сила натяжения нити может уравновесить силу тяжести m_2g и система будет находиться в состоянии динамического равновесия, при котором обе переменные $r(t)$, $\phi(t)$ осциллируют около равновесного решения и являются периодическими функциями времени. Поскольку уравнения движения (2.6)–(2.7) являются нелинейными, амплитуда и частота колебаний будут зависеть от амплитуды и, следовательно, от параметра ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$, когда грузы имеют одинаковые массы, функции $r(t)$, $\phi(t)$ должны сводиться к равновесному решению $r = R_0$, $\phi = 0$.

Для удобства вычислений произведем замену переменных

$$r(t) \rightarrow R_0(1 + \varepsilon r^*(t^*)), \quad \phi(t) \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \phi(t^*), \quad (3.1)$$

где r^* и $t^* = t\sqrt{g/R_0}$ – безразмерные переменные, которые далее будем обозначать обычным образом через r , t . В результате уравнения движения (2.6)–(2.7) принимают вид, удобный для применения теории возмущений:

$$(2 + \varepsilon)\ddot{r} = -1 - \frac{1}{2}\phi^2 + (1 + \varepsilon r)\dot{\phi}^2, \quad (3.2)$$

$$\ddot{\phi} + \phi = -\varepsilon(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}). \quad (3.3)$$

Решение системы (3.2)–(3.3) можно искать в виде степенных рядов по малому параметру ε :

$$r(t) = r_1(t) + \varepsilon r_2(t) + \varepsilon^2 r_3(t) + \dots, \quad (3.4)$$

$$\phi(t) = \phi_0(t) + \varepsilon \phi_1(t) + \varepsilon^2 \phi_2(t) + \dots \quad (3.5)$$

Поиск неизвестных функций $r_k(t)$, $\phi_k(t)$ в разложениях (3.4)–(3.5) требует выполнения стандартных, но достаточно громоздких символьных вычислений, которые выполняются в данной работе с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*. Для подстановки решений $r(t)$, $\phi(t)$ в уравнения (3.2)–(3.3) и автоматического вычисления всех производных удобно воспользоваться анонимными функциями (pure functions) и определить правила замены вида

$$rul1 = \{r \rightarrow (r_1[\#] + \varepsilon r_2[\#] + \varepsilon^2 r_3[\#] \&),$$

$$\phi \rightarrow (\phi_0[\#] + \varepsilon \phi_1[\#] + \varepsilon^2 \phi_2[\#] \&)\};$$

Для разложения правых частей полученных уравнений в ряды по степеням параметра ε с точностью до второго порядка, например, достаточно к каждому уравнению применить функцию

$$Series[\#, \{\varepsilon, 0, 2\}] \&;$$

Затем встроенная функция *Coefficient[eq, ε , k]* позволяет выделить в выражении *eq* коэффициент при ε^k , $k = 0, 1, 2, \dots$

Выполняя описанные символьные вычисления и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε в левой и правой части каждого уравнения (3.2)–(3.3), получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\phi}_0 + \phi_0 = 0, \quad (3.6)$$

$$2\ddot{r}_1 = -1 - \frac{1}{2}\phi_0^2 + \dot{\phi}_0^2, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\phi}_1 + \phi_1 = -r_1\ddot{\phi}_0 - 2\dot{r}_1\dot{\phi}_0, \quad (3.8)$$

$$2\ddot{r}_2 = -\ddot{r}_1 + 2\dot{\phi}_0\dot{\phi}_1 + r_1\dot{\phi}_0^2 - \phi_0\phi_1, \quad (3.9)$$

$$\ddot{\phi}_2 + \phi_2 = -r_1\ddot{\phi}_1 - r_2\ddot{\phi}_0 - 2\dot{r}_1\dot{\phi}_1 - 2\dot{r}_2\dot{\phi}_0, \quad (3.10)$$

$$2\ddot{r}_3 = -\ddot{r}_2 + 2\dot{\phi}_0\dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_1^2 + 2r_1\dot{\phi}_0\dot{\phi}_1 + \\ + r_2\dot{\phi}_0^2 - \frac{1}{2}\phi_1^2 - \phi_0\phi_2, \dots \quad (3.11)$$

