

УДК 517.925+004.421.6

ИНВАРИАНТНЫЕ КООРДИНАТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. А. Б. Батхин^{а,*}^а Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047 Москва, Миусская пл., д. 4, Россия

*E-mail: batkhin@gmail.com

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.

После доработки 20.08.2020 г.

Принята к публикации 02.09.2020 г.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с невырожденной линейной частью в общем и гамильтоновом случаях ставится задача отыскания инвариантных координатных подпространств в координатах ее нормальной формы, вычисленной вблизи положения равновесия. Приведены условия существования таких инвариантных подпространств в терминах резонансных соотношений между собственными числами линейной части системы. Дан алгоритм поиска резонансных соотношений между собственными числами без их явного вычисления, который существенно использует методы компьютерной алгебры и q -аналог субрезультантов многочлена. Обсуждается его реализация в трех распространенных системах компьютерной алгебры – Mathematica, Maple и SymPy. Приведены содержательные модельные примеры.

DOI: 10.31857/S0132347421020047

1. ВВЕДЕНИЕ

Подход А. Пуанкаре к исследованию систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) заключался в том, чтобы посредством аналитических обратимых преобразований максимально упростить правые части системы. Этот подход привел к теории нормальных форм систем ОДУ, разработанной в работах А. Дюляка и А.Д. Брюно для общих систем (подробнее см. [1]) и в работах Дж. Биркгофа, Т.М. Черри, Ф.Г. Густавсона, К.Л. Зигеля, Ю. Мозера, А.Д. Брюно и других для систем Гамильтона (подробнее см. [2, Гл. I, II]).

Хотя нормальная форма системы ОДУ в окрестности инвариантного многообразия (положения равновесия, периодического решения, k -мерного тора) является формальным объектом, т.е. переход к нормальной форме обычно является расходящимся преобразованием, она может быть эффективно использована для исследования устойчивости соответствующего инвариантного многообразия [3], [4, Part II], локальной интегрируемости системы в его окрестности [5], поиска периодических решений, первых интегралов [6, 7], а также асимптотического интегрирования исходной системы [8].

Цель настоящей работы состоит в изучении инвариантных координатных подпространств в нормальной форме общей системы ОДУ в случае,

когда линейная часть этой системы невырождена, т.е. имеет хотя бы одно ненулевое собственное число. Существование координатного инвариантного подпространства позволяет изучать динамику фазового потока исходной системы на пространстве меньшей размерности и в некоторых случаях дает информацию о периодических решениях полной системы.

Работа состоит из введения, четырех разделов и двух списков – литературы и условных обозначений. В разделе 2 дается определение нормальной формы общей системы ОДУ и формулируется условие существования инвариантного координатного подпространства. В разделе 3 рассматривается нормальная форма системы Гамильтона и формулируется условие существования инвариантного координатного подпространства в этом случае. Раздел 4 содержит три модельных примера, демонстрирующих типичные ситуации с собственными числами линейной части системы ОДУ. Наконец, в заключительном разделе 5 приведена методика применения q -аналогов таких классических объектов, как субдискриминант многочлена и его производная, для анализа резонансных соотношений между собственными числами линейной части системы ОДУ в ситуации, когда эти собственные числа попарно рационально соизмеримы. Описанные алгоритмы могут

быть реализованы в различных системах компьютерной алгебры, таких как Wolfram Mathematica [9], Maplesoft Maple [10], SymPy [11]. Приведен пример определения резонансных соотношений для модельной колебательной системы с шестью степенями свободы.

Замечания об обозначениях

- Символы, набранные полужирным шрифтом $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$, обозначают векторы-столбцы в n -мерном вещественном $\mathbb{R}^n$ или комплексном $\mathbb{C}^n$ пространствах.

- Символы, набранные полужирным шрифтом $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, обозначают векторы в n -мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$.

- $|\mathbf{p}| = \sum_{j=1}^n |p_j|$.

- Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ величина $\mathbf{x}^{\mathbf{p}} \equiv \prod_{j=1}^n x_j^{p_j}$, а величина $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \equiv \sum_{j=1}^n p_j x_j$ — скалярное произведение.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ КООРДИНАТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ОДУ

Рассмотрим аналитическую систему ОДУ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

вблизи ее положения равновесия

$$\mathbf{x} = 0,$$

совпадающего с началом координат.

Пусть линейная часть

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0}, \quad (2.2)$$

системы (2.1) невырождена. Тогда матрица A имеет n собственных чисел

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

из которых по крайней мере одно ненулевое.

Согласно теореме I из [1] существует формальное обратимое преобразование $\mathbf{g} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}),$$

представленное в виде степенных рядов, которое приводит исходную систему (2.1) к ее *нормальной форме*.

Определение 1 ([1]). *Нормальная форма* исходной системы (2.1) это система ОДУ в виде

$$\dot{y}_j = y_j h_j(\mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

правые части $y_j h_j(\mathbf{y})$ которой суть степенные ряды

$$y_j h_j(\mathbf{y}) = y_j \sum_q h_{jq} \mathbf{y}^q, \quad h_{j0} = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

состоящие только из *резонансных членов*, показатели степени которых удовлетворяют резонансному уравнению

$$\langle \mathbf{q}, \lambda \rangle = 0. \quad (2.5)$$

Здесь h_{jq} суть постоянные коэффициенты, при этом в слагаемых $y_j h_j(\mathbf{y})$ целочисленные координаты $q_j \geq -1$, но другие координаты $q_k \geq 0$.

