ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2020, № 4, с. 3–13

ТЕОРИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ: ФОРМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И СЕМАНТИКА

УДК 519.7

ТЕСТОВЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

© 2020 г. Е. Н. Боженкова[a,b,*], И. Б. Вирбицкайте[a,b,**]

[a] Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН
630090 Новосибирск, пр. ак. Лаврентьева, д. 6, Россия

[b] Новосибирский государственный университет
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2, Россия

*E-mail: bozhenko@iis.nsk.su

**E-mail: virb@iis.nsk.su

Поступила в редакцию 10.02.2020 г.
После доработки 20.02.2020 г.
Принята к публикации 15.03.2020 г.

В данной работе определяется и исследуется семейство тестовых эквивалентностей в интерливинговой семантике, семантике частичного порядка и комбинации этих семантик в контексте непрерывно-временных безопасных сетей Петри (элементарных сетевых систем, переходы которых помечены временными интервалами и каждый переход, имеющий достаточное количество фишек во входных местах, должен срабатывать тогда, когда его счетчик достигнет некоторого значения, принадлежащего его временному интервалу). Для этого разрабатываются три представления поведения непрерывно-временной сети Петри: последовательности срабатываний сетевых переходов, представляющие семантику интерливинга, временные причинные сети-процессы, из которых выводятся частичные порядки, и временное причинное дерево, вершинами которого являются последовательности срабатываний переходов, а дуги помечены информацией о частичных порядках. Устанавливаются взаимосвязи между рассматриваемыми эквивалентностями и показывается совпадение семантик временных причинных сетей-процессов и временных причинных деревьев.

DOI: 10.31857/S0132347420040044

1. ВВЕДЕНИЕ

Тестовые эквивалентности используются при сравнении поведения систем и проверке соответствия между заданной спецификацией и полученной реализацией, а также при установлении выполнимости логических формул. Понятие тестовой эквивалентности параллельных процессов было предложено М. Хеннеси и Р. де Николой в статье [1]. Тест – это специальный процесс, который выполняется параллельно с тестируемым процессом. Такое выполнение считается успешным, если тест достигает выделенного успешного состояния, и процесс проходит тест, если каждое его совместное выполнение с процессом является успешным. Два процесса считаются тестово эквивалентными, если они проходят одни и те же наборы тестов. Чтобы облегчить исследование и применение тестовых эквивалентностей, были найдены их альтернативные характеризации – например, сравнение проводится по совокупности всех тестов, которые представляют собой вычисления процессов и множества возможных их продолжений. Концепция тестовой эквивалентности интуитивно понятна и привела к появлению математической теории эквивалентностей и предпорядков на процессах.

Изначально тестовые эквивалентности были детально исследованы в контексте моделей систем переходов (см., например, [2, 3]), которые базируются на интерливинговой семантике – отношение параллелизма между действиями системы представляется не напрямую, а посредством недетерминированного выбора между выполнениями линейно-упорядоченных поддействий. Интерливинговые тестовые эквивалентности для элементарных сетевых систем изучались в статье [4]. Чтобы преодолеть ограничения интерливингового подхода, отношение параллелизма часто моделируется как отсутствие причинной зависимости, представленной, как правило, частичным порядком, между действиями системы. В работах [5, 6] тестовые эквивалентности рассматривались в семантике частичного порядка в рамках моделей структур событий. Кроме того, тестовые эквивалентности активно изучались в контексте моделей структур событий для семантики причинных деревьев – поведение системы представляется в виде дерева, в котором дуги помечаются действиями и сведениями об их предшественниках, т.е. сохраняется информация о причинной зависимости. Взаимосвязи между семантиками частичного порядка и причинных деревьев были хорошо изучены для моделей структур событий в работах [6–8]. Чаще всего семантика частичного порядка сетей Петри представляется посредством так называемых причинных сетей-процессов, включающих события и условия, находящиеся в отношениях причинной зависимости и параллелизма (см. [9–11] среди других статей). Сравнение разновидностей тестовой эквивалентности в частично-упорядоченной семантике сетей Петри было проведено в статье [4]. Исследование семантики причинных деревьев в контексте сетей Петри, на сколько нам известно, не проводилось.

При верификации сложных систем, критичных с точки зрения безопасности, важно исследовать не только качественные, но и количественные характеристики поведения систем. Для этих целей тестовые эквивалентности были применены в контексте ряда моделей с реальным временем. Для систем переходов с дискретным временем в работах [12] и [13] были даны альтернативные характеризации временных тестовых эквивалентностей с использованием расширенного понятия, так называемых, допустимых множеств. Семантическая теория на основе тестовых эквивалентностей была предложена для алгебр процессов с временными ограничениями в статьях [14] и [15], где формулируются альтернативные характеризации тестовых предпорядков через, так называемые, трассы отказов. Авторы статьи [15] доказали возможность дискретизации в контексте разработанной ими временной алгебры процессов и, как следствие, сведение непрерывно-временных тестовых отношений к дискретно-временным. В работе [16] интерливинговые тестовые отношения, а также результаты по их альтернативной характеризации и дискретизации распространяются на модель сетей Петри с временными характеристиками, сопоставленными фишкам, и с временными интервалами, связанными с дугами из мест в переходы. Тестовые отношения исследуются одновременно для временных и причинно-зависимых семантик моделей структур событий в статье [17]. Кроме того, в [18–20] дается классификация эквивалентностей из спектра линейного/ветвящегося времени для семантик интерливинга, причинных деревьев и частичного порядка в контексте моделей непрерывно-временных структур событий. Частично-упорядоченная семантика в работах [21, 22] была предложена для дискретно-временных сетей Петри, где с каждым переходом связана длительность его срабатывания, а также в статье [23] – для непрерывно-временных безопасных сетей Петри, где каждому переходу сопоставлен интервал временных задержек его срабатывания. Однако, насколько нам известно, в литературе по временным сетям Петри не представлены исследования тестовых эквивалентностей в семантиках причинных сетей-процессов и причинных деревьев. Только в работах [24, 25] изучались взаимосвязи трассовых и бисимуляционных эквивалентностей в интерливинговой и частично-упорядоченной семантиках непрерывно-временных безопасных сетей Петри.

Цель данной работы состоит в определении, изучении и сравнении тестовых эквивалентностей в семантиках интерливинга, причинных сетей и причинных деревьев в контексте непрерывно-временных безопасных сетей Петри (элементарных сетевых систем, переходы которых помечены временными интервалами и каждый переход, имеющий достаточное количество фишек во входных местах, должен срабатывать тогда, когда его счетчик достигнет некоторого значения, принадлежащего его временному интервалу). Устанавливаются взаимосвязи между рассматриваемыми эквивалентностями и показывается совпадение эквивалентностей в семантиках временных причинных сетей-процессов и временных причинных деревьев.

2. ВРЕМЕННЫЕ СЕТИ ПЕТРИ: СИНТАКСИС И ИНТЕРЛИВИНГОВАЯ СЕМАНТИКА

В этом разделе рассмотрим базовую терминологию непрерывно-временных сетей Петри и их интерливинговую семантику. Сначала напомним определения структуры и поведения сетей Петри. Пусть Act – множество действий.

Определение 1. (*Помеченная над* Act) *сеть Петри* (СП) – это набор $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$, где P – конечное множество мест, T – конечное множество переходов ($P \cap T = \varnothing$ и $P \cup T \neq \varnothing$), $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – отношение инцидентости, $\varnothing \neq M_0 \subseteq P$ – начальная разметка, $L : T \to Act$ – помечающая функция. Для элемента $x \in P \cup T$ определим множество ${}^\bullet x = \{y \mid (y, x) \in F\}$ входных и множество $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$ выходных элементов, которые для подмножества $X \subseteq P \cup T$ элементов обобщаются соответственно до множеств ${}^\bullet X = \bigcup_{x \in X} {}^\bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$.

Разметка M СП $\mathcal{N}$ – это произвольное подмножество P. Переход $t \in T$ *готов сработать* при разметке M, если ${}^\bullet t \subseteq M$[1]. Обозначим через $En(M)$ множество всех переходов, готовых сработать при разметке M. Если переход t готов сработать при

[1] Для удобства последующих определений здесь не используется классическое определение: переход $t \in T$ готов сработать при разметке M, если ${}^\bullet t \subseteq M$ и $M \cap t^\bullet = \varnothing$. Второе требование будет введено в определении свойства свободы от контактов.

разметке M, то его срабатывание приводит к новой разметке M' (обозначается $M \xrightarrow{t} M'$), если $M' = (M \setminus {}^\bullet t) \cup t^\bullet$. Будем использовать обозначение $M \xrightarrow{\vartheta} M'$, если $\vartheta = t_1 \ldots t_k$ и $M = M^0 \xrightarrow{t_1} M^1 \ldots M^{k-1} \xrightarrow{t_k} M^k = M'$ $(k \ge 0)$. Тогда, ϑ – это *последовательность срабатываний из* M (*в* M') и M' – *разметка, достижимая из разметки* M, в СП $\mathcal{N}$. Пусть $RM(\mathcal{N})$ – множество всех разметок, достижимых из M_0, в СП $\mathcal{N}$.

СП $\mathcal{N}$ называется *T-ограниченной*, если ${}^\bullet t \neq \varnothing \neq t^\bullet$ для всех переходов $t \in T$; *свободной от контактов*, если для произвольной разметки $M \in RM(\mathcal{N})$ и любого перехода t, готового сработать при разметке M, выполняется условие $M \cap t^\bullet = \varnothing$.