Отметим, что линейные дифференциальные уравнения второго порядка (3.6)–(3.11) последовательно решаются с помощью встроенной функции *DSolve*. Без ограничения общности рассуждений можем предположить, что в начальный момент времени груз m_1 находится в отклоненном от вертикали положении и начинает движение без начальной скорости. Тогда решение уравнения (3.6) при начальном условии $\dot{\phi}_0(0) = 0$ можно записать в виде

$$\varphi_0 = C_0 \cos t, \quad (3.12)$$

где C_0 — неизвестная постоянная, равная амплитуде колебаний в нулевом приближении по ε , которая находится из условия, что в правой части уравнения (3.7) присутствуют только осциллирующие функции. Подставляя решение (3.12) в (3.7) и выполняя несложные символьные преобразования, получаем:

$$2\ddot{r}_1 = -1 + \frac{1}{4}C_0^2 - \frac{3}{4}C_0^2 \cos(2t). \quad (3.13)$$

Отметим, что наличие постоянного слагаемого в правой части уравнения (3.13) приводит к возрастанию или убыванию функции $r_1(t)$. Поскольку нас интересует периодическое решение, не зависящее от времени слагаемое следует приравнять к нулю. В результате находим:

$$C_0 = 2. \quad (3.14)$$

Поскольку груз m_1 начинает движение без начальной скорости, а его начальное положение не известно, дифференциальное уравнение второго порядка (3.13) интегрируем с одним начальным условием $\dot{r}_1(0) = 0$ и с учетом (3.14) получаем:

$$r_1 = B_1 + \frac{3}{8} \cos(2t). \quad (3.15)$$

В решении (3.15) появляется новая неизвестная постоянная B_1 , которая находится из условия, что в правой части уравнения (3.8) отсутствуют резонансные члены, пропорциональные $\cos t$ и $\sin t$. Отметим, что появление резонансных членов в правой части (3.8) привело бы к неограниченному возрастанию функции $\varphi_1(t)$, что невозможно в замкнутой консервативной системе (см., напр., [16]).

Подставляя решения (3.12) и (3.15) в уравнение (3.8), получаем:

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = \left(2B_1 - \frac{9}{8}\right) \cos t + \frac{15}{8} \cos(3t). \quad (3.16)$$

Условие отсутствия резонансов в (3.16) дает

$$B_1 = \frac{9}{16}. \quad (3.17)$$

Интегрируя (3.16) с учетом (3.17) при начальном условии $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, находим:

$$\varphi_1(t) = \left(C_1 - \frac{15}{32}\right) \cos t - \frac{15}{64} \cos(3t), \quad (3.18)$$

где C_1 — неизвестная постоянная, которая опять находится из условия, что в правой части уравнения (3.9) присутствуют только осциллирующие функции.

Подставляя решения (3.12), (3.15) и (3.18) в уравнение (3.9) и учитывая (3.14), (3.17), получаем:

$$2\ddot{r}_2 = C_1 + \frac{9}{32} + \left(\frac{87}{64} - 3C_1\right) \cos(2t) + \frac{81}{64} \cos(4t). \quad (3.19)$$

Из уравнения (3.19) находим

$$C_1 = -\frac{9}{32}. \quad (3.20)$$

Интегрирование (3.19) с учетом (3.20) при начальном условии $\dot{r}_2(0) = 0$ дает:

$$r_2 = B_2 - \frac{141}{512} \cos(2t) - \frac{81}{2048} \cos(4t), \quad (3.21)$$

где B_2 — неизвестная постоянная, которая находится из условия, что в правой части уравнения (3.10) отсутствуют резонансные члены.