Введем кортеж $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ возрастающих индексов $1 \leq i_1, i_k \leq n$, $k \leq n$. Обозначим через K_I *координатное подпространство*

$$K_I = \{\mathbf{y} : y_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}.$$

Все ненулевые координаты $y_j, j \in I$, подпространства K_I назовем *внутренними координатами* и обозначим их для краткости $\mathbf{y}_I$. Остальные координаты назовем *внешними*.

Аналогично, собственные числа $\lambda_j, j \in I$, соответствующие внутренним координатам $\mathbf{y}_I$, назовем *внутренними собственными числами* и обозначим их λ_I . Остальные собственные числа $\lambda_j, j \notin I$, назовем *внешними*.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Какие координатные подпространства K_I инвариантны в нормальной форме (2.3), (2.4), (2.5)?

Решение задачи 1 дает следующая теорема.

Теорема 1. *Координатное подпространство K_I размерности k инвариантно в нормальной форме (2.3)–(2.5), если каждое внешнее собственное число $\lambda_j \notin \lambda_I$ удовлетворяет условию*

$$\lambda_j \neq \langle \mathbf{p}, \lambda_I \rangle, \quad (2.6)$$

для всех неотрицательных целочисленных векторов $\mathbf{p} \geq 0$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^k$.

Доказательство. Из условия (2.6) следует, что каждый ряд $h_j(\mathbf{y})$ для $j \notin I$ не содержит ни одного слагаемого $h_{jq} \mathbf{y}^q$, чьи индексы $q_j = -1$, $q_i \geq 0$, $i \neq j \notin I$. Поскольку внешние переменные $y_j, j \notin I$, равны нулю на подпространстве K_I , то из этого следует, что для $\mathbf{y} \in K_I$

$$y_j h_j(\mathbf{y}) = 0, \text{ для всех индексов } j \notin I.$$

Таким образом, подпространство K_I инвариантно в нормальной форме (2.3)–(2.5).

3. ИНВАРИАНТНЫЕ КООРДИНАТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

Рассмотрим аналитическую систему Гамильтона

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.1)$$

с n степенями свободы вблизи положения равновесия

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0.$$

Функция Гамильтона $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ раскладывается в сходящийся степенной ряд

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum H_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

с постоянными коэффициентами $H_{\mathbf{pq}}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geq 0$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geq 2$. Каноническое преобразование координат $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (3.3)$$

сохраняет гамильтонову структуру исходной системы (3.1).

Введем фазовый вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}(\mathbb{C}^{2n})$. Тогда линейная часть системы (3.1) может быть записана в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{y}=0}. \quad (3.4)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ — собственные числа матрицы B , которые могут быть переупорядочены следующим образом $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим через вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ набор базовых собственных чисел системы (3.4).

Согласно теореме 12 из [12, § 12] существует каноническое формальное преобразование (3.3), где все функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ суть степенные ряды, которое приводит гамильтонову систему (3.1) к ее *нормальной форме*

$$\dot{\mathbf{u}} = \partial h / \partial \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\partial h / \partial \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

задаваемой нормализованным Гамильтонианом $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}, \quad (3.6)$$

содержащим только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}$, удовлетворяющие резонансному уравнению

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \quad (3.7)$$

Здесь $0 \leq \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geq 2$, а коэффициенты $h_{\mathbf{pq}}$ — постоянные величины.

Резонансное уравнение (3.7) имеет два вида решений, которым соответствуют два вида резонансных членов в нормальной форме (3.6):

1) *вековые члены* вида $h_{\mathbf{pp}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{p}}$, которые всегда присутствуют в гамильтоновой нормальной форме из-за особой структуры матрицы B линеаризованной системы (3.8);

2) *чисто резонансные члены*, которые соответствуют нетривиальным целочисленным решениям уравнения

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \quad (3.8)$$

Следуя [2, Гл. I, § 3] определим *кратность резонанса* $\mathbf{k}$ как число линейно независимых решений $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ уравнения (3.8), а порядок резонанса $q = \min |\mathbf{p}|$ по $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p} \neq 0$, $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$.

Главным отличием нормальной формы системы Гамильтона (3.1) от нормальной формы общей системы ОДУ (2.1) является то, что первая всегда содержит вековые члены, даже при отсутствии нетривиальных решений уравнения (3.8). В этом случае имеем так называемую *нормальную форму Биркгофа* [13].

Пусть, как и в разделе 2, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ — кортеж возрастающих индексов $1 \leq i_1, i_k \leq n$, $k \leq n$. Обозначим через L_I *координатное подпространство*

$$L_I = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : u_j = v_j = 0 \text{ для всех } j \notin I\}.$$

Все ненулевые координаты $w_j = (u_j, v_j)$, $j \in I$, подпространства L_I назовем *внутренними координатами* и обозначим их для краткости $\mathbf{w}_I$, остальные назовем *внешними*. Собственные числа λ_j , $j \in I$, соответствующие внутренним координатам $\mathbf{w}_I$ назовем *внутренними собственными числами* и обозначим их λ_I . Остальные собственные числа λ_j , $j \notin I$, назовем *внешними собственными числами*.