Под непрерывно-временной сетью Петри (ВСП) [23] понимается СП, в которой с каждым переходом связан временной интервал, указывающий возможные временные моменты срабатывания перехода, готового по наличию фишек в его входных местах; готовый переход может сработать, только когда достигнута нижняя граница и не превышена верхняя граница его интервала, и, если он еще не сработал, то обязан сработать, когда достигнута верхняя граница его интервала.

Область $\mathbb{T}$ временных значений – множество неотрицательных рациональных чисел. Считаем, что $[\tau_1, \tau_2]$ – замкнутый интервал между двумя временными значениями $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$. Также, бесконечность может появляться как правая граница в открытых справа интервалах. Пусть *Interv* – множество всех таких интервалов.

Определение 2. (*Помеченная над Act*) *временная сеть Петри* (ВСП) – это пара $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$, где $\mathcal{N}$ – (помеченная над *Act*) базовая сеть Петри и $D : T \to Interv$ – статическая временная функция, сопоставляющая каждому переходу временной интервал. Границы временного интервала $D(t) \in Interv$ называются ранним (*Eft*) и поздним (*Lft*) временами срабатывания перехода $t \in T$.

Состояние ВСП $\mathcal{TN}$ – это пара $S = (M, I)$, где M – разметка СП $\mathcal{N}$ и $I : En(M) \to \mathbb{T}$ – динамическая временная функция. Начальное состояние ВСП $\mathcal{TN}$ – это пара $S_0 = (M_0, I_0)$, где M_0 – начальная разметка СП $\mathcal{N}$ и $I_0(t) = 0$ для всех $t \in En(M_0)$. Переход t, готовый сработать при разметке M в СП $\mathcal{N}$, *готов сработать в состоянии* $S = (M, I)$ *в относительный момент времени* $\theta \in \mathbb{T}$ в ВСП $\mathcal{TN}$, если $(Eft(t) \le I(t) + \theta)$ и верно, что $(I(t') + \theta \le Lft(t')$ для всех $t' \in En(M))$. Если переход t готов сработать в состоянии $S = (M, I)$ в относительный момент времени θ, то его срабатывание приводит в новое состояние $S' = (M', I')$ (обозначается $S \xrightarrow{(t,\theta)} S'$) такое, что верно: $M \xrightarrow{t} M'$ и $\forall t' \in T_\lozenge$

$$I'(t') = \begin{cases} I(t') + \theta, & \text{если } t' \in En(M \setminus {}^\bullet t), \\ 0, & \text{если } t' \in En(M') \setminus En(M \setminus {}^\bullet t), \\ \text{не определено иначе.} \end{cases}$$

Будем писать $S \xrightarrow{\sigma} S'$, если $\sigma = (t_1, \theta_1) \ldots (t_k, \theta_k)$ и $S = S^0 \xrightarrow{(t_1,\theta_1)} S^1 \ldots S^{k-1} \xrightarrow{(t_k,\theta_k)} S^k = S'$ $(k \ge 0)$. Тогда, σ – *последовательность срабатываний из* S (*в* S') и S' – *состояние, достижимое из* S, в ВСП $\mathcal{TN}$. Пусть $\mathcal{FS}(\mathcal{TN})$ – множество всех последовательностей срабатываний из S_0 и $RS(\mathcal{TN})$ – множество всех состояний, достижимых из S_0, в ВСП $\mathcal{TN}$. Для $\sigma = (t_1, \theta_1) \ldots (t_k, \theta_k) \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$ $L(\sigma) = (a_1, \theta_1) \ldots (a_k, \theta_k)$, если $a_i = L(t_i)$ для всех $1 \le i \le k$. Определим *интерливинговый язык ВСП* $\mathcal{TN}$ следующим образом: $\mathcal{L}(\mathcal{TN}) = \{L(\sigma) \in (Act \times \mathbb{T})^* \mid \sigma \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})\}$.

ВСП $\mathcal{TN}$ называется *T-ограниченной*, если базовая СП *T*-ограничена; *свободной от контактов*, если для любого состояния $S = (M, I) \in RS(\mathcal{TN})$ и любого перехода t, готового сработать в состоянии S в относительный момент времени θ, верно, что $(M \setminus {}^\bullet t) \cap t^\bullet = \varnothing$[2]; *прогрессирующей по времени*, если для любой последовательности переходов $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subseteq T$ такой, что $t_i^\bullet \cap {}^\bullet t_{i+1} \neq \varnothing$ $(1 \le i < n)$ и $t_n^\bullet \cap {}^\bullet t_1 \neq \varnothing$, выполняется неравенство $\sum_{1 \le i \le n} Eft(t_i) > 0$[3]. В дальнейшем будем рассматривать только *T*-ограниченные, свободные от контактов и прогрессирующие по времени ВСП.

Пример 1. Пример помеченной над $Act = \{a, b, c, d\}$ ВСП $\mathcal{TN}$ показан на рис. 1, где места представлены окружностями, переходы – барьерами; рядом с элементами ВСП размещены их имена; между элементами, включенными в отношение инцидентности, изображены стрелки; каждое место, входящее в начальную разметку, отмечено наличием в нем фишки (жирной точки); значения помечающей и статической временной функций указаны рядом с переходами. Нетрудно проверить, что переходы t_1 и t_3 готовы сработать при начальной разметке $M_0 = \{p_1, p_2\}$ и, более того, готовы сработать в начальном состоянии $S_0 = (M_0, I_0)$, где $I_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \{t_1, t_3\}, \\ \text{не определено иначе,} \end{cases}$ в относительный момент времени $\theta \in [2, 3]$. При этом, $\sigma = (t_1, 3)\ (t_3, 0)\ (t_2, 2)\ (t_3, 2)\ (t_1, 0)\ (t_5, 2)\ (t_4, 0)$ –

[2] Заметим, что если базовая СП $\mathbb{N}$ свободна от контактов, то и ВСП $\mathcal{TN}$ свободна от контактов, но обратное неверно.

[3] Свойство прогрессирования по времени гарантирует корректность измененного определения совойства свободы от контактов.

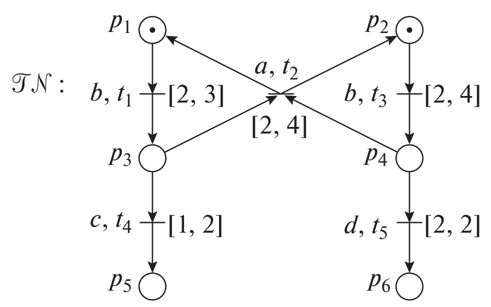

Рис. 1. Пример временной сети Петри.

последовательность срабатываний из S_0 в ВСП $\mathcal{TN}$. Кроме того, $\mathcal{TN}$ является T-ограниченной, свободной от контактов и прогрессирующей по времени. □

3. ПРИЧИННО-ЗАВИСИМЫЕ СЕМАНТИКИ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

3.1. Базовые определения

Сначала рассмотрим определения, связанные с временными сетями.

Определение 3. (*Помеченной над Act*) *временной сетью* называется конечная, ациклическая сеть $TN = (B, E, G, l, \tau)$, где B – множество условий, E – множество событий, $G \subseteq (B \times E) \cup \cup (E \times B)$ – отношение инцидентности такое, что $\{e \mid (e,b) \in G\} = \{e \mid (b,e) \in G\} = E$, $l : E \to Act$ – помечающая функция и $\tau : E \to \mathbb{T}$ – временная функция такая, что $eG^+e' \Rightarrow \tau(e) \le \tau(e')$.

Введем дополнительные обозначения для временной сети $TN = (B, E, G, l, \tau)$. Пусть $\prec = G^+$, $\preceq = G^*$ и $\tau(TN) = \max\{\tau(e) \mid e \in E\}$. Определим множества: ${}^\bullet x = \{y \mid (y,x) \in G\}$ и $x^\bullet = \{y \mid (x,y) \in G\}$ для $x \in B \cup E$; ${}^\bullet X = \bigcup_{x \in X} {}^\bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$ для $X \subseteq B \cup E$; ${}^\bullet TN = \{b \in B \mid {}^\bullet b = \varnothing\}$ и $TN^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \varnothing\}$.

$TN = (B, E, G, l, \tau)$ называется (*помеченной над Act*) *временной причинной сетью*, если $|{}^\bullet b| \le 1$ и $|b^\bullet| \le 1$ для всех условий $b \in B$. Заметим, что $\eta(TN) = (E_{TN}, \preceq_{TN} \cap (E_{TN} \times E_{TN}), l_{TN}, \tau_{TN})$ является (*помеченным над Act*) *временным частично-упорядоченным множеством* (*ВЧУМ*)[4].

[4] (Помеченный над *Act*) ВЧУМ – это набор $\eta = (X, \preceq, \lambda, \tau)$, состоящий из конечного множества элементов X; рефлексивного, антисимметричного и транзитивного отношения $\preceq$; помечающей функции λ: $X \to Act$ и временной функции τ: $X \to \mathbb{T}$ такой, что $e \preceq e' \Rightarrow \tau(e) \le \tau(e')$. Пусть $\tau(\eta) = \max\{\tau(x) \mid x \in X\}$.

