

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАНТА
ДВУХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ© 2021 г. В. И. Кузоватов^{а,*}, А. А. Кытманов^{а,**}, Е. К. Мышкина^{б,***}^а Сибирский федеральный университет,
660041 Красноярск, пр. Свободный, 79, Россия^б Институт вычислительного моделирования СО РАН,
660036 Красноярск, Академгородок, 50/44, Россия

*E-mail: kuzovатов@yandex.ru

**E-mail: aakytм@gmail.com

***E-mail: elfifenok@mail.ru

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.

После доработки 03.09.2020 г.

Принята к публикации 04.09.2020 г.

На основе рекуррентных формул Ньютона приведен алгоритм построения результата двух целых функций, что является одним из методов исключения неизвестных для систем неалгебраических уравнений. Алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры Maple. Приведены примеры, демонстрирующие работу данного алгоритма.

DOI: 10.31857/S0132347421020096

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных инструментов, открывших путь к созданию алгоритмических методов исследования и решения систем алгебраических уравнений, явилось понятие базиса Гребнера идеала кольца многочленов, занимающее одно из центральных мест в современной компьютерной алгебре (см., например, [1]). Одно из дальнейших развитий понятия базиса Гребнера приведено в [2]. Классические схемы исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений, основанные на методе базисов Гребнера, реализованы во многих существующих системах компьютерной алгебры. Однако, такие методы неприменимы для исследования систем существенно неалгебраических уравнений (т.е. уравнений, не сводящихся к алгебраическим заменам переменных).

Вместе с тем, неалгебраические системы уравнений возникают в различных областях знания. В частности, в процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений с правыми частями, разложимыми в ряд Тейлора, актуален вопрос об определении числа стационарных состояний в множествах определенного вида (и их локализации). Эта проблема приводит к задачам построения алгоритмов для определения числа корней заданной системы уравнений в различных множествах, определения самих корней, исключения части неизвестных из системы. В частности, в монографии [3] приведены многочислен-

ные примеры из химической кинетики, где требуются алгоритмы исключения неизвестных. Здесь важно применение разработанных методов для качественного и численного анализа математических моделей термокинетики процессов горения и катализа с целью получения условий воспламенения, взрыва и критических явлений в химически реагирующих системах. Для приложений, в том числе, например, для уравнений химической кинетики, важной задачей является исследование зависимостей решений систем нелинейных, в том числе и неалгебраических, уравнений от параметров. В вычислительном плане эта задача является достаточно трудоемкой. Ее степень сложности сильно зависит от размерности пространства неизвестных. Поэтому снижение этой размерности за счет исключения переменных может привести к упрощению исходной задачи.

Метод исключения неизвестных из систем нелинейных алгебраических уравнений, основанный на теории многомерных вычетов, был предложен Л.А. Айзенбергом в [4] в 1977 г. Дальнейшие модификации метода были предложены А.П. Южаковым, А.К. Цихом, В.И. Быковым, А.М. Кытмановым, М.З. Лазманом в конце прошлого века [3]. Эти идеи были в последствии развиты в работах [5–7]. Алгоритмический метод (разработанный на основе идей Л.А. Айзенберга и А.П. Южакова) был предложен М. Елкади и А. Ижером в работе [8]. Идея метода заключалась в нахожде-

нии определенных вычетов интегралов, связанных со степенными суммами корней (в положительных степенях) заданной системы уравнений, избегая нахождения самих корней и применяя затем к ним рекуррентные формулы Ньютона. По сравнению с классическим методом, данный метод сокращал время работы алгоритма, не повышая при этом кратность корней.

Еще одним методом исключения неизвестных служит построение результата двух целых функций. Хорошо известен классический результат Сильвестра для двух многочленов и метод исключения неизвестных, на нем основанный. Для неалгебраических функций такое понятие не было изучено ранее. Лишь в последние годы в работах [9, 10] обсуждается один подход к нахождению результата двух целых функций, основанный на рекуррентных формулах Ньютона.

Разработанный в данной работе алгоритм может быть также использован при исследовании дзета-функции корней некоторых классов целых функций, которые являются важным инструментом в создании методов исключения неизвестных из систем нелинейных уравнений, как было показано в работах [11–13].

2. КЛАССИЧЕСКИЙ РЕЗУЛЬТАНТ СИЛЬВЕСТРА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Напомним, что для данных многочленов f и g классический результат $R(f, g)$ может быть определен различными способами с использованием

а) определителя Сильвестра (см., например, [14–16]);

б) формулы для произведения $R(f, g) = \prod_{\{x: f(x)=0\}} g(x)$ (см., например, [14–16]);

в) способа Безу–Кэли (см., например, [17]).