Задача 2. Какие координатные подпространства L_I инвариантны в нормальной форме (3.5), (3.6), (3.7)?

Теорема 2. Координатное подпространство L_I размерности $2k$ инвариантно в нормальной форме (3.5)–(3.7), если каждое внешнее собственное число $\lambda_j \notin \lambda_I$ удовлетворяет следующему условию

$$\lambda_j \neq \langle \mathbf{p}, \lambda_I \rangle, \quad (3.9)$$

для любого ненулевого целочисленного вектора $\mathbf{p} \neq 0$ из решетки $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^k$.

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 1.

Замечание 1. Принципиальной разницей между условием (2.6) теоремы 1 и условием (3.9) теоремы 2 является то, что в гамильтоновом случае выбирается ненулевой вектор $\mathbf{p}$ из решетки $\mathbb{Z}^k$, а в общем случае выбирается уже неотрицательный вектор $0 \leq \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^k$.

4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим некоторые модельные примеры существования инвариантных координатных подпространств в общем и гамильтоновом случаях.

Пример 1. Пусть собственные числа линейной части общей системы ОДУ равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$.

Имеется три одномерных инвариантных координатных подпространства K_j , $j = 1, 2, 3$, соответствующих каждому из собственных чисел λ_j , ибо ни одно из соотношений λ_i/λ_j при $i \neq j$ не является натуральным числом.

Из трех двумерных координатных подпространств инвариантными являются подпространства K_{13} и K_{23} , но K_{12} неинвариантно, поскольку между собственными числами имеется соотношение $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, но при этом ни для каких векторов $\mathbf{p} \geq 0$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ не выполняются соотношения $\lambda_1 = p_1\lambda_2 + p_2\lambda_3$ и $\lambda_2 = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_3$.

Пример 2. Пусть собственные числа λ_j , $j = 1, \dots, n$, таковы, что отношения $\lambda_j/\lambda_1 \notin \mathbb{Z}$, $j = 2, \dots, n$. Тогда нормальная форма имеет двумерное инвариантное координатное подпространство $L_1 = \{u_j = v_j = 0, j \notin I_1\}$, где кортеж $I_1 = \{1\}$. На подпространстве L_1 нормальная форма (3.6) индуцирует гамильтонову нормальную форму с одной степенью свободы. В этом случае условие А выполнено (см [12, § 12]) и нормализующее преобразование сходится.

Если $\lambda_1 \neq 0$ и чисто мнимое, тогда для вещественной системы Гамильтона (3.1) вещественное подпространство L_1 является семейством периодических решений. Этот факт впервые был обнаружен А.М. Ляпуновым [14] и описан К. Зигелем в книге [15, §§16, 17] с применением гамильтонова формализма.

Пример 3. Пусть имеется единственная пара собственных чисел λ_1, λ_2 , удовлетворяющая условию

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{r}{s}, \quad (4.1)$$

где $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$, $(r, s) = 1$, т.е. кратность $\mathfrak{f}$ резонанса равна 1, а порядок резонанса равен $q = |r| + |s|$.

Тогда уравнение (3.8) имеет однопараметрическое семейство решений $\mathbf{p} = (lr, -ls, 0, \dots)$, $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а нормальная форма помимо вековых членов содержит чисто резонансные члены. Эти члены наименьшего порядка при $l = 1$ имеют вид $h_{12}u_1^r v_2^s$ и $h_{21}v_1^r u_2^s$.

Пусть, например, знаменатель s в (4.1) равен единице. Тогда нормальная форма содержит чисто резонансные члены $u_1^r v_2$ и $v_1^r u_2$. Это значит, что координатное подпространство L_1 не может быть инвариантным, поскольку правые части уравнений для внешних переменных u_2, v_2 содержат слабые, зависящие от внутренних переменных u_1, v_1 и, тем самым, эти правые части не могут быть всегда равны нулю когда $u_2 = v_2 = 0$. В то же самое время координатное подпространство L_2 является инвариантным.

Пример 4. Пусть матрица B линейной части системы Гамильтона с четырьмя степенями свободы имеет четыре пары собственных чисел: одна пара вещественных ± 1 , вторая пара чисто мнимых $\pm i$, третья и четвертая пары — комплексных $\pm 1 \pm i$. Переупорядочим эти собственные числа так, что вектор λ имеет следующий вид:

$$\lambda = (1, i, 1 + i, 1 - i).$$

Очевидно, что имеется четыре двумерных инвариантных координатных подпространства L_1, L_2, L_3, L_4 , соответствующих каждому из собственных чисел λ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, ибо все отношения λ_i/λ_j , $i \neq j$, не являются целыми числами.

Из шести координатных подпространств размерности четыре имеем:

- L_{12} не является инвариантным, поскольку $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$.
- L_{13} не является инвариантным, поскольку $\lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_1$.
- L_{14} не является инвариантным, поскольку $\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_4$.
- L_{23} не является инвариантным, поскольку $\lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2$.
- L_{24} не является инвариантным, поскольку $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_4$.
- L_{34} инвариантно, поскольку ни λ_1 ни λ_2 не могут быть получены как линейная комбинация λ_3 и λ_4 с целыми коэффициентами. Тем самым условие (3.9) теоремы 2 выполнено.