Введем дополнительные определения и обозначения для временной причинной сети $TN = (B, E, G, l, \tau)$:

- $\downarrow e = \{x \mid x \preceq e\}$ – множество *предшественников события* $e \in E$, $Earlier(e) = \{e' \in E \mid \tau(e') < \tau(e)\}$ – множество *временных предшественников события* $e \in E$;

- $E' \subseteq E$ – *левозамкнутое* подмножество E, если $\downarrow e' \cap E \subseteq E'$ для каждого $e' \in E'$. Для такого подмножества будем использовать обозначение $Cut(E') = (E'^\bullet \cup {}^\bullet TN) \setminus {}^\bullet E'$. $E' \subseteq E$ – *непротиворечивое по времени* подмножество E, если $\tau(e') \le \tau(e)$ для всех $e' \in E'$ и $e \in E \setminus E'$;

- последовательность $\rho = e_1 \ldots e_k$ $(k \ge 0)$ событий из E – *линеаризация временной причинной сети* TN, если каждое событие из E встречается в последовательности только один раз и выполняется следующее условие: $(e_i \prec e_j \vee \tau(e_i) < \tau(e_j)) \Rightarrow i < j$ для всех $1 \le i,\ j \le k$. Определим множество $E_\rho^l = \bigcup_{1 \le i \le l} e_i$ $(0 \le l \le k)$. Очевидно, что E_ρ^l являются левозамкнутыми и непротиворечивыми по времени подмножествами E и, кроме того, $\tau(e_k) = \tau(TN)$.

Из определений временной причинной сети и ее линеаризации получаем справедливость следующей

Лемма 1. *Любая временная причинная сеть имеет линеаризацию.*

Временные причинные сети $TN = (B, E, G, l, \tau)$ и $TN' = (B', E', G', l', \tau')$ *изоморфны* (обозначается $TN \simeq TN'$), если существует биективное отображение β: $B \cup E \to B' \cup E'$ такое, что: (а) $\beta(B) = B'$ и $\beta(E) = E'$; (б) $xGy \Leftrightarrow \beta(x)G'\beta(y)$ для всех x, $y \in B \cup E$; (в) $l(e) = l'(\beta(e))$ и $\tau(e) = \tau'(\beta(e))$ для всех $e \in E$. Кроме того, будем говорить, что TN является префиксом TN' (обозначается $TN \to TN'$), если $B \subseteq B'$, E – левозамкнутое и непротиворечивое по времени подмножество E', $E' \setminus E = \{e\}$, $G = G' \cap (B \times E \cup E \times B)$, $l = l'|_E$ и $\tau = \tau'|_E$.

Пример 2. На рис. 2 показана временная причинная сеть $TN = (B, E, G, l, \tau)$, где условия представлены окружностями, а события – барьерами; рядом с элементами сети размещены их имена; между элементами, включенными в отношение инцидентности, изображены стрелки; значения функций l и τ указаны рядом с событиями. Определим временные причинные сети $TN' = (B', E', G', l', \tau')$, где $B' = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $E' = \{e_1, e_3\}$, $G' = G \cap (B' \times E' \cup E' \times \times B')\}$, $l' = l|_{E'}$, $\tau' = \tau|_{E'}$, и $TN'' = (B'', E'', G'', l'', \tau'')$, где $B'' = \{b_1, b_2, b_3\}$, $E'' = \{e_1\}$, $G'' = G \cap (B'' \times E'' \cup E'' \times \times B'')\}$, $l'' = l|_{E''}$, $\tau'' = \tau|_{E''}$. Легко проверить, что TN'' является префиксом TN'. □

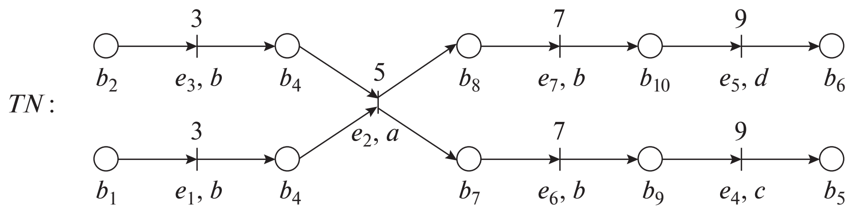

Рис. 2. Пример временной причинной сети.

3.2. Временные причинные сети-процессы временных сетей Петри

В этом разделе рассмотрим понятие временных причинных сетей-процессов ВСП, предложенное в статье [23].

Определение 4. Пусть $\mathcal{TN} = ((P, T, F, M_0, L), D)$ – ВСП и $TN = (B, E, G, l, \tau)$ – временная причинная сеть. Отображение φ: $B \cup E \to P \cup T$ называется *гомоморфизмом из* TN в $\mathcal{TN}$, если выполняются следующие условия:

- $\varphi(B) \subseteq P$, $\varphi(E) \subseteq T$;
- ограничение φ на ${}^\bullet e$ является биекцией между ${}^\bullet e$ и ${}^\bullet\varphi(e)$ и ограничение φ на $e^\bullet$ является биекцией между $e^\bullet$ и $\varphi(e)^\bullet$ для всех $e \in E$;
- ограничение φ на ${}^\bullet TN$ является биекцией между ${}^\bullet TN$ и M_0;
- $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$.

Пара $\pi = (TN, \varphi)$ называется *временным причинным сетью-процессом ВСП* $\mathcal{TN}$, если TN – временная причинная сеть и φ – гомоморфизм из TN в $\mathcal{TN}$.

Пусть $\pi = (TN, \varphi)$ – временной причинный сеть-процесс ВСП $\mathcal{TN}$, $B' \subseteq B_{TN}$ и $t \in En(\varphi(B'))$. Тогда глобальный момент времени, когда фишки появляются во всех входных местах перехода t, определяется следующим образом: $\mathbf{TOE}_\pi(B', t) = \max(\{\tau_{TN}({}^\bullet b) | b \in B'_{[t]} \setminus {}^\bullet TN\} \cup \{0\})$, где $B'_{[t]} = \{b \in B' | \varphi_{TN}(b) \in {}^\bullet t\}$.

Для того, чтобы значения временных функций временных причинных сетей-процессов ВСП соответствовали временным интервалам срабатывания сетевых переходов, вводится понятие корректных временных причинных сетей-процессов ВСП.

Определение 5. Временной причинный сеть-процесс $\pi = (TN, \varphi)$ ВСП $\mathcal{TN}$ называется *корректным*, если для каждого $e \in E$ выполняются следующие условия:

- $\tau(e) \geq \mathbf{TOE}_\pi({}^\bullet e, \varphi(e)) + Eft(\varphi(e))$,
- $\forall t \in En(\varphi(C_e)) \diamond \tau(e) \leq \mathbf{TOE}_\pi(C_e, t) + Lft(t)$, где $C_e = Cut(Earlier(e))$.

Пусть $\mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ – множество корректных временных причинных сетей-процессов ВСП $\mathcal{TN}$. Через $\mathcal{TP}os(\mathcal{TN}) = \{TP | \exists\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}): TP \simeq$[5] $\simeq \eta(TN)\}$ обозначим множество ВЧУМов, изоморфных ВЧУМам, полученным из корректных временных причинных сетей-процессов ВСП $\mathcal{TN}$.

Пример 3. Определим отображение φ из временной причинной сети TN (см. рис. 2) в ВСП $\mathcal{TN}$ (см. рис. 1) следующим образом: $\varphi(b_i) = p_i$ $(1 \leq i \leq 6)$, $\varphi(b_i) = p_{i-6}$ $(7 \leq i \leq 10)$ и $\varphi(e_i) = t_i$ $(1 \leq i \leq 5)$, $\varphi(e_6) = t_1$, $\varphi(e_7) = t_3$. Далее, для временной причинной сети TN', заданной в примере 2, определим $\varphi' = \varphi|_{E' \cup B'}$. Легко видеть, что $\pi = (TN, \varphi)$ и $\pi' = (TN', \varphi')$ являются временными причинными сетями-процессами ВСП $\mathcal{TN}$.

Для множества $\tilde{B} = \{b_3, b_4\} \subset B$ и перехода $t_2 \in En(\varphi(\tilde{B}))$ вычислим $\mathbf{TOE}_\pi(\tilde{B}, t_2) = \max(\{\tau_{TN}({}^\bullet b) | b \in \tilde{B}_{[t_2]} \setminus {}^\bullet TN\} \cup \{0\}) = \max(\{\tau(e_1) = 3, \tau(e_3) = 3\} \cup \{0\}) = 3$. Также, нетрудно проверить, что временные причинные сети-процессы $\pi = (TN, \varphi)$ и $\pi' = (TN', \varphi')$ являются корректными. □

Будем говорить, что $\pi = (TN, \varphi)$ и $\pi' = (TN', \varphi')$ из $\mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ *изоморфны* (обозначается $\pi \simeq \pi'$), если существует изоморфизм $f: TN \simeq TN'$ такой, что $\varphi(x) = \varphi'(f(x))$ для всех $x \in B \cup E$; а также будем писать $\pi \to \pi'$ в $\mathcal{TN}$, если $TN \to TN'$ и $\varphi = \varphi'|_{B \cup E}$.

Рассмотрим взаимосвязи между последовательностями срабатываний и корректными временными причинными сетями-процессами ВСП. Для $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ определим функцию FS_π, которая отображает линеаризацию $\rho = e_1 \ldots e_k$ TN в последовательность вида: $FS_\pi(\rho) = (\varphi(e_1), \tau(e_1) - 0) \ldots (\varphi(e_k), \tau(e_k) - \tau(e_{k-1}))$.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{TN}$ – ВСП. Тогда*

[5] Два ВЧУМ $\eta = (X, \preceq, \lambda, \tau)$ и $\eta' = (X', \preceq', \lambda', \tau')$ изоморфны (обозначается $\eta \simeq \eta'$), если существует биекция β: $X \to X'$ такая, что (а) $x \preceq y \Leftrightarrow \beta(x) \preceq' \beta(y)$ для всех $x, y \in X$; (б) $\lambda(x) = \lambda'(\beta(x))$ и $\tau(x) = \tau'(\beta(x))$ для всех $x \in X$.