В данной работе приведем конструктивное построение результата двух целых функций на комплексной плоскости. В качестве основного определения результата возьмем формулу произведения. Такой выбор объясняется тем, что целые функции являются естественным обобщением многочленов в комплексном анализе.

В ряде работ (см., например, [18]–[22]) различными авторами были предложены обобщения понятия результата для аналитических функций в кольце матричнозначных функций, мероморфных функций на римановой поверхности, для систем алгебраических уравнений. Во всех этих исследованиях предполагалось, что число нулей или полюсов конечно. Наш случай существенно отличается тем, что целые функции могут иметь бесконечное число нулей. Поэтому для нахождения результата необходим предельный переход.

Актуальность данной задачи определяется тем, что, например, в уравнениях химической кинетики возникают функции и системы уравнений, состоящие из экспоненциальных многочленов [23].

Первым шагом в нахождении результата двух целых функций явилась работа [9], в которой рассмотрен случай, когда одна из функций — целая, а вторая является многочленом (или целой функцией с конечным числом нулей). Условие конечности числа нулей целой функции изучено в [24]. В работе [25] обобщены результаты из [9] в случае, когда одна из целых функций удовлетворяет некоторым жестким ограничениям, но все-таки может иметь бесконечное число нулей.

Преимущество нашего подхода состоит в том, что он позволяет ответить на вопрос, имеют ли целые функции общие нули или нет, не вычисляя самих нулей. Итоговая формула для результата содержит степенные суммы корней, которые можно вычислить по формулам Ньютона, не прибегая к нахождению самих нулей.

3. РЕЗУЛЬТАНТ ДВУХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим систему уравнений, состоящую из квадратного многочлена $f(z)$ и многочлена n -й степени $g(z)$

$$\begin{cases} f(z) = a_0 + a_1 z + z^2, \\ g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим нули многочлена $f(z)$ через z_1, z_2 . Тогда (см., например, [10])

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 g(z_i) &= g(z_1)g(z_2) = b_0^2 + b_1^2 z_1 z_2 + \\ &+ b_2^2 z_1^2 z_2^2 + \dots + b_n^2 z_1^n z_2^n + b_0 b_1 (z_1 + z_2) + \\ &+ b_0 b_2 (z_1^2 + z_2^2) + \dots + b_0 b_n (z_1^n + z_2^n) + \\ &+ b_1 b_2 z_1 z_2 (z_1 + z_2) + b_1 b_3 z_1 z_2 (z_1^2 + z_2^2) + \dots + \\ &+ b_1 b_n z_1 z_2 (z_1^n + z_2^n) + b_2 b_3 z_1^2 z_2^2 (z_1 + z_2) + \\ &+ b_2 b_4 z_1^2 z_2^2 (z_1^2 + z_2^2) + \dots + b_2 b_n z_1^2 z_2^2 (z_1^n + z_2^n) + \\ &+ \dots + b_{n-1} b_n z_1^{n-1} z_2^{n-1} (z_1^n + z_2^n). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получим

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 g(z_i) &= g(z_1)g(z_2) = \\ &= \sum_{k=0}^n b_k^2 z_1^k z_2^k + \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n b_t b_s (z_1^t z_2^s + z_1^s z_2^t) = \\ &= \sum_{k=0}^n b_k^2 z_1^k z_2^k + \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n b_t b_s z_1^t z_2^t (z_1^{s-t} + z_2^{s-t}). \end{aligned}$$

Напомним классические рекуррентные формулы Ньютона для многочленов. Они связывают между

собой коэффициенты многочлена и степенные суммы его корней.

Пусть

$$P(z) = z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_{m-1} z + c_m.$$

Обозначим через $z_1, z_2, \dots, z_m$ его корни (среди них могут быть и кратные). Определим степенную сумму корней

$$S_k = z_1^k + \dots + z_m^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad S_0 = m.$$

Степенные суммы S_k и коэффициенты c_j связаны между собой классическими рекуррентными формулами Ньютона:

$$\begin{cases} S_j + \sum_{i=1}^{j-1} S_{j-i} c_i + j c_j = 0, & 1 \leq j \leq m, \\ S_j + \sum_{i=1}^m S_{j-i} c_i = 0, & j > m. \end{cases} \quad (2)$$

Используя классические формулы Виета

$$z_1 + z_2 = -a_1, \quad z_1 z_2 = a_0$$

и определение результата в виде формулы произведения, получаем следующий результат.

Теорема 1 ([10]). *Результант $R(f, g)$ системы многочленов вида (1) вычисляется по формуле*

$$R(f, g) = \sum_{k=0}^n b_k^2 a_0^k + \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n b_t b_s a_0^t S_{s-t}, \quad (3)$$

где степенные суммы S_j корней многочлена $f(z)$ определяются рекуррентными формулами Ньютона.