Подставляя решения (3.12), (3.15), (3.18) и (3.21) в уравнение (3.10) и учитывая (3.14), (3.17), (3.20), получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + \varphi_2 = & \left(2B_2 + \frac{981}{1024}\right) \cos t - \\ & - \frac{6123}{2048} \cos(3t) - \frac{2619}{2048} \cos(5t). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Условие отсутствия резонансов в (3.22) дает

$$B_2 = -\frac{981}{2048}. \quad (3.23)$$

Интегрируя (3.22) с учетом (3.23) при начальном условии $\dot{\varphi}_2(0) = 0$, находим:

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) = & \left(C_2 + \frac{6123}{8192}\right) \cos t + \\ & + \frac{6123}{16384} \cos(3t) + \frac{873}{16384} \cos(5t), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где C_2 — неизвестная постоянная, которая опять находится из условия, что в правой части уравнения (3.11) присутствуют только осциллирующие функции.

Подставляя решения (3.12), (3.15), (3.18), (3.21) и (3.24) в уравнение (3.11) и учитывая (3.14), (3.17), (3.20), (3.23), получаем:

$$\begin{aligned} 2\ddot{r}_3 = & C_2 - \frac{6345}{16384} - \left(3C_2 + \frac{20595}{16384}\right) \cos(2t) - \\ & - \frac{9747}{4096} \cos(4t) - \frac{4455}{8192} \cos(6t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из уравнения (3.25) находим

$$C_2 = \frac{6345}{16384}. \quad (3.26)$$

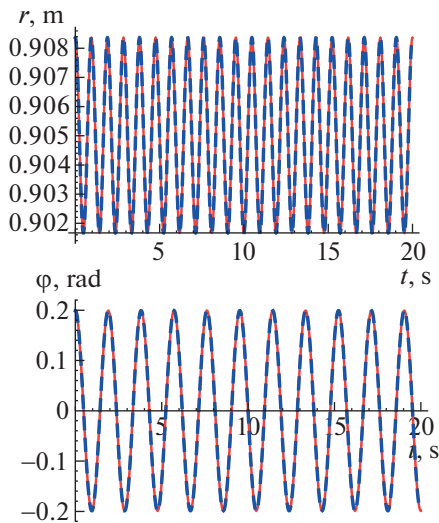


Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений ($\epsilon = 0.01$).

Интегрирование (3.25) с учетом (3.26) при начальном условии $\dot{r}_3(0) = 0$ дает:

$$r_3 = B_3 + \frac{19815}{65536} \cos(2t) + \frac{9747}{131072} \cos(4t) + \frac{495}{65536} \cos(6t), \quad (3.27)$$

где B_2 — неизвестная постоянная, которая находится из условия, что в правой части уравнения для $\phi_3(t)$ отсутствуют резонансные члены.

В результате с точностью до второго порядка по ϵ получаем решение уравнений движения (3.2)–(3.3) в виде

$$r(t) = \frac{1}{16} (9 + 6 \cos(2t)) - \frac{\epsilon}{2048} (981 + 564 \cos(2t) + 81 \cos(4t)) + \frac{\epsilon^2}{131072} (80883 + 39630 \cos(2t) + 9747 \cos(4t) + 990 \cos(6t)), \quad (3.28)$$

$$\phi(t) = 2 \cos t - \frac{\epsilon}{64} (48 \cos t + 15 \cos(3t)) + \frac{\epsilon^2}{16384} (18591 \cos t + 6123 \cos(3t) + 873 \cos(5t)). \quad (3.29)$$

Легко видеть, что полученное решение является периодическим, причем частота колебаний длины маятника $r(t)$ равняется удвоенной частоте

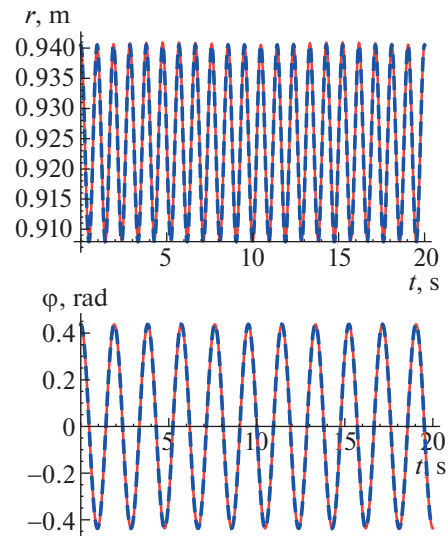


Рис. 3. Сравнение аналитического и численного решений ($\epsilon = 0.05$).