(а) *если* $\pi = (TN, \varphi) \in \mathscr{CP}(\mathcal{TN})$ *и* ρ — *линеаризация* TN, *то существует единственная последовательность срабатываний* $FS_\pi(\rho) \in \mathscr{FS}(\mathcal{TN})$;

(б) *если* $\sigma \in \mathscr{FS}(\mathcal{TN})$, *то существует единственный (с точностью до изоморфизма) временной причинный сеть-процесс* $\pi_\sigma = (TN, \varphi) \in \mathscr{CP}(\mathcal{TN})$ *и единственная линеаризация* ρ_σ TN *такие, что* $FS_{\pi_\sigma}(\rho_\sigma) = \sigma$.

Доказательство. Пункт (*а*) без факта единственности последовательности срабатываний $FS_\pi(\rho)$ и пункт (*б*) без факта единственности линеаризации ρ_σ — это переформулировки результатов, доказанных в теоремах соответственно 19 и 21, 22 в [23].

(*а*) Единственность последовательности срабатываний $FS_\pi(\rho)$ следует из определений гомоморфизма φ и функции FS_π.

(*б*) Пусть $\rho_\sigma = e_1 \dots e_n$ $(n \geq 0)$ — линеаризация TN такая, что $FS_{\pi_\sigma}(\rho_\sigma) = \sigma = (t_1, \theta_1)\dots(t_n, \theta_n) \in \mathscr{FS}(\mathcal{TN})$. Предположим обратное, т.е. существует линеаризация $\overline{\rho} = \overline{e}_1 \dots \overline{e}_n$ TN такая, что $FS_{\pi_\sigma}(\overline{\rho}) = \sigma$ и $\overline{\rho} \neq \rho_\sigma$. Так как все линеаризации TN конечны, то можно найти минимальное k такое, что $e_k \neq \overline{e}_k$. Ясно, что $\varphi(e_k) = \varphi(\overline{e}_k) = t_k$. Поскольку $\mathcal{TN}$ — T-ограниченная ВСП, то ${}^\bullet t_k \neq \varnothing$. Возьмем произвольное место $p_k \in {}^\bullet t_k$. По определению гомоморфизма, существуют условия $b \in {}^\bullet e_k$ и $\overline{b} \in {}^\bullet \overline{e}_k$ такие, что $\varphi(b) = \varphi(\overline{b}) = p_k$. В силу определения временной причинной сети, верно, что $b \neq \overline{b}$.

Рассмотрим возможные случаи.

— $\{b, \overline{b}\} \subseteq {}^\bullet TN$. Тогда верно, что $p_k \in M_0$. Это противоречит определению гомоморфизма φ.

— $b \in {}^\bullet TN$ и $\overline{b} \notin {}^\bullet TN$ (случай, когда $\overline{b} \in {}^\bullet TN$ и $b \notin {}^\bullet TN$, аналогичен). Поскольку $b \in {}^\bullet TN$, то получаем, что $p_k \in M_0$, по определению гомоморфизма φ. Тогда имеем, что $b = b_{0,p_k}$, по построению π_σ в [23]. Предполагая, что $\overline{b} \notin {}^\bullet TN$, найдем событие $\tilde{e}$ такое, что $\{\tilde{e}\} = {}^\bullet \overline{b}$. Так как k — минимальное, то в обеих линеаризациях ρ и $\overline{\rho}$ событие $\tilde{e}$ имеет один и тот же порядковый номер, т.е. $\tilde{e} = e_i = \overline{e}_i$ для некоторого $0 < i < k$. По определению функции FS_{π_σ}, верно, что $\varphi(\tilde{e}) = t_i$. Тогда $p_k \in t_i^\bullet$, согласно определению φ. Кроме того, имеем, что $\overline{b} = b_{i,p_k}$, в силу построения π_σ в [23]. Таким образом, получили противоречие со свойством (41) из [23]: не существует b_{i,p_k} для любого $0 < i < k$.

— $b, \overline{b} \notin {}^\bullet TN$. Следовательно, существует событие $\tilde{e}$ $(\hat{e})$ такое, что $\{\tilde{e}\} = {}^\bullet b$ $(\{\hat{e}\} = {}^\bullet \overline{b})$. В силу определения гомоморфизма φ, верно, что $\tilde{e} \neq \hat{e}$. Так как k — минимальное, то в обеих линеаризациях ρ и $\overline{\rho}$ событие $\tilde{e}$ $(\hat{e})$ имеет один и тот же порядковый номер, т.е. $\tilde{e} = e_i = \overline{e}_i$ для некоторого $1 \leq i < k$ $(\hat{e} = e_j = \overline{e}_j$ для некоторого $1 \leq j < k)$. Тогда $i \neq j$, согласно определению линеаризации. По определению функции FS_{π_σ}, имеем, что $\varphi(\tilde{e}) = t_i$ $(\varphi(\hat{e}) = t_j)$. Из определения гомоморфизма следует, что $p_k \in t_i^\bullet$ $(p_k \in t_j^\bullet)$. По построению π_σ в [23] верно, что $b = b_{i,p_k}$ $(\overline{b} = b_{j,p_k})$. В случае, когда $i < j < k$ $(j < i < k)$, получаем противоречие со свойством (41) из [23]: не существует b_{l,p_k} для любого $i < l < k$ $(j < l < k)$. □

Пример 4. Для временного причинного сети-процесса $\pi = (TN, \varphi)$ ВСП $\mathcal{TN}$ (см. пример 3) и линеаризации $\rho = e_1e_3e_2e_7e_6e_5e_4$ временной причинной сети TN получаем, что $FS_\pi(\rho) = (t_1, 3)\ (t_3, 0)\ (t_2, 2)\ (t_3, 2)\ (t_1, 0)\ (t_5, 2)\ (t_4, 0)$ является последовательностью срабатываний ВСП $\mathcal{TN}$ (см. пример 1). □

Используя определение префикса временной причинной сети и утверждение 1, легко показать, что если последовательность срабатываний и временной причинный сеть-процесс ВСП взаимосвязаны, то их непосредственные расширения тоже взимосвязаны.

Лемма 2. *Пусть* $\sigma \in \mathscr{FS}(\mathcal{TN})$ *и* $\pi \in \mathscr{CP}(\mathcal{TN})$ *такие, что* $\sigma = FS_\pi(\rho)$, *где* ρ — *линеаризация* TN_π. *Тогда*

(а) *если* $\sigma(t, \theta) \in \mathscr{FS}(\mathcal{TN})$, *то существует* $\tilde{\pi} \in \mathscr{CP}(\mathcal{TN})$ *такой, что* $\pi \rightarrow \tilde{\pi}$ *в* $\mathcal{TN}$ *и* $\sigma(t, \theta) = FS_{\tilde{\pi}}(\rho e)$, *где* ρe — *линеаризация* $TN_{\tilde{\pi}}$;

(б) *если* $\pi \rightarrow \tilde{\pi}$ *в* $\mathcal{TN}$, *то существует* $\sigma(t, \theta) \in \mathscr{FS}(\mathcal{TN})$ *такая, что* $\sigma(t, \theta) = FS_{\tilde{\pi}}(\rho e)$, *где* ρe — *линеаризация* $TN_{\tilde{\pi}}$.

3.3. Временные причинные деревья временных сетей Петри

Причинные деревья [8] — это деревья синхронизации, у которых в пометках дуг кроме имен действий содержится дополнительная информация о предшественниках этих действий, что обеспечивает интерливинговое представление параллельных процессов с описанием причинной зависимости между их действиями. Добавляя времена выполнения действий в пометки причинных деревьев, получаем временные причинные деревья. Во временном причинном дереве ВСП $\mathcal{TN}$ вершинами являются последовательности срабатываний из множества $\mathscr{FS}(\mathcal{TN})$ и дуги проводятся между двумя вершинами, если одна последовательность является непосредственным расширением другой. Информация о предшественниках для пометок дуг получается из отношений инцидентности соответствующих временных причинных сетей-процессов ВСП $\mathcal{TN}$.

Определение 6. *Временное причинное дерево ВСП* $\mathcal{TN}$, $TCT(\mathcal{TN})$, — это дерево $(\mathcal{FS}(\mathcal{TN}), A, \phi)$, где $\mathcal{FS}(\mathcal{TN})$ — множество вершин с корнем ε; $A = \{(\sigma, \sigma(t,\theta)) | \sigma, \sigma(t,\theta) \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})\}$ — множество дуг; ϕ — помечающая функция такая, что $\phi(\epsilon) = \epsilon$ и $\phi(\sigma, \sigma(t,\theta)) = (l_{\mathcal{TN}}(t), \theta, K)$, где $K = \{n - l + 1 \mid \sigma(t,\theta) = FS_{\pi_{\sigma(t,\theta)}}(e_1 \dots e_n e)$, где $e_1 \dots e_n e$ — линеаризация $TN_{\pi_{\sigma(t,\theta)}}$, и $e_l \prec_{TN_{\pi_{\sigma(t,\theta)}}} e\}$. Пусть $path(\sigma)$ — путь в $TCT(\mathcal{TN})$ из корня в вершину σ[6]. Через $\mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN})) = \{\phi(path(\sigma)) \in (Act \times \mathbb{T} \times 2^{\mathbb{N}})^* | \sigma \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})\}$ обозначим множество последовательностей пометок путей временного причинного дерева ВСП $\mathcal{TN}$.