Наконец, не существует ни одного инвариантного координатного подпространства размерности шесть.

5. ПРИМЕНЕНИЕ q -СУБДИСКРИМИНАНТОВ ДЛЯ ПОИСКА РЕЗОНАНСОВ

Как следует из рассуждений пп. 2 и 3, вид резонансных членов нормальной формы общей (2.1) или гамильтоновой (3.1) систем определяется исключительно собственными значениями λ матрицы A или B соответственно. Это значит, что для выяснения вопроса существования инвариантных подпространств в нормальной форме (2.3)–(2.5) или (3.5)–(3.7) достаточно определить структуру собственных чисел матриц A или B , а именно, выполняются или нет соответствующие условия (2.6) или (3.9). Частично ответ на этот вопрос может быть получен с использованием техники q -субдискриминантов характеристического многочлена $f(\lambda)$ матрицы A или B .

В дальнейшем ограничимся важным с точки зрения приложений случаем, когда вектор собственных чисел λ матриц A или B состоит только из вещественных и/или чисто мнимых величин. Дополнительно предположим, что если собственные числа λ удовлетворяют резонансному уравнению (2.5) или (3.8), то все λ_j , входящие в эти уравнения попарно рационально соизмеримы. Другими словами, нет такой ситуации с собственными числами как в примерах 1 и 4.

5.1. q -Субдискриминанты многочлена и их свойства

Применение q -субдискриминантов $D_q^{(k)}(f)$ характеристического многочлена позволяет не только выяснить наличие у него соизмеримых корней, но и, при определенных условиях, найти эти корни, не прибегая к вычислению всех собственных чисел. Если правые части систем (2.1) или (3.1) зависят от параметров, то и q -субдискриминанты являются функциями этих параметров, что позволяет определить, при каких значениях последних имеет место быть резонанс соответствующей кратности и порядка.

Вначале кратко напомним определение субдискриминанта k -го порядка произвольного приведенного многочлена степени n (подробнее, см. [16, 17]).

Определение 2. Пусть

$$f_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (5.1)$$

некоторый приведенный многочлен от переменной x . Тогда его k -й субдискриминант $D^{(k)}(f_n)$, $k = 0, \dots, n-2$ задается формулой

$$D^{(k)}(f_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#(I) = n-k}} \prod_{\substack{(j,l) \in I \\ l > j}} (x_j - x_l)^2,$$

где x_j – корни многочлена (5.1), $\#(I)$ – мощность множества I . Для $k = n-1$ положим $D^{(n-1)}(f_n) = n$, а для $k = n$ положим $D^{(n)}(f_n) = 1$. Для $k = 0$ получаем $D^{(0)}(f_n) = D(f_n)$.

Составим последовательность субдискриминантов многочлена $f_n(x)$

$$S(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} (D^{(0)}(f_n), D^{(1)}(f_n), \dots, D^{(n-1)}(f_n), 1).$$

Пусть $P(S)$ есть число знаков постоянств в последовательности S , а $V(S)$ – число знаков перемен этой последовательности.

Утверждение 1 ([17, Theorem 4.33]). Число вещественных корней многочлена $f_n(x)$ равно величине

$$\text{PmV}(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} P(S) - V(S).$$

Для проверки условия, что все корни многочлена вещественные и/или чисто мнимые, следует перейти к вспомогательному многочлену $\check{f}_n(x)$, все корни которого суть квадраты корней исходного многочлена (2). Это легко сделать применив преобразование Чирнгауза [18, § 136]: $\check{f}_n(x) = \text{Res}_z(f_n(z), x - z^2)$. Используя последовательность субдискриминантов $S(\check{f}_n)$ и утверждение 1, легко получить следующее.

Утверждение 2. Многочлен (5.1) имеет только вещественные и/или чисто мнимые корни, если все субдискриминанты вспомогательного многочлена $\check{f}_n(x)$ неотрицательны.

Вычисление субдискриминанта многочлена осуществляется либо с помощью одного из матричных методов с использованием матрицы Безу, Сильвестра, ганкелевой матрицы ньютоновых сумм, либо с использованием алгоритма псевдоделения Якоби (см., например, [16, 19, 20]).

Отметим, что многие указанные выше методы реализованы в различных системах компьютерной алгебры. Например, в системе Wolfram Mathematica [9] функции `Subresultants[f1, f2, x]` и `SubresultantPolynomials[f1, f2, x]` позволяют находить соответственно скалярные и полиномиальные субрезультанты пары многочленов f_1, f_2 относительно переменной x . Фрагмент соответствующего кода приведен в листинге 1.

Листинг 1

```

coefflst = Reverse [Join [{1}, Array [a, 3]]];
f3 = Total [coefflst x^(Range [4] = 1)]
Df3 = D[f3, x]
x^3 + x^2 a [1] + x a [2] + a [3]
3 x^2 + 2 x a [1] + a [2]

Subresultants [f3, Df3, x]
{-a [1]^2 a [2]^2 + 4 a [2]^3 + 4 a [1]^3 a [3]
- 18 a [1] a [2] a [3] + 27 a [3]^2,
-2 a [1]^2 + 6 a [2], 3}

```

Система компьютерной алгебры Maple [10] предлагает набор процедур (SubresultantChain, SubresultantOfIndex, LastSubresultant) из пакета RegularChains[ChainTools], позволяющих вычислять структуру данных, хранящую полиномиальные субрезультанты пары многочленов от нескольких переменных. Непосредственные вычисления также могут быть произведены с использованием процедур BezoutMatrix, Syl-

vesterMatrix и HankelMatrix из пакета LinearAlgebra (см. [20]).