Осуществив в (3) предельный переход по n , получаем утверждение о результате относительно целой функции и многочлена (или целой функции с конечным числом нулей).

Теорема 2. ([10]). *Пусть $g(z)$ — целая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ вида*

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots,$$

а $f(z)$ — многочлен вида (1). Тогда результатом $R(f, g)$ является выражение

$$R(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 a_0^k + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=t+1}^{\infty} b_t b_s a_0^t S_{s-t},$$

где ряды в правой части абсолютно сходятся.

4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм состоит из функции, реализующей вычисление степенных сумм с помощью классических формул Ньютона (2) и основной функции, вычисляющей результат системы (1), вычисленный по формуле (3).

5. ПРИМЕРЫ

Алгоритм 1: Алгоритм вычисления классических рекуррентных формул Ньютона.

Function *RecurrNewton* ($\{c_1, \dots, c_m\}, k$):

Input: Список коэффициентов $c_1, \dots, c_m$; натуральное число k .

Output: Список $S_1, \dots, S_k$ степенных сумм, вычисляющихся по формулам (2)

begin

$S_1 := -c_1$

for $j = 2 \dots \min(m, k)$ **do**

$S_j := -\sum_{i=1}^{j-1} S_{j-i} c_i - j c_j$

if $k > m$ **then**

for $j = m + 1 \dots k$ **do**

$S_j := -\sum_{i=1}^m S_{j-i} c_i$

return $\{S_1, \dots, S_k\}$

Алгоритм 2: Алгоритм построения результата двух целых функций.

Input: Список коэффициентов a_0, a_1 , список коэффициентов $b_0, b_1, \dots, b_n$.

Output: Результат системы (1), вычисленный по формуле (3).

begin

$S := \text{RecurrNewton}(\{a_0, a_1\}, n)$

$R := \sum_{k=0}^n b_k^2 a_0^k$

for $t = 0 \dots n - 1$ **do**

$R := R + \sum_{s=t+1}^n b_t b_s a_0^t S[s - t]$

return R

Алгоритм был реализован в среде Maple 2016 64bit. Полный код программы доступен по адресу <https://github.com/aakytmanov/Resultant2n>. Вычисления производились на машине Intel Core i7-4790 (3.6 GHz) с 32 Gb RAM под управлением Windows 7 Enterprise x64SP1. Время счета для приведенных примеров составило менее 0.2 секунды.

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений ($n = 2$)

$$\begin{cases} f(z) = z(z-1) = z^2 - z, \\ g(z) = (z-2)(z+2) = z^2 - 4. \end{cases}$$

В данном случае

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -1, \quad b_0 = -4, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1.$$

Тогда формула (3) примет вид

$$R(f, g) = \sum_{k=0}^2 b_k^2 a_0^k + \sum_{t=0}^1 \sum_{s=t+1}^2 b_t b_s a_0^t S_{s-t}.$$

Поскольку $a_0 = 0$, то в этих суммах останутся лишь слагаемые, соответствующие $k = 0$ и $t = 0$, то есть

$$R(f, g) = b_0^2 + \sum_{s=1}^2 b_0 b_s S_s.$$

Поскольку $b_1 = 0$, то в одномерной сумме останутся лишь слагаемые при $s = 2$. Таким образом,

$$R(f, g) = b_0^2 + b_0 b_2 S_2.$$

Найдем степенную сумму корней S_2 , не используя значения самих корней, а именно по рекуррентным формулам Ньютона. Так, для нашего случая

$$S_2 = 1.$$

Таким образом, $R(f, g) = 12$.

Входными данными алгоритма в этом случае будут списки коэффициентов a_i и b_j :

$$> \text{Res}([0, -1], [-4, 0, 1]);$$

Пример 2. Данные методы приводят к вычислению сумм некоторых типов кратных числовых рядов, ранее отсутствовавших в известных справочниках. Эти результаты представляют самостоятельный интерес. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f(z) = z^2 - a^2, \\ g(z) = e^{bz} = 1 + bz + \frac{(bz)^2}{2!} + \dots + \frac{(bz)^n}{n!} + \dots \end{cases}$$

Вычисляя результат $R(f, g)$, используя теорему 2 с одной стороны, и используя определение результата в виде формулы для произведения с другой стороны, получим соотношение (см. [10])

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(ab)^{2k}}{(k!)^2} + 2 \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (ab)^{2t+2j}}{t!(t+2j)!} = 1.$$

При этом первая сумма является известной специальной функцией. Это функция Бесселя 1-го рода, а именно $J_0(2ab)$.