Пример 5. Рассмотрим ВСП $\mathcal{TN}$ (см. рис. 1) и последовательность срабатываний $\sigma = (t_1, 3)$ $(t_3, 0)$ $(t_2, 2)$ $(t_3, 2)$ $(t_1, 0)$ $(t_5, 2)$ $(t_4, 0) \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$. Получаем, что последовательность пометок пути из корня в вершину σ имеет вид: $\phi(path(\sigma)) = (a, 3, \varnothing)$ $(b, 0, \varnothing)$ $(a, 2, \{1, 2\})$ $(b, 2, \{1, 2, 3\})$ $(a, 0, \{2, 3, 4\})$ $(d, 2, \{2, 3, 4, 5\})$ $(c, 0, \{2, 4, 5, 6\})$. □

Установим взаимосвязи между корректными временными причинными сетями-процессами и помеченными путями во временных причинных деревьях двух ВСП.

Утверждение 2. *Пусть* $\mathcal{TN}$ *и* $\mathcal{TN}'$ *— ВСП и* $TCT(\mathcal{TN}) = (\mathcal{FS}(\mathcal{TN}), A, \phi)$ *и* $TCT(\mathcal{TN}') = (\mathcal{FS}(\mathcal{TN}'), A', \phi')$ *— их временные причинные деревья. Тогда*

(а) *если* $\pi \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ *и* $\pi' \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}')$ *— временные сети-процессы и* $f: \eta(TN_\pi) \to \eta(TN_{\pi'})$ *— изоморфизм, то* $\phi(path(FS_\pi(\rho))) = \phi'(path(FS_{\pi'}(f(\rho))))$ *для любой линеаризации* ρ TN_π;

(б) *если* $\phi(path(\sigma)) = \phi'(path(\sigma'))$ *для* $\sigma \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN}')$ *и* $\sigma' \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$, *то существует изоморфизм* $f: \eta(TN_{\pi_\sigma}) \to \eta(TN_{\pi_{\sigma'}})$ *такой, что* $f(\rho_\sigma) = \rho_{\sigma'}$.

Доказательство. (*а*) Следует из утверждения 1(*а*) и свойств изоморфизма *f*.

(*б*) Следует из утверждения 1(*б*), определения 6 и свойств гомоморфизма φ и функции *FS*. □

Рассмотрим и докажем вспомогательный полезный факт.

Утверждение 3. Пусть $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ — ВСП. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{TN}) = \mathcal{L}(\mathcal{TN}') \Leftarrow \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN})) = \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}')) \Leftrightarrow \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}) = \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}')$.

[6] Мы определяем $path(\epsilon) = \epsilon$. Заметим, что в $TCT(\mathcal{TN})$ для любой вершины $\sigma \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$ существует путь из корня в вершину σ.

Доказательство. Факт, что $\mathcal{L}(\mathcal{TN}) = \mathcal{L}(\mathcal{TN}') \Leftarrow \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN})) = \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}'))$, непосредственно следует из определений.

Теперь проверим, что $\mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN})) = \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}')) \Rightarrow \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}') = \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}_2)$. Возьмем произвольное ВЧУМ $TP \in \mathcal{TPos}(\mathcal{TN})$. Это означает, что можно найти временной причинный сеть-процесс $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ такой, что $\eta(TN) \simeq TP$. Рассмотрим произвольную линеаризацию ρ TN. Согласно лемме 1, хотя бы одна линеаризация TN существует. Из утверждения 1(*а*) следует, что найдется последовательность срабатываний $\sigma = FS_\pi(\rho) \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$. Согласно утверждению 1(*б*), можем без потери общности считать, что $\pi = \pi_\sigma$ и $\rho = \rho_\sigma$. По определению, в $TCT(\mathcal{TN})$ существует путь *u* из корня в вершину σ. Кроме того, верно, что $\phi(u) \in \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN})) = \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}'))$. Это означает наличие в $TCT(\mathcal{TN}')$ пути u' из корня в вершину $\sigma' \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN}')$ такого, что $\phi(u') = \phi(u)$. В силу утверждения 1(*б*), существуют единственный (с точностью до изоморфизма) временной причинный сеть-процесс $\pi_{\sigma'} = (TN_{\sigma'}, \varphi_{\sigma'}) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}')$ и единственная линеаризация $\rho_{\sigma'}$ $TN_{\sigma'}$ такие, что $FS_{\pi_{\sigma'}}(\rho_{\sigma'}) = \sigma'$. Из утверждения 2(*б*) следует, что найдется изоморфизм $f: \eta(TN_\sigma) \to \eta(TN_{\sigma'})$ такой, что $f(\rho_\sigma) = \rho_{\sigma'}$. Таким образом, получаем, что $\eta(TN_{\sigma'}) \simeq TP$, т.е. $TP \in \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}')$.

И наконец, проверим, что $\mathcal{TPos}(\mathcal{TN}) = \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}') \Rightarrow \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN})) = \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}'))$. Возьмем произвольное $w \in \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}))$. Это означает, что существует путь *u* в $TCT(\mathcal{TN})$ из корня в вершину $\sigma \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$ такой, что $\phi(u) = w$. Согласно утверждению 1(*б*), можно найти единственный (с точностью до изморфизма) временной причинный сеть-процесс $\pi_\sigma = (TN_\sigma, \varphi_\sigma) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ и единственную линеаризацию ρ_σ TN_σ такие, что $FS_{\pi_\sigma}(\rho_\sigma) = \sigma$. Значит, верно, что $\eta(TN_\sigma) \in \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}) = \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}')$. Тогда существует временной причинный сеть-процесс $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}')$ такой, что $\eta(TN_\sigma) \simeq \eta(TN')$. Следовательно, найдется изоморфизм $f: \eta(TN_\sigma) \to \eta(TN')$. Применяя утверждение 2(*а*), получаем, что $w = \phi(path(FS_{\pi_\sigma}(\rho_\sigma))) = \phi'(path(FS_{\pi'}(f(\rho_\sigma)))) \in \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}'))$. □

4. ТЕСТОВЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

При интерливинговом подходе к определению тестовой эквивалентности в качестве тестов рассматриваются последовательности *w* выполняемых действий (вычисления системы) и множества *W* возможных дальнейших действий. Процесс проходит тест, если после выполнения

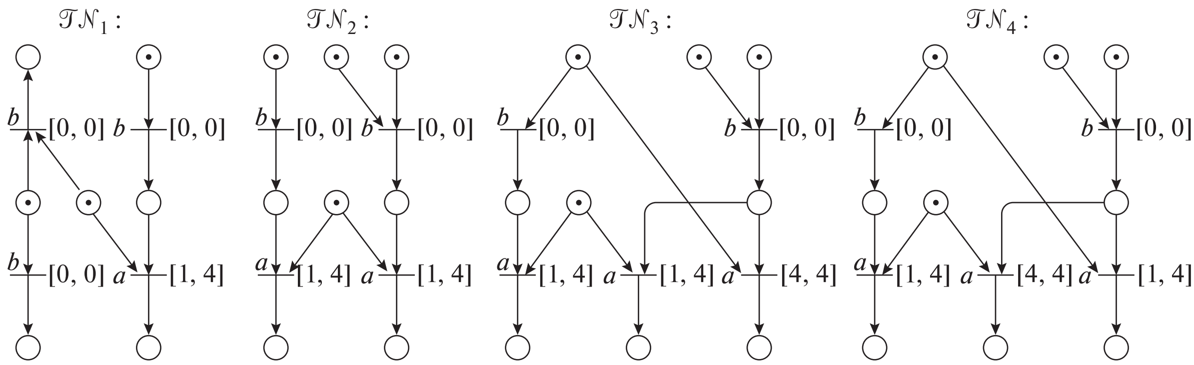

Рис. 3.

каждой последовательности w действий дальше может выполниться хотя бы одно действие из W. Два процесса тестово эквивалентны, если они проходят одно и то же множество тестов. Во временном варианте добавляется информация о временах выполнения действий.

Определение 7. Пусть $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ – ВСП.

Для последовательности $w \in (Act \times \mathbb{T})^*$ и множества $W \subseteq (Act \times \mathbb{T})$, $\mathcal{TN}$ **after** w $\mathbf{MUST}_{int}$ W, если для всех $\sigma \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$ таких, что $L(\sigma) = w$, существуют $(a, \theta) \in W$ и $\sigma(t, \theta) \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN})$ такие, что $L(\sigma(t, \theta)) = w(a, \theta)$.

$\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ называются *ИНТ-тестово эквивалентными* (обозначается $\mathcal{TN} \sim_{int} \mathcal{TN}'$), если для любой последовательности $w \in (Act \times \mathbb{T})^*$ и любого множества $W \subseteq (Act \times \mathbb{T})$, $\mathcal{TN}$ **after** w $\mathbf{MUST}_{int}$ $W \Leftrightarrow \mathcal{TN}'$ **after** w $\mathbf{MUST}_{int}$ W.

Пример 6. ВСП $\mathcal{TN}_2$, $\mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_4$, изображенные на рис. 3, ИНТ-тестово эквивалентны, тогда как $\mathcal{TN}_1$ и $\mathcal{TN}_2$ не являются таковыми. Легко проверить, что $TCT(\mathcal{TN}_2)$ **after** $w = (b,0)(b,0)$ $\mathbf{MUST}_{int}$ $W = \{(a, 3.9)\}$. Однако в $TCT(\mathcal{TN}_1)$ существует последовательность срабатываний, которая помечена w и после которой невозможно срабатывание перехода, помеченного a, в момент времени 3.9. Таким образом, не выполняется $TCT(\mathcal{TN}_1)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{int}$ W. □

Тестовые эквивалентности, учитывающие отношение причинной зависимости между действиями, были впервые введены Асето и др. в статье [5] в контексте моделей структур событий. При этом в качестве вычислений процесса вместо последовательностей выполняемых действий рассматривались их частично-упорядоченные мультимножества (ЧУММы). В работе [6] вместо множеств дальнейших действий использовались непосредственные расширения выполняемых ЧУММов. Кроме того, в [6] была предложена еще одна версия причинной тестовой эквивалентности, которая использует в качестве вычислений ЧУМы выполняемых действий и которая, как было показано, является более строгой эквивалентностью. Следуя этому подходу, далее определяется временная ЧУМ-тестовая эквивалентность для ВСП с использованием ее корректных временных причинных сетей-процессов.