Наконец, пакет SymPy [11] для языка программирования Python также содержит ряд функций, позволяющих вычислять полиномиальные субрезультанты пары многочленов в символьном виде. Пример вычисления дискриминанта кватерники $f_4(x)$ дан в листинге 2.

Листинг 2

```

from sympy import *
nord = 4
x = var ("x")
c f l s t = symbols ("a1 : { }".format (nord))
f 4 = Poly (x** nord+sum([c f l s t [nord=1=i] * x** i\
for i in range (nord)]), x)
Df4 = f 4.d i f f (x)
SubDf4 = s u b r e s u l t a n t s (f4, Df4)
print (SubDf4 [=1])

```

$$\begin{aligned}
& -27a_1^4a_4^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 + 144a_1^2a_2a_4^2 - 6a_1^2a_3^2a_4 - 80a_1a_2^2a_3a_4 + 18a_1a_2a_3^3 - \\
& 192a_1a_3a_4^2 + 16a_2^4a_4 - 4a_2^3a_3^2 - 128a_2^2a_4^2 + 144a_2a_3^2a_4 - 27a_3^4 + 256a_4^3
\end{aligned}$$

Для определения рациональной соизмеримости корней многочлена воспользуемся q -аналогом классических производной и субдискриминанта.

Напомним основные q -объекты (см., например, [21–23]), используемые далее.

Определение 3. Определим следующие объекты:

- q -скобка числа a : $[a]_q = \frac{q^a - 1}{q - 1}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- сдвинутый q -факториал (q -символ Похгаммера): $(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k)$, $(a; q)_0 = 1$,
- q -факториал $[n]_q! = \prod_{k=1}^n [k]_q = \frac{(q; q)_n}{(1 - q)^n}$, $q \neq 1$,
- q -биномиальные (гауссовы) коэффициенты

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} = \prod_{i=1}^k \frac{q^{n-i+1} - 1}{q^i - 1},$$

• q -бином:

$$\{x; a\}_{n; q} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n-1} (x - aq^i), \quad \{x; t\}_{0; q} = 1.$$

• При $q \rightarrow 1$ все определенные выше объекты становятся классическими.

Отметим, что коэффициенты q -бинома суть гауссовы коэффициенты.

Производная Джексона (q -производная, q -дифференциальный оператор Джексона) есть

$$(\mathcal{A}_q f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \end{cases} \quad q \notin \{0, 1\}.$$

Она обладает всеми свойствами обычной производной. Исключением является правило дифференцирования сложной функции, которое отсутствует в случае q -производной.

Утверждение 3. Пусть f и h — два многочлена, тогда

1. $(\mathcal{A}_q f)(x) \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv \text{const}$;
2. $(\mathcal{A}_q(fh))(x) = (\mathcal{A}_q f)(x)h(x) + f(qx)(\mathcal{A}_q h)(x)$;
3. $\left(\mathcal{A}_q \frac{f}{h}\right)(x) = \frac{(\mathcal{A}_q f)(x)h(x) - f(x)(\mathcal{A}_q h)(x)}{h(x)h(qx)}$;
4. $f(qx) = f(x) + (q-1)x(\mathcal{A}_q f)(x)$.

Помимо указанных выше свойств отметим, что q -производная функции x^n равна $[n]_q x^{n-1}$, а применение q -производной к q -биному степени n снова дает q -бином степени $n-1$, умноженный на $[n]_q$.

С помощью q -производной теперь определяется q -аналог классического дискриминанта многочлена.

Определение 4. Определим q -дискриминант $D_q(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ как результат пары многочленов $f_n(x)$ и $(\mathcal{A}_q f_n)(x)$:

$$D_q(f_n) = (-1)^{n(n-1)/2} \text{Res}(f_n(x), (\mathcal{A}_q f_n)(x)).$$

Равенство нулю q -дискриминанта многочлена $f_n(x)$ при фиксированном q является признаком существования по крайней мере одной пары q -соизмеримых корней, однако подробную структуру всех соизмеримых корней можно получить с использованием последовательности q -субдискриминантов различных порядков многочлена $f_n(x)$

$$S_q(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} (D_q^{(0)}(f_n), D_q^{(1)}(f_n), \dots, D_q^{(n-1)}(f_n)). \quad (5.2)$$

Частным случаем результата, доказанного для оператора Хана, обобщающего q -производную, в [22, 24], является следующая теорема.

Теорема 3. Многочлен $f_n(x)$ имеет ровно $n-d$ различных последовательностей q -соизмеримых корней, тогда и только тогда, когда в последовательности (5.2) $k-x$ q -субдискриминантов $D_q^{(k)}(f_n)$, критерий многочлена f_n , $k = 0, \dots, n-2$, первым отличным от нуля является q -субдискриминант $D_q^{(d)}(f_n)$ с номером d .