колебаний угловой переменной $\phi(t)$, т.е. наблюдается резонанс частот $2 : 1$.

Напомним, что переменные $r(t)$ и $\phi(t)$ в (3.28), (3.29) являются безразмерными (см. (3.1)). Используя выражения (3.28), (3.29), определяем начальные условия в исходных переменных:

$$r(0) = R_0 \left(1 + \frac{15}{16} \epsilon - \frac{813}{1024} \epsilon^2 + \frac{65625}{65536} \epsilon^3 \right),$$

$$\phi(0) = \sqrt{\epsilon} \left(2 - \frac{63}{64} \epsilon + \frac{25587}{16384} \epsilon^2 \right), \quad (3.30)$$

$$\dot{r}(0) = \dot{\phi}(0) = 0.$$

Отметим, что амплитуда колебаний маятника, определяемая выражением (3.30) и равная $\phi(0)$, зависит от разницы масс грузов. При заданной частоте колебаний, определяемой параметром R_0 и равной $\sqrt{g/R_0}$, начальная длина маятника $r(0)$ также зависит от ϵ (см. (3.30)).

Для демонстрации корректности найденного аналитического решения (3.28), (3.29) выберем некоторые реалистичные значения параметров, например, $R_0 = 0.9$ м, $\epsilon = 0.01$ и $g = 9.8$ м/с² и найдем численное решение системы (3.2)–(3.3), используя встроенную функцию *NSolve* и начальные условия (3.30). Найденному численному решению соответствуют на рис. 2 сплошные линии, а штриховые линии изображают функции (3.28), (3.29). Как видим, обе кривые совпадают. Отметим также, что увеличение разницы масс грузов ($\epsilon = 0.05$) приводит к изменению начальных значений $r(0)$ и $\phi(0)$ (см. (3.30)), что означает возрас-

тание амплитуды колебаний и изменение равновесного значения длины маятника $r(t)$ (рис. 3). Очевидно, при дальнейшем возрастании параметра ε амплитуда периодических колебаний системы также должна возрасти, что приведет к нарушению условия малости колебаний и необходимости учета членов более высоких порядков в разложениях тригонометрических функций в уравнениях движения (2.2)–(2.3).

Если предположить, что в начальный момент времени грузу m_1 , который покоится в положении $\varphi(0) = 0$, сообщают горизонтальную начальную скорость, то уравнение (3.6) следует решать при соответствующем начальном условии, что дает

$$\varphi_0 = C_0 \sin t, \quad (3.31)$$

где C_0 – неизвестная постоянная. Повторяя вычисления с функцией $\varphi_0(t)$, определяемой выражением (3.31), получаем новое решение системы (3.2)–(3.3):

$$\begin{aligned} r(t) = & \frac{1}{16}(9 - 6 \cos(2t)) - \\ & - \frac{\varepsilon}{2048}(981 - 564 \cos(2t) + 81 \cos(4t)) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{131072}(80883 - 39630 \cos(2t) + \\ & + 9747 \cos(4t) - 990 \cos(6t)), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & 2 \sin t - \frac{\varepsilon}{64}(48 \sin t - 15 \sin(3t)) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{16384}(18591 \sin t - 6123 \sin(3t) + \\ & + 873 \sin(5t)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Заметим, что при замене $t \rightarrow t + \pi/2$ решение (3.32), (3.33) переходит в полученное ранее решение (3.28), (3.29). Аналогичный результат получается при выборе решения уравнения (3.6) в общем виде

$$\varphi_0 = C_0 \cos t + D_0 \sin t, \quad (3.34)$$

где C_0 , D_0 – неизвестные постоянные, и повторения всех вычислений. При этом следует следить за тем, чтобы в дифференциальных уравнениях (3.8), (3.10) для коэффициентов $\varphi_k(t)$ не появились резонансные члены, пропорциональные $\cos t$ и $\sin t$, а в правых частях уравнений (3.7), (3.9), (3.11) сохранялись только осциллирующие члены.