Определение 8. Пусть $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ – ВСП.

Для ВЧУМ TP и множества $\mathbf{TP}$ ВЧУМов такого, что $TP \prec^7 TP'$ для любого $TP' \in \mathbf{TP}$, $\mathcal{TN}$ **after** TP $\mathbf{MUST}_{tpos}$ $\mathbf{TP}$, если для любого $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ и для любого изоморфизма f: $\eta(TN) \to TP$ существуют $TP' \in \mathbf{TP}$, $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ и изоморфизм f': $\eta(TN') \to TP'$ такие, что $\pi \to \pi'$ и $f \subseteq f'$.

$\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ называются *ВЧУМ-тестово эквивалентными* (обозначается $\mathcal{TN} \sim_{tpos} \mathcal{TN}'$), если для любого ВЧУМ TP и любого множества $\mathbf{TP}$ ВЧУМов такого, что $TP \prec TP'$ для всех $TP' \in \mathbf{TP}$, выполняется условие: $\mathcal{TN}$ **after** TP $\mathbf{MUST}_{tpos}$ $\mathbf{TP}' \Leftrightarrow$ $\mathcal{TN}'$ **after** TP $\mathbf{MUST}_{tpos}$ $\mathbf{TP}$.

Пример 7. Рассмотрим ВСП $\mathcal{TN}_2$, $\mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_4$, изображенные на рис. 3. Легко видеть, что $\mathcal{TN}_2$ и $\mathcal{TN}_3$ ВЧУМ-тестово эквивалентны, тогда как $\mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_4$ не являются таковыми. Убедимся в последнем. Определим ВЧУМ $TP = (\{x_1, x_2\}, \preceq, \lambda, \tau)$, где $\preceq = \{(x_i, x_i) \mid 1 \le i \le 2\}$, $\lambda(x_1) = \lambda(x_2) = b$, $\tau(x_1) = \tau'(x_2) = 0$; и ВЧУМ $TP' = (\{x_1, x_2, x_3\}, \preceq', \lambda', \tau')$ где $\preceq' = \{(x_i, x_i) \mid 1 \le i \le 3\} \cup \{(x_2, x_3)\}$, $\lambda'(x_1) = \lambda'(x_2) = b$, $\lambda'(x_3) = a$, $\tau'(x_1) = \tau'(x_2) = 0$ и $\tau'(x_3) = 3.9$. Для любого временного причинного сети-процесса $\pi_3 = (TN_3, \varphi_3) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_3)$, в котором E_{TN_3} состоит из двух параллельных событий с пометками b и времен-

[7] ВЧУМ $\eta = (X, \preceq, \lambda, \tau)$ называется *префиксом* ВЧУМ $\eta' = (X', \preceq', \lambda', \tau')$ (обозначается $\eta \prec \eta'$), если $X \subseteq X'$, $X' \backslash X = \{x\}$, $\preceq = \preceq' \cap (X \times X)$, $\lambda = \lambda'|_X$, $\tau = \tau'|_X$ и x является максимальным относительно $\preceq'$ элементом X'.

ными значениями, равными 0, и для любого изоморфизма $f_3 : \eta(TN_3) \to TP$ можно найти временной причинный сеть-процесс $\pi'_3 = (TN'_3, \varphi'_3) \in \mathscr{CP}(\mathscr{TN}_3)$, в котором $E_{TN'_3}$ состоит из двух параллельных событий с пометками b и временными значениями 0 и третьего события с пометкой a и временным значением 3.9, находящегося в отношении причинной зависимости с одним из b, и изоморфизм $f'_3 : \eta(TN'_3) \to TP'$ такие, что $\pi_3 \to \pi'_3$ и $f_3 \subset f'_3$. Однако, это не так в случае ВСП $\mathscr{TN}_4$. □

Далее определим тестовую эквивалентность для ВСП на основе их временных причинных деревьев. При этом будем придерживаться метода, использованного для модели структур событий в [6]. Тесты будут строиться с учетом временных значений на основе множества пометок $Act \times \mathbb{T} \times 2^{\mathbb{N}}$ дуг деревьев.

Определение 9. Пусть $\mathscr{TN}$ и $\mathscr{TN}'$ – ВСП и $TCT(\mathscr{TN}) = (\mathscr{FS}(\mathscr{TN}), A, \phi)$ и $TCT(\mathscr{TN}') = (\mathscr{FS}(\mathscr{TN}'), A', \phi')$ – их временные причинные деревья.

Для последовательности $w \in (Act \times \mathbb{T} \times 2^{\mathbb{N}})^*$ и множества $\mathbf{W} \subseteq (Act \times \mathbb{T} \times 2^{\mathbb{N}})$, $TCT(\mathscr{TN})$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$, если для всех путей u в $TCT(\mathscr{TN})$ из корня в вершину n таких, что $\phi(u) = w$, существуют пометка $(a, d, K) \in \mathbf{W}$ и дуга r из вершины n такие, что $\phi(r) = (a, d, K)$;

$\mathscr{TN}$ и $\mathscr{TN}'$ называются *ВПД-тестово эквивалентными* (обозначается $\mathscr{TN} \sim_{tct} \mathscr{TN}'$), если для любой последовательности $w \in (Act \times \mathbb{T} \times 2^{\mathbb{N}})^*$ и для любого множества $\mathbf{W} \subseteq (Act \times \mathbb{T} \times 2^{\mathbb{N}})$, $TCT(\mathscr{TN})$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W} \Leftrightarrow TCT(\mathscr{TN}')$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$.

Пример 8. Рассмотрим ВСП $\mathscr{TN}_2$, $\mathscr{TN}_3$ и $\mathscr{TN}_4$, изображенные на рис. 3. Легко видеть, что $\mathscr{TN}_2$ и $\mathscr{TN}_3$ ВПД-тестово эквивалентны, а $\mathscr{TN}_3$ и $\mathscr{TN}_4$ не являются таковыми. Убедимся в последнем факте. Для этого определим $w = (b, 0, \varnothing)(b, 0, \varnothing)$ и $\mathbf{W} = \{(a, 3.9, \{1\})\}$. Легко проверить, что $TCT(\mathscr{TN}_3)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$. В $TCT(\mathscr{TN}_4)$ существуют два пути, помеченных $(b, 0, \varnothing)(b, 0, \varnothing)$, один из них заканчивается в вершине, из которой есть дуга с пометкой $(a, 3.9, \{1\})$, а из вершины, в которую ведет другой путь, такой дуги нет. Таким образом, не выполняется $TCT(\mathscr{TN}_4)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$. □

Из определений ИНТ-, ВЧУМ- и ВПД-тестовых эквивалентностей очевидным образом следует

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{TN}_1$ и $\mathscr{TN}_2$ – ВСП. Тогда*

$$\mathscr{TN}_1 \sim_{int} \mathscr{TN}_2 \Rightarrow \mathscr{L}(\mathscr{TN}_1) = \mathscr{L}(\mathscr{TN}_2),$$

$$\mathscr{TN}_1 \sim_{tpos} \mathscr{TN}_2 \Rightarrow \mathscr{TP}os(\mathscr{TN}_1) = \mathscr{TP}os(\mathscr{TN}_2),$$

$$\mathscr{TN}_1 \sim_{tct} \mathscr{TN}_2 \Rightarrow \mathscr{L}(TCT(\mathscr{TN}_1)) = \mathscr{L}(TCT(\mathscr{TN}_2)).$$

Установим связи между ИНТ- и ВПД-тестовыми эквивалентностями.

Теорема 1. $\mathscr{TN}_1 \sim_{tct} \mathscr{TN}_2 \Rightarrow \mathscr{TN}_1 \sim_{int} \mathscr{TN}_2$.