Все соизмеримые корни многочлена $f_n(x)$ являются корнями наибольшего общего делителя многочлена $f_n(x)$ и его q -производной $(\mathcal{A}_q f_n)(x)$:

$$\tilde{f}_q(x) = \text{НОД}(f_n(x), (\mathcal{A}_q f_n)(x)).$$

Теорема 3 утверждает, что степень многочлена $\tilde{f}_q(x)$ равна номеру d первого ненулевого q -субдискриминанта в последовательности $S_q(f_n)$.

Отметим, что q -субдискриминанты вычисляются с помощью любого из матричных методов вычисления классических субрезультантов пары многочленов $f_n(x)$ и $(\mathcal{A}_q f_n)(x)$. Например, если составить из коэффициентов указанных выше многочленов матрицу Сильвестра $\text{Sylv}_q(f_n)$ размера $(2n-1) \times (2n-1)$ в форме Сильвестра–Хабихта, то k -й q -субдискриминант $D_q^{(k)}(f_n)$ равен определителю k -го иннора [25, Гл. I] этой матрицы.

Пусть в условиях теоремы 3 первый отличный от нуля q -дискриминант имеет номер d , $0 < d < n-1$. Обозначим через $\mathbf{M}_d^{(i)}$, $i = 1, \dots, d$, d -й иннор модифицированной q -матрицы Сильвестра $\text{Sylv}_q(f_n)$, в которой столбец с номером $2n-1-d$ заменен ее столбцом с номером $2n-1-d+i$, а через $M_d^{(i)}$ — определитель этого иннора. Тогда, как показано в [22] имеет место быть утверждение.

Утверждение 4. Если в последовательности q -субдискриминантов $D_q^{(i)}(f_n)$, $i = 0, \dots, n-2$, первым отличным от нуля является q -субдискриминант с номером d , то

$$\tilde{f}_q(x) \equiv D_q^{(d)} x^d + M_d^{(1)} x^{d-1} + \dots + M_d^{(d)}. \quad (5.3)$$

Укажем здесь некоторые важные свойства q -субдискриминантов приведенного многочлена (5.1).

I. k -й q -субдискриминант $D_q^{(k)}(f_n)$ представляет собой квазиоднородный многочлен от переменных $a_1, \dots, a_n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^m j a_j \frac{\partial D_q^{(k)}(f_n)}{\partial a_j} = (m-k)(m-k-1) D_q^{(k)}(f_n).$$

При этом k -й субдискриминант зависит не более чем от m первых коэффициентов многочлена (5.1), где $m = \min(2(n-k-1), n)$.

II. k -й q -субдискриминант $D_q^{(k)}(f_n)$ представляет собой возвратный многочлен четного порядка от переменной q . Возвратность следует из того, что соизмеримость корней $\lambda_i/\lambda_j = q$, $i \neq j$, влечет соизмеримость $\lambda_j/\lambda_i = 1/q$. Это свойство позволяет, с одной стороны, понизить вдвое степень q -субдискриминанта, как многочлена от q с помощью подстановки

$$q + \frac{1}{q} = Q, \quad (5.4)$$

а с другой стороны избежать двойной проверки соизмеримости пары корней q и $1/q$. В силу вышесказанного, степень $D_q(f_n)$ как многочлена от q равна $n(n-1)$.

5.2. Алгоритм поиска резонансов

Рассмотрим алгоритм исследования линейной части (2.2) общей системы ОДУ для поиска резонансов. Алгоритм представлен в виде последовательности шагов.

Шаг 1. Для матрицы A системы (3) вычисляем характеристический многочлен $f_n(\lambda)$ и проверяем наличие у него только вещественных и/или чисто мнимых корней с использованием утверждения 2.

Шаг 2. По многочлену $f_n(\lambda)$ вычисляем последовательность $S_q(f)$ (5.2) q -субдискриминантов порядков от 0 до $n - 2$. На этом этапе их степени как многочленов от q можно понизить вдвое, как указано в свойстве II.

Дальнейшие действия зависят от того, насколько легко удастся найти рациональные корни q -дискриминанта $D_q(f_n)$ как многочлена от q .

Шаг 3а. Пусть $D_q(f_n)$ является многочленом из кольца $\mathbb{Z}[q]$. Тогда его следует попытаться факторизовать с использованием различных алгоритмов (например, Кантора–Цассенхауза или Берлекемпа, см. [26, Гл. 6]). В случае успеха, получаем все (или часть) значений q , для которых имеет место соизмеримость корней многочлена (5.1).

Шаг 3б. Если менение предыдущего шага невозможно, то применим некоторый вариант перебора. Ограничимся определенным максимальным порядком m резонанса. Составим упорядоченный кортеж $\mathcal{P}_m$ всевозможных натуральных пар (r, s) таких, что $r, s \in \mathbb{N}$, НОД(r, s) = 1, $r \geq s$, $r + s \leq m$. Теперь, последовательно перебирая элементы кортежа $\mathcal{P}_m$, для каждой пары (r, s) проверяем равенство нулю q -дискриминанта $D_q(f)$ для значения $q = r/s$.