Частичные суммы выражения в левой части могут быть получены с помощью предложенного алгоритма, например, используя входные данные

$> \text{Res}([-a^2, 0], [1, b, b^2/2!, b^3/3!, b^4/4!, b^5/5!, b^6/6!]);$
получим

$$\begin{aligned} R(f, g) &= 1 + \frac{a^4 b^4}{3} - \frac{a^6 b^6}{40} - \frac{a^8 b^8}{960} + \frac{a^{10} b^{10}}{21600} + \\ &+ \frac{a^{12} b^{12}}{518400} - \frac{a^4 b^4}{3} + \frac{a^6 b^6}{40} + \frac{a^8 b^8}{720} = \\ &= 1 + \frac{a^8 b^8}{2880} + \frac{a^{10} b^{10}}{21600} + \frac{a^{12} b^{12}}{518400}. \end{aligned}$$

6. БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке следующих фондов: второй автор использовал поддержку гранта РФФ 18-71-10007 (разработка и программная реализация алгоритма); третий автор поддержан грантом РФФИ 19-31-60012 (постановка технического задания для разработки алгоритма, тестирование, вычисление примеров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. von zur Gathen J., Gerhard J. Modern Computer Algebra (3rd edition), Cambridge University Press, 2013.
2. Канцов О.В. Системы образующих идеалов алгебры сходящихся дифференциальных рядов // Программирование. 2014. № 2. С. 32–40.
3. Vykov V.I., Kytmanov A.M., Lazman M.Z. Elimination methods in polynomial computer algebra. Dordrecht—Boston—Basel: Kluwer Academic Publishers, 1998.
4. Айзенберг Л.А. Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 3. С. 505–508.
5. Кйтманов А.А. Об аналогах рекуррентных формул Ньютона // Изв. вузов. Математика, 2009. № 10. С. 40–50.
6. Кйтманов А.А. Алгоритм вычисления степенных сумм корней для класса систем нелинейных уравнений // Программирование. 2010. Т. 36. № 2. С. 55–63.
7. Kytmanov A.A., Kytmanov A.M., Myshkina E.K. Finding Residue Integrals for Systems of Non-algebraic Equations in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Symbolic Computation. 2015. V. 66. P. 98–110.
8. Elkadi M., Yger A. Residue calculus and applications // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 2007. V. 43. № 1. P. 55–73.
9. Kytmanov A.M., Naprienko Ya.M. An approach to define the resultant of two entire functions // Journal Complex Variables and Elliptic Equations. 2017. V. 62. № 2. P. 269–286.
10. Kytmanov A.M., Myshkina E.K. On Some Approach for Finding the Resultant of Two Entire Functions // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2019. V. 12. № 4. P. 434–438.
11. Kytmanov A.M., Myslivets S.G. On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations // Siberian Math. J. 2007. V. 48. № 5. P. 863–870.

12. *Kuzovатов V.I., Kytmanov A.A.* On the Zeta-Function of Zeros of Some Class of Entire Functions // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2014. V. 7. № 4. P. 489–499.
13. *Кузоватов В.И., Кытманов А.А., Кузоватова О.И.* Алгоритм построения аналога формулы Бине // Программирование. 2020. № 2. С. 38–42.
14. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля, упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.
15. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.
16. *van der Waerden B.L.* Algebra. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1966.
17. *Krein M.G., Naimark M.A.* The Method of Symmetric and Hermitian Forms in the Theory of the Separation of the Roots of Algebraic Equation // Linear and Multilinear Algebra. 1981. V. 10. № 4. P. 265–308.
18. *Gohberg I.C., Heinig G.* Resultant Matrix and its Generalization. I. Resultant Operator of Matrix Polynomial // Acta Sci. Math. 1975. V. 72. P. 41–61.
19. *Gohberg I.C., Heinig G.* Resultant Matrix and its Generalization. II. Continual Analog of Resultant Matrix // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1976. V. 28. P. 189–209.
20. *Gohberg I.C., Lerer L.E.* Resultant Operators of a Pair of Analytic Functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 72. № 1. P. 65–73.
21. *Gustafsson B., Tkachev V.G.* The Resultant on Compact Riemann Surfaces // Comm. Math. Phys. 2009. V. 10. P. 265–308.
22. *Morozov A.Yu., Shakirov Sh.R.* New and Old Results in Resultant Theory // Theor. Math. Phys. 2010. V. 163. № 2. P. 587–617.
23. *Быков В.И., Цыбенова С.Б.* Нелинейные модели химической кинетики. М.: КРАСАНД, 2011.
24. *Kytmanov A.M., Khodos O.V.* On Localization of Zeros of an Entire Function of Finite Order of Growth // Complex variables and operator theory. 2017. V. 11. № 2. P. 393–416.
25. *Kytmanov A.M., Khodos O.V.* An Approach to the Determination of the Resultant of Two Entire Functions // Russian Mathematics. 2018. V. 62. № 4. P. 42–51.