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{TN}_1 \sim_{tct} \mathscr{TN}_2$. Покажем, что верно $\mathscr{TN}_1 \sim_{int} \mathscr{TN}_2$. Предположим обратное, т.е. существуют $w \in (Act \times \mathbb{T})^*$ и $W \subseteq (Act \times \mathbb{T})$ такие, что $\mathscr{TN}_1$ **after** w $\mathbf{MUST}_{int}$ W, однако $\neg(\mathscr{TN}_2$ **after** w $\mathbf{MUST}_{int}$ $W)$. Последнее означает, что существует $\sigma_2 \in \mathscr{FS}(\mathscr{TN}_2)$ такая, что $L(\sigma_2) = w$, и для любых $(a, \theta) \in W$ и $\sigma_2(t', \theta) \in \in \mathscr{FS}(\mathscr{TN}_2)$ не верно, что $L(\sigma_2(t', \theta)) = w(a, \theta)$. Используя определения, получаем, что $w \in \mathscr{L}(\mathscr{TN}_2)$ и, более того, $\tilde{w} = \phi_2(path(\sigma_2)) \in \in \mathscr{L}(TCT(\mathscr{TN}_2))$, при этом $\tilde{w}|_{(Act \times \mathbb{T})^*} = w$. Определим множество $\mathbf{W} = \{(a, \theta, K) | (a, \theta) \in W$, $\exists \sigma \in \mathscr{FS}(\mathscr{TN}_1)$: $L(\sigma) = w$ и $\phi_1(path(\sigma)) = \tilde{w}$, $\exists$ дуга r из σ в $TCT(\mathscr{TN}_1)$: $\phi_1(r) = (a, \theta, K)\}$. Покажем, что $\mathscr{TN}_1$ **after** $\tilde{w}$ $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$. Возьмем произвольную $\sigma_1 \in \mathscr{FS}(\mathscr{TN}_1)$ такую, что $\phi_1(path(\sigma_1)) = \tilde{w}$. Такая σ_1 существует, поскольку $\tilde{w} \in \mathscr{L}(TCT(\mathscr{TN}_1))$, по лемме 3. Более того, имеем, что $w \in \mathscr{L}(\mathscr{TN}_1)$, по утверждению 3. Так как $\mathscr{TN}_1$ **after** w $\mathbf{MUST}_{int}$ W, то существуют $(a, \theta) \in W$ и $\sigma_1(t, \theta) \in \mathscr{FS}(\mathscr{TN}_1)$ такие, что $L(\sigma_1(t, \theta)) = w(a, \theta)$. Согласно построению временного причинного дерева, найдется дуга $r = (\sigma_1, \sigma_1(t, \theta))$ в $TCT(\mathscr{TN}_1)$ такая, что $\phi_1(r) = (a, \theta, K)$. Значит, имеем, что $\phi_1(r) \in \mathbf{W}$. В силу произвольности выбора σ_1, верно, что $\mathscr{TN}_1$ **after** $\tilde{w}$ $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$. Таким образом, пришли к противоречию, так как легко проверить, что $\neg(\mathscr{TN}_2$ **after** $\tilde{w}$ $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W})$. □

В заключение, покажем совпадение тестовых эквивалентностей для ВСП в семантиках временных частично-упорядоченных множеств и временных причинных деревьев.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{TN}_1$ и $\mathscr{TN}_2$ – ВСП. Тогда*

$$\mathscr{TN}_1 \sim_{tpos} \mathscr{TN}_2 \Leftrightarrow \mathscr{TN}_1 \sim_{tct} \mathscr{TN}_2.$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство слева направо (доказательство справа налево аналогично). Пусть $TCT(\mathscr{TN}_i) = (\mathscr{FS}(\mathscr{TN}_i), A_i, \phi_i)$ ($i = 1, 2$). Предположим, что $\mathscr{TN}_1 \sim_{tpos} \mathscr{TN}_2$. Тогда, согласно лемме 3, имеем $\mathscr{TP}os(\mathscr{TN}_1) = \mathscr{TP}os(\mathscr{TN}_2)$. По утверждению 3, получаем, что $\mathscr{L}(TCT(\mathscr{TN}_1)) = \mathscr{L}(TCT(\mathscr{TN}_2))$. Покажем, что $\mathscr{TN}_1 \sim_{tct} \mathscr{TN}_2$. Возьмем произвольные $w \in (Act \times \mathbb{T} \times 2^{\mathbb{N}})^*$ и $\mathbf{W} \subseteq (Act \times \mathbb{T} \times 2^{\mathbb{N}})$. Без потери общности полагаем, что $|w| = n$ $(n \geq 0)$. Предположим, что $TCT(\mathscr{TN}_1)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$. Проверим, что $TCT(\mathscr{TN}_2)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$.

Если $w \notin \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}_1)) = \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}_2))$, то результат очевиден. Рассмотрим случай, когда $w \in \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}_1)) = \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}_2))$. Тогда можно выбрать любой путь u из корня в некоторую вершину $\sigma \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN}_1)$ такую, что $\phi_1(u) = w$. Согласно утверждению 1(*б*), существует единственный (с точностью до изоморфизма) временной причинный сеть-процесс $\pi_\sigma = (TN_\sigma, \varphi_\sigma) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_1)$ и единственная линеаризация $\rho_\sigma = e_1^\sigma \ldots e_n^\sigma$ TN_σ такие, что $FS_{\pi_\sigma}(\rho_\sigma) = \sigma$. Обозначим $TP_w = \eta(TN_\sigma) \in \in \mathcal{TP}os(\mathcal{TN}_1)$.

Для каждой $(a, \theta, K) \in \mathbf{W}$ сконструируем ВЧУМ $TP_{(a,\theta,K)} = (X, \preceq, \lambda, \tau)$ следующим образом: $X = E_{TN_\sigma} \cup \{e_{(a,\theta,K)}\}$ $(e_{(a,\theta,K)} \notin E_{TN_\sigma})$; $\preceq = \preceq_{TN_\sigma} \cup \{(e_{n-k+1}^\sigma, e_{(a,\theta,K)}) | k \in K\}$; $\lambda|_{E_{TN_\sigma}} = \lambda_{TN_\sigma}$, $\lambda(e_{(a,\theta,K)}) = a$; $\tau|_{E_{TN_\sigma}} = \tau_{TN_\sigma}$, $\tau(e_{(a,\theta,K)}) = \tau(TN_\sigma) + \theta$. Обозначим множество всех построенных ВЧУМ как $\mathbf{TP_W} = \{TP_{(a,\theta,K)} | (a, \theta, K) \in \mathbf{W}\}$.

Проверим, что $\mathcal{TN}_1$ **after** TP_w $\mathbf{MUST}_{tpos}$ $\mathbf{TP}_W$. Возьмем произвольный временной причинный сеть-процесс $\pi_1 = (TN_1, \varphi_1) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_1)$ и изоморфизм f_1: $\eta(TN_1) \to TP_w$. Так как $TP_w \in \mathcal{TP}os(\mathcal{TN}_1)$, то такие π_1 и f_1 существуют. Из утверждения 2(*a*) получаем, что $e_1^1 \ldots e_n^1 = \rho_1 = (f_1)^{-1} : \eta(TN_\sigma) \to \eta(TN_1)(\rho_\sigma)$ является линеаризацией TN_1 такой, что $w = \phi(path(\sigma_1 = FS_{\pi_1}(\rho_1)))$. Так как $TCT(\mathcal{TN}_1)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$, то существует пометка $(a_1', \theta_1', K_1') \in \mathbf{W}$ и дуга r_1 из вершины σ_1 такие, что $\phi_1(r_1) = (a_1', \theta_1', K_1')$. Тогда можно найти $TP_1' = TP_{(a_1',\theta_1',K_1')} \in \mathbf{TP_W}$. Следовательно, по построению множества $\mathbf{TP_W}$, получаем, что $\{e_{(a_1',\theta_1',K_1')}\} = E_{TP_1'} \backslash E_{TN_\sigma}$, $a_1' = \lambda_{TP_1'}(e_{(a_1',\theta_1',K_1')})$, $\theta_1' = \tau_{TP_1'}(e_{(a_1',\theta_1',K_1')}) - \tau(TN_\sigma)$, $K_1' = \{n - l + 1 \mid e_l^\sigma \preceq_{TP_1'} e_{(a_1',\theta_1',K_1')}\}$. Более того, по определению $TCT(\mathcal{TN}_1)$, существует $\sigma_1(t_1', \theta_1') \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN}_1)$, $(t_1' \in T_{\mathcal{TN}_1})$, такая что $r_1 = (\sigma_1, \sigma_1(t_1', \theta_1'))$ и $\phi_1(\sigma_1', \sigma_1(t_1', \theta_1')) = (l_{\mathcal{TN}_1}(t_1') = a_1', \theta_1', K_1')$. Из леммы 2(*a*) следует наличие временного причинного сети-процесса $\pi_1' = (TN_1', \varphi_1') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_1)$ такого, что $\pi_1 \to \pi_1'$ и $\sigma_1(t_1', \theta_1') = FS_{\pi_1'}(\rho_1 e_1')$ для некоторой линеаризации $\rho_1 e_1'$ TN_1', т.е. $\varphi_1'(e_1') = t_1'$. Определим функцию f_1': $\eta(TN_1') \to TP_1'$ так: $f_1'|_{E_{\eta(TN_1)}} = f_1$, $f_1'(e_1') = e_{(a_1',\theta_1',K_1')}$. Кроме того, $\lambda_{\eta(TN_1')}(e_1') = a_1' = \lambda_{TP_1}(e_{(a_1',\theta_1',K_1')})$; $\tau_{\eta(TN_1')}(e_1') = \theta_1' + \tau(TN_1) = \theta_1' + \tau(TN_\sigma) = \tau_{TP_1'}(e_{(a_1',\theta_1',K_1')})$; $e_{n-k+1}^1 \preceq_{\eta(TN_1')} e_1' \Leftrightarrow f_1'(e_{n-k+1}^1) = e_{n-k+1}^\sigma \preceq_{TP_1} e_{(a_1',\theta_1',K_1')}$, для всех $k \in K_1'$. Следовательно, f_1' является изоморфизмом и $f_1 \subseteq f_1'$. Таким образом, $\mathcal{TN}_1$ **after** TP_w $\mathbf{MUST}_{tpos}$ $\mathbf{TP_W}$. Тогда, по предположению теоремы, получаем, что $\mathcal{TN}_2$ **after** TP_w $\mathbf{MUST}_{tpos}$ $\mathbf{TP_W}$.