Шаг 4. Пусть для некоторого рационального q_1^* выполнено условие $D_{q_1^*}(f_n) = 0$. Тогда вычисляем по последовательности (5.2) степень многочлена $\tilde{f}_{q_1^*}(x)$, по формуле (5.3) сам этот многочлен и определяем структуру его корней. Если степень этого многочлена мала, то соизмеримые корни могут быть найдены по соответствующим формулам, а исходный многочлен $f_n(\lambda)$ можно представить в виде $f_n(\lambda) = u(\lambda)v(\lambda)$, где $u(\lambda)$ — множитель с уже известными корнями, а $v(\lambda)$ — с еще неизвестными, но среди которых нет q_1^* -соизмеримых корней.

Шаг 5. Последующие действия сводятся к исследованию, имеют ли множители $u(x)$ и $v(x)$ q -соизмеримые корни или нет, а также, имеет ли множитель $v(x)$ q -соизмеримые корни для $q \neq q_1^*$.

Замечание 2. При исследовании линейной части (3.4) системы Гамильтона следует учитывать, что характеристический многочлен $f_{2n}(\lambda)$ матрицы B является многочленом только четных степеней λ . Следовательно, можно понизить его порядок вдвое

и исследовать многочлен, названный в [27] *полухарактеристическим*, $\hat{f}_n(u) = f_{2n}(\lambda)$, где $\mu = \lambda^2$. В этом случае кортеж $\mathcal{P}_m$ составляется из пар (r^2, s^2) натуральных взаимно простых чисел r и s .

Отметим, что в случае когда удастся явно выразить собственные числа матрицы B , квадратичную часть гамильтониана (3.2) можно привести к нормальной форме одним из методов, описанным в книгах [8, 28].

Замечание 3. Описанный выше метод обладает двумя недостатками. Во-первых, при наличии резонанса кратности $k > 1$ может возникнуть ситуация, когда попарная соизмеримость собственных чисел задается большими значениями q , но сам резонанс может иметь малый порядок. Например, если три собственных числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ относятся как натуральные числа $2k - 1, 2k, 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (2k - 1) : 2k : (2k + 1)$, то наименьший порядок попарной соизмеримости равен $4k - 1$. Однако, в то же самое время, имеет место быть резонансное соотношение $\lambda_3 = 2\lambda_2 - \lambda_1$, имеющее порядок 4. Во-вторых, метод неспособен находить такие резонансы, которые задействуют три и более собственных чисел, но при этом эти числа не являются попарно соизмеримыми.

Замечание 4. Описанные в этом разделе методы исследования характеристического многочлена $f(\lambda)$ линейной части ОДУ легко алгоритмизируются и могут быть реализованы во многих системах компьютерной алгебры. Автором были написаны библиотеки процедур в системах компьютерной алгебры Maple и SymPy, предназначенные для вычисления q -субдискриминантов многочлена и исследования резонансных соотношений между корнями последнего без их явных вычислений. Ниже дан пример таких вычислений.

5.3. Модельный пример

Рассмотрим шесть симпатических математических маятников (т.е. одинаковой массы m и длины l), точки подвеса которых расположены на равных расстояниях d на горизонтальной прямой. Пусть маятники соединены между собой невесомыми линейно упругими пружинами жесткости k длиной d в недеформированном состоянии. Точки прикрепления пружин расположены на расстоянии $b \leq d$ от точек подвеса маятников. Следуя работе [29], в которой рассмотрена пара таких маятников, несложно получить квадратичную часть Π_2 потенциальной энергии в окрестности положения равновесия, когда все углы φ_i , $i = 1, \dots, 6$, отклонения маятников от вертикали равны нулю. Переходя к каноническим переменным и масштабируя время

$\tau = \sqrt{\frac{g}{l}}$ можно получить полухарактеристический многочлен (вековое уравнение) в виде

$$\begin{aligned} \hat{f}_6(\mu) = & \mu^6 - 2(5\beta + 3)\mu^5 + (36\beta^2 + 50\beta + 15)\mu^4 - \\ & - 2(28\beta^3 + 72\beta^2 + 50\beta + 10)\mu^3 + \\ & + (35\beta^4 + 168\beta^3 + 216\beta^2 + 100\beta + 15)\mu^2 - \\ & - 2(3\beta^5 + 35\beta^4 + 84\beta^3 + 72\beta^2 + 25\beta + 3)\mu + \\ & + (2\beta + 1)(3\beta + 1)(\beta + 1)(\beta^2 + 4\beta + 1), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\mu = \lambda^2$, а единственный параметр $\beta = \frac{kb^2}{mgl} > 0$.

В силу устойчивости положения равновесия, многочлен (5.5) имеет шесть положительных вещественных корней — по числу степеней свободы исходной механической системы.

Следуя шагу 2 *Алгоритма* вычислим первый q -субдискриминант $D_q(\hat{f}_6)$ и используя подстановку (5.4) упростим его. В результате получим многочлен относительно переменной Q степени 15. Здесь его явное выражение не приводится в силу его громоздкости. В системе Maplesoft Maple этот многочлен удалось разложить на линейные и квадратные множители, что позволило легко найти все соизмеримости между корнями многочлена (5.5). Таким образом, выполнен шаг 3а *Алгоритма* и имеется возможность найти все корни многочлена, а следовательно проверить выполнение резонансных соотношений между ними.