Таким образом, при заданных параметрах ε и R_0 существует единственное периодическое решение уравнений движения (3.2), (3.3), представимое в

виде степенных рядов (3.4), (3.5). Выполняя вычисления в высших порядках по ε , можно найти искомое периодическое решение с необходимой точностью, хотя вычисления становятся все более громоздкими и для их выполнения требуется применение систем компьютерной алгебры.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе обсуждается проблема построения периодического решения уравнений движения обобщенной машины Атвуда. Показано, что при небольшой разнице масс двух грузов и малых колебаниях груза меньшей массы уравнения движения имеют единственное периодическое решение, представимое в виде степенных рядов по малому параметру ε . Последовательно описаны символьные вычисления, необходимые для определения коэффициентов этих рядов, и найдено соответствующее решение с точностью до второго порядка по ε . Сравнение найденного аналитического решения с численным решением уравнений движения показало справедливость полученных теоретических результатов.

Отметим, что хотя найденные решения (3.28), (3.29) не выглядят слишком громоздкими, их получение с точностью до третьего и более высоких порядков по ε связаны с большим объемом символьных вычислений, которые можно эффективно выполнять с помощью систем компьютерной алгебры. В данной работе все вычисления и визуализация результатов выполнены с использованием системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Atwood G.* A Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies. Cambridge University Press, 1784.
2. *Tufillaro N.B., Abbott T.A., Griffiths D.J.* Swinging Atwood's machine // *American Journal of Physics*. 1984. V. 52 (3.1). P. 895–903.
3. *Tufillaro N.B.* Motions of a swinging Atwood's machine // *J. Physique*. 1985. V. 46. P. 1495–1500.
4. *Tufillaro N.B.* Integrable motion of a swinging Atwood's machine // *Amer. J. Phys.* 1986. V. 54. P. 142–143.
5. *Casasayas J., Nunes T.A., Tufillaro N.B.* Swinging Atwood's machine: integrability and dynamics // *J. Physique*. 1990. V. 51. P. 1693–1702.
6. *Yehia H.M.* On the integrability of the motion of a heavy particle on a tilted cone and the swinging Atwood's machine // *Mech. R. Comm.* 2006. V. 33 (2.4). P. 711–716.
7. *Pujol O., Pérez J.P., Ramis J.P., Simo C., Simon S., Weil J.A.* Swinging Atwood machine: Experimental and nu-

- merical results, and a theoretical study // *Physica D*. 2010. V. 239 (3.3). P. 1067–1081.
8. *Prokopenya A.N.* Motion of a swinging Atwood's machine: simulation and analysis with Mathematica // *Mathematics in Computer Science*. 2017. V. 11 (3–4). P. 417–425.
9. *Prokopenya A.N.* Modelling Atwood's Machine with Three Degrees of Freedom // *Mathematics in Computer Science*. 2019. V. 13 (1–2). P. 247–257.
10. *Абрамов С.А., Зима Е.Б., Ростовцев В.А.* Компьютерная алгебра // *Программирование*. 1992. № 5. С. 4–25.
11. *Васильев Н.Н., Еднерал В.Ф.* Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях // *Программирование*. 1994. № 1. С. 70–82.
12. *Прокопеня А.Н.* Некоторые алгоритмы символьных вычислений в исследованиях проблем космической динамики // *Программирование*. 2006. Т. 32 (2.2). С. 16–22.
13. *Прокопеня А.Н.* Символьные вычисления в исследованиях устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // *Программирование*. 2007. Т. 33 (2.2). С. 9–16.
14. *Прокопеня А.Н.* Нормализация гамильтониана в ограниченной задаче многих тел методами компьютерной алгебры // *Программирование*. 2012. Т. 38 (2.3). С. 65–78.
15. *Wolfram S.* An elementary introduction to the Wolfram Language, 2nd ed. – Champaign, IL, USA, Wolfram Media, 2017.
16. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 592 с.