Далее покажем, что $TCT(\mathcal{TN}_2)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$. Возьмем произвольный путь u_2 в $TCT(\mathcal{TN}_2)$ из корня в вершину σ_2 такой, что $\phi_2(u_2) = w$. Так как $w \in \mathcal{L}(TCT(\mathcal{TN}_2))$, то найдется хотя бы один такой путь u_2 в $TCT(\mathcal{TN}_2)$. Согласно утверждению 1(*б*), существует единственный (с точностью до изоморфизма) временной причинный сеть-процесс $\pi_{\sigma_2} = (TN_2, \varphi_2) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_2)$ и единственная линеаризация $\rho_2 = e_1^2 \ldots e_n^2$ TN_2 такие, что $FS_{\pi_{\sigma_2}}(\rho_2) = \sigma_2$. Используя утверждение 2(*б*), получаем наличие изоморфизма $f_2 : \eta(TN_2) \to TP_w$ такого, что $f_2(\rho_2) = \rho_\sigma$. Так как $\mathcal{TN}_2$ **after** TP_w $\mathbf{MUST}_{tpos}$ $\mathbf{TP_W}$, то существуют $TP_2' \in \mathbf{TP_W}$, $\pi_{\sigma_2}' = (TN_2', \varphi_2') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_2)$ и изоморфизм $f_2' : \eta(TN_2') \to TP_2'$ такие, что $\pi_{\sigma_2} \to \pi_2'$ и $f_2 \subseteq f_2'$. Согласно лемме 2(*б*), найдется $\sigma_2(\tilde{t}, \tilde{\theta}) \in \mathcal{FS}(\mathcal{TN}_2)$ такая, что для некоторой линеаризации $\rho_2 e_2'$ TN_2' имеем, что $\sigma_2(\tilde{t}, \tilde{\theta}) = FS_{\pi_2'}(\rho_2 e_2')$. По построению $\mathbf{TP_W}$, существует пометка $(a, \theta, K) \in \in \mathbf{W}$ такая, что $TP_2' = TP_{(a,\theta,K)}$, и, следовательно, $\{e_{(a,\theta,K)}\} = E_{TP_2'} \backslash E_{TN_\sigma}$. Так как $TN_2 \to TN_2'$ и $TP_w \prec\cdot TP_2'$, то $\{e_2'\} = E_{TN_2'} \backslash E_{TN_2}$ и $f_2'(e_2') = e_{(a,\theta,K)}$. Поскольку f_2' – изоморфизм, верно: $\lambda_{\eta(TN_2')}(e_2') = \lambda_{TP_2'}(e_{(a,\theta,K)}) = a$, $\tau_{\eta(TN_2')}(e_2')\tau_{TP_2'} = (e_{(a,\theta,K)}) = \tau(TN_\sigma) + \theta = \tau(TN_2) + \theta$, и $e_i^\sigma \preceq_{TP_2'} e_{(a,\theta,K)} \Leftrightarrow (f_2')^{-1}(e_i^\sigma) = e_i^2 \preceq_{\eta(TN_2')} e_2'$ для всех $1 \le i \le n$. Тогда получаем, что $(\tilde{t}, \tilde{\theta}) = (\varphi_2'(e_2'), \theta)$ и $e_{n-k+1}^2 \preceq_{\eta(TN_2')} e_2'$ для всех $k \in K$. Следовательно, в $TCT(\mathcal{TN}_2)$ существует дуга $r_2 = (\sigma_2, \sigma_2(\tilde{t}, \tilde{\theta}))$ такая, что $\phi_2(r_2) = (a, \theta, K)$. Таким образом, имеем, что $TCT(\mathcal{TN}_1)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W} \Rightarrow TCT(\mathcal{TN}_2)$ **after** w $\mathbf{MUST}_{tct}$ $\mathbf{W}$.

В силу симметрии, верно, что $\mathcal{TN}_1 \sim_{tpos} \mathcal{TN}_2 \Rightarrow \Rightarrow \mathcal{TN}_1 \sim_{tct} \mathcal{TN}_2$. $\square$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье было показано, что хорошо известные в теории безвременных и временных моделей структур событий причинно-зависимые тестовые эквивалентности могут быть обобщены на модели непрерывно-временных сетей Петри.

В частности, были введены и изучены тестовые эквивалентности в интерливинговой, частично-упорядоченной и комбинированных семантиках в контексте безопасных сетей Петри, переходы которых помечены временными интервалами и каждый переход, имеющий достаточное количество фишек во входных местах, должен срабатывать тогда, когда его счетчик достигнет некоторого значения, принадлежащего его временному интервалу. При исследованиях были построены три представления вычислений непрерывно-временной сети Петри: последовательности срабатываний, представляющие интерливинговую семантику, временные сети-процессы, из причинных сетей которых выводятся частичные порядки, и причинное дерево, построенное из последовательностей срабатываний и частичных порядков причинных сетей. Были найдены взаимосвязи, с одной стороны, между последовательностями срабатываний и корректными временными причинными сетями-процессами, и, с другой стороны, между последними и помеченными путями во временных причинных деревьях. Было установлено, что интерливинговая тестовая эквивалентость слабее, чем тестовая эквивалентность, определенная с использованием временного причинного дерева. Как основной результат, доказано совпадение тестовых эквивалентностей в семантиках временного частичного порядка и временного причинного дерева. Заметим, что подобный результат верен и для безвременных версий тестовых эквивалентностей в контексте свободных от контактов элементарных сетевых систем.

В дальнейшем планируется исследовать взаимосвязи рассмотренных эквивалентностей и семантик с другими эквивалентностями из спектров линейного/ветвящегося времени и интерливинга/частичного порядка ([25]). Также следует изучить возможность расширения полученных результатов на модели непрерывно-временных сетей Петри с невидимыми действиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Nicola R., Hennessy M.* Testing equivalence for processes // Theoretical Computer Science. 1984. V. 34. P. 83–133.
2. *De Nicola R.* Extensional equivalences for transition systems // Acta Informatica. 1987. V. 24. № 2. P. 211–237.
3. *Cleaveland R., Hennessy M.* Testing equivalence as a bisimulation equivalence // Lecture Notes in Computer Science. 1989. V. 407. P. 11–23.
4. *Pomello, L., Rozenberg, G., Simone C.* A Survey of Equivalence Notions for Net Based Systems // Lecture Notes in Computer Science. 1992. V. 609. P. 410–472.
5. *Aceto L., De Nicola R., Fantechi A.* Testing equivalences for event structures // Lecture Notes in Computer Science. 1987. V. 280. P. 1–20.
6. *Goltz U., Wehrheim H.* Causal testing // Lecture Notes in Computer Science. 1996. V. 1113. P. 394–406.
7. *Aceto L.* History preserving, causal and mixed-ordering equivalence over stable event structures // Fundamenta Informaticae. 1992. V. 17. № 4. P. 319–331.
8. *Darondeau Ph., Degano P.* Refinement of actions in event structures and causal trees // Theoretical Computer Science. 1993. V. 118. № 1. P. 21–48.
9. *Nielsen M., Rozenberg G., Thiagarajan P.S.* Behavioural notions for elementary net systems // Distributed Computing. 1990. V. 4. № 1. P. 45–57.
10. *Hoogers P.W., Kleijn H.C.M., Thiagarajan P.S.* An event structure semantics for general Petri nets // Theoretical Computer Science. 1996. V. 153. № 1–2. P. 129–170.
11. *van Glabbeek R.J., Goltz U., Schicke J.-W.* On causal semantics of Petri nets // Lecture Notes in Computer Science. 2011. V. 6901. P. 43–59.
12. *Cleaveland R., Zwarico A.E.* A theory of testing for real-time // Proc. 6th IEEE Symp. on Logic in Comput. Sci. (*LICS'91*), Amsterdam, The Netherlands. 1991. P. 110–119.
13. *Llana L., de Frutos D.* Denotational semantics for timed testing// Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1233. P. 368–382.
14. *Hennessy M., Regan T.* A process algebra for timed systems // Information and Computation. 1995. V. 117. P. 221–239.
15. *Corradini F., Vogler W., Jenner L.* Comparing the Worst-Case Efficiency of Asynchronous Systems with PAFAS // Acta Informatica. 2002. V. 38. 11–12. P. 735–792.
16. *Bihler E., Vogler W.* Timed Petri Nets: Efficiency of Asynchronous Systems // Lecture Notes in Computer Science. 2004. V. 3185. P. 25–58.
17. *Murphy D.* Time and duration in noninterleaving concurrency // Fundamenta Informaticae. 1993. V. 19. P. 403–416.
18. *Andreeva M., Bozhenkova E., Virbitskaite I.* Analysis of timed concurrent models based on testing equivalence // Fundamenta Informaticae. 2000. V. 43. P. 1–20.
19. *Andreeva M., Virbitskaite I.* Timed equivalences for timed event structures // Lecture Notes in Computer Science. 2005. V. 3606. P. 16–25.
20. *Andreeva M., Virbitskaite I.* Observational Equivalences for Timed Stable Event Structures // Fundamenta Informaticae. 2006. V. 72. № 1–3. P. 1–19.
21. *Valero V., de Frutos D., Cuartero F.* Timed processes of timed Petri nets // Lecture Notes in Computer Science. 1995. V. 935. P. 490–509.
22. *Вирбицкайте И.Б., Боровлев В.А., Попова-Цейгманн Л.* Истинно-параллельная и недетерминированная семантика временных сетей Петри // Программирование. 2016. № 4. С. 4–16.
23. *Aura T., Lilius J.* A causal semantics for time Petri nets // Theoretical Computer Scinece. 2000. V. 243. № 1–2. P. 409–447.
24. *Бушин Д.И., Вирбицкайте И.Б.* Компаративная трассовая семантика временных сетей Петри // Программирование. 2015. № 3. С. 20–31.
25. *Virbitskaite I., Bushin D., Best E.* True concurrent equivalences in time Petri nets // Fundamenta Informaticae. 2016. V. 149. № 4. P. 401–418.