В системе SymPy разложить q -дискриминант $D_q(\hat{f}_6)$ на множители не удалось, поэтому применим шаги 3б и далее *Алгоритма* для некоторого фиксированного значения параметра $\beta = 48/25$. Выберем максимальный порядок резонанса $m = 20$ и, согласно замечанию 2, составим кортеж $\mathcal{P}_{20}$ всевозможных пар (r^2, s^2) таких, что $\text{НОД}(r, s) = 1$ и $r + s \leq 20$, $r, s \in \mathbb{N}$. Перебирая все такие пары из $\mathcal{P}_{20}$ найдем, что при $q_1^* = 121/25$ и $q_2^* = 169/25$ q -дискриминант обращается в нуль, а остальные q -субдискриминанты нет. При этом многочлены $\tilde{f}_{q_1}(\mu)$ и $\tilde{f}_{q_2}(\mu)$, вычисленные по формуле (5.3) имеют один и тот же корень $\mu_1 = 1$. Следовательно, должно быть еще одно значение $q_3^* = q_2^*/q_1^* = 169/121$, при котором обнуляется q -дискриминант. Таким образом, найдены три корня многочлена (5.5): $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = q_1^*$, $\mu_3 = q_2^*$, и, следовательно, $f_6(\mu) = (\mu - 1)(\mu - q_1^*)(\mu - q_2^*)v_3(\mu)$. Остальные иррациональные корни μ_k , $k = 4, 5, 6$, кубического многочлена $v_3(\mu)$ легко находятся с помощью тригонометрической формулы Виета [18, § 119].

Итак, имеется резонансное соотношение (3.8)

$$5p_1 + 11p_2 + 13p_3 = 0 \quad (5.6)$$

между частотами $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11/5$, $\lambda_3 = 13/5$. Соотношение (5.6) имеет три целочисленных решения $\mathbf{p}_1 = (1, -4, 3)$, $\mathbf{p}_2 = (3, 1, -2)$ и $\mathbf{p}_3 = (4, -3, 1)$, из которых следует, что условие (3.9) теоремы 2 не выполнено. Таким образом, имеется инвариантное координатное подпространство L_I , $I = \{1, 2, 3\}$, размерности шесть в нормальной форме, соответствующее трем собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Каждому из оставшихся собственных чисел λ_i , $i = 4, 5, 6$, соответствует двумерное инвариантное координатное подпространство L_i . В силу того, что порядки целочисленных векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ равны соответственно, 4, 3, 4, то исследование динамики исходной системы на подпространстве L_I возможно лишь выполнив нелинейную нормализацию исходной системы по крайней мере до 6-го порядка включительно.

6. БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность профессору А.Д. Брюно за помощь, плодотворное обсуждение и поддержку при написании данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (I) // Тр. ММО. 1971. Т. 25. С. 119–262.
2. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.
3. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Гл. ред. физ.-мат. литер. изд-ва “Наука”, 1978. 352 с.
4. Bruno A.D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo: Springer–Verlag, 1989. 350 p.
5. Bruno A.D., Enderal V.F., Romanovski V.G. On new integrals of the Algaba-Gamero-Garcia system // Computer Algebra in Scientific Computing / Ed. by V.P. Gerdt, W. Koepf, E.W. Mayr, E.V. Vorozhtsov. Berlin Heidelberg: Springer, 2017. V. 10490 of Lecture Notes in Computer Science. P. 40–50.
6. Брюно А.Д. Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением // ЖВММФ. 2020. Т. 60. № 1. С. 36–52.
7. Брюно А.Д. Нормализация периодической системы Гамильтона // Программирование. 2020. Т. 46. № 2. С. 76–83.
8. Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕ-НАНД, 2015. 304 с.
9. Wolfram S. The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.
10. Thompson I. Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 228 p.

11. SymPy: symbolic computing in Python / Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki et al. // Peer J. Computer Science. 2017. V. 3. P. e103. <https://doi.org/10.7717/peerjcs.103>
12. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199–239.
13. Биркгоф Д.Д. Динамические системы. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999. 408 с.
14. Lyapunov A.M. Problme gnral de la stabilit du mouvement // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 1892. V. 9 (1907). № 2. P. 204474. Ann Math. Studies (1947). Stability of Motion. New York, London: Academic Press, 1966 (English).
15. Зигель К., Мозер Ю. Лекции по небесной механике. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
16. Калинина Е.А., Утешев А.Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.
17. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry. Algorithms and Computations in Mathematics 10. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2006. ix+662 p.
18. Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. 4-е изд. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1941. 460 с.
19. Gathen J. von zur, Leking T. Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. 2003. V. 297. P. 199–239.
20. Батхин А.Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42. № 2. С. 8–21.
21. Кац В.Г., Чен П. Квантовый анализ. М.: МЦНМО, 2005. 128 с.
22. Батхин А.Б. Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена // Программирование. 2018. № 2. С. 5–17.
23. Батхин А.Б. Вычисление резонансного множества многочлена при ограничениях на коэффициенты // Программирование. 2019. № 2. С. 6–15.
24. Батхин А.Б. Вычисление обобщенного дискриминанта вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 88. 40 с. http://www.keldysh.ru/papers/2016/prep2017_88.pdf.
25. Джурри Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М., 1979. 304 с.
26. Акритас А.Г. Основы компьютерной алгебры с приложениями. М.: Мир, 1994. 544 с.
27. Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76. № 1. С. 80–133.
28. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. 396 с.
29. Маркеев А.П. Нелинейные колебания симпатических маятников // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 3. С. 605–621.