ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2022, № 1, с. 34–39

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 517.5+004.434

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО ЧЛЕНА ЧЕТВЕРТОЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

В. И. Аношин[a],*, А. Д. Бекетова[a],, А. В. Парусникова[a],***, К. В. Романов[a],******

[a] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Таллинская ул., д. 34, 123458 Москва, Россия*

**E-mail: vianoshin@edu.hse.ru*

***E-mail: adbeketova@edu.hse.ru*

****E-mail: aparusnikova@hse.ru*

*****E-mail: kvromanov_1@edu.hse.ru*

Поступила в редакцию 02.08.2021 г.
После доработки 19.08.2021 г.
Принята к публикации 15.09.2021 г.

В данной статье строятся асимптотики и асимптотические разложения решений второго члена четвертой иерархии Пенлеве с использованием методов степенной геометрии [1]. Приводятся результаты только для случая общего положения: при значениях параметров уравнения $\beta, \delta \neq 0$. Для построения асимптотических разложений используется код, написанный в пакете символьных вычислений.

DOI: 10.31857/S0132347422010022

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является исследование асимптотических разложений решений второго члена четвертой иерархии Пенлеве [1], [2]. Функции Пенлеве используются в статистической физике, квантовой теории поля, геометрии минимальных поверхностей, теории чисел и других областях.

2. МЕТОДЫ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для построения асимптотических разложений используются методы степенной геометрии [3]. Выпишем часть шагов этих методов.

Рассматривается дифференциальное уравнение, которое имеет вид дифференциальной суммы, т.е. его левая часть является многочленом от независимой переменной, зависимой переменной и ее производных – суммой дифференциальных мономов. Для такого уравнения строится многоугольник Ньютона на координатной плоскости (q_1, q_2) – выпуклая оболочка имеющихся точек. В итоге каждой точке полученного многоугольника Ньютона соответствует один или несколько мономов. Последовательно рассматриваются все обобщенные грани многоугольника (вершины и ребра). Суммируются мономы, которые соответствуют обобщенной грани, получают функцию укороченной суммы $\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X)$ по $Q(a_i) \in S_j^{(d)}$.

Для каждого ребра строим внешние нормали, общий вид координат которых $\lambda\omega(1, r)$, где $\lambda > 0$. Если $x \to 0$, то $\omega < 0$, если $x \to \infty$, то $\omega > 0$. Координаты нормалей определяют степень первого члена асимптотического разложения решения уравнения, для которого вычисляется асимптотика $y(x)$: для ребра с внешней нормалью $\omega(1, r)$ общий вид асимптотики решения уравнения имеет вид $y = cx^r$. Для вершин также определяются нормальные конусы: как части плоскости, лежащие между лучами, натянутыми на векторы внешних нормалей к ребрам, примыкающим к вершинам.

3. ПОСТРОЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКА НЬЮТОНА ДЛЯ ВТОРОГО ЧЛЕНА ЧЕТВЕРТОЙ ИЕРАРХИИ ПЕНЛЕВЕ

Запишем второй член четвертой иерархии Пенлеве [3]. Заметим, что это уравнение сразу представлено в виде дифференциальной суммы:

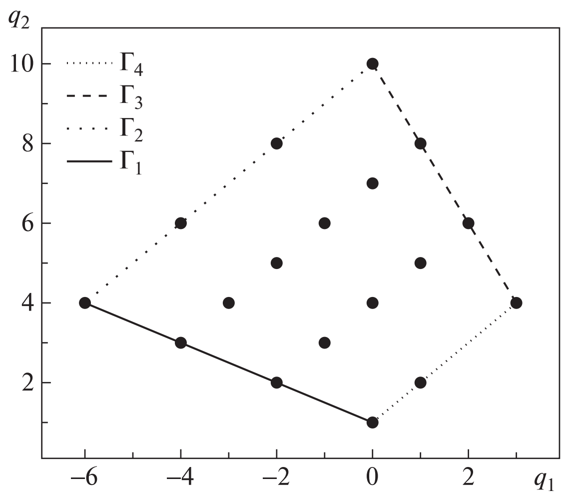

Рис. 1

$$
\begin{gathered}
(y_{xx} - 2xy - 2y^3 - \beta)y^2 y_{xxxx} - \frac{1}{2}y^2 y_{xxx}^2 + \\
+ (2y^2 + 8y^3 y_x + 4yy_x x - y_x y_{xx} + \beta y_x)yy_{xxx} - \\
- \frac{4}{3}yy_{xx}^3 + \left(3xy^2 + 3\beta y - \frac{3}{2}y^4 + \frac{3}{2}y_x^2\right)y_{xx}^2 + \\
+ (\beta y^4 - 2y_x y^2 - 12y_x^2 y^3 - 2\beta^2 y + 10xy^5 - \\
- 3\beta y_x^2 + 10y^7 - 4xyy_x^2 - 4\beta xy^2)y_{xx} + \\
+ 2(\beta - 4y^3)y^2 y_x + \left(4\beta xy + 8xy^4 + \frac{3}{2}\beta^2 + 12\beta y^3\right)y_x^2 - \\
- \frac{10}{3}y^{10} - 8xy^8 - 2\beta y^7 - 6x^2 y^6 - 2x\beta y^5 + \\
+ \left(\frac{1}{2}\beta^2 - 2 + 9\delta - \frac{4}{3}x^3\right)y^4 + x\beta^2 y^2 + \frac{1}{3}\beta^3 y = 0.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Здесь x – независимая, y – зависимая комплексные переменные, β, δ – комплексные параметры. Далее считаем, что оба параметра уравнения ненулевые.

Дифференциальным мономам, участвующим в уравнении (3.1), соответствуют следующие 18 показателей степени: (–4; 3), (–6; 4), (–3; 4), (–4; 6), (–2; 5), (–2; 2), (–1; 6), (–2; 8), (–1; 3), (0; 10), (1; 8), (0; 7), (2; 6), (–1; 5), (0; 4), (3; 4), (l; 2), (0; 1).

Отображаем их на координатную плоскость (q_1, q_2) и строим многоугольник Ньютона как их выпуклую оболочку на рис. 1.

Данный многоугольник можем построить с помощью кода из Листинга 1 (в команду Expand вместо многоточия подставляется левая часть уравнения (3.1)).

```
(*Исходное уравнение *)
equation = Expand [ . . . ] ;
order = 4 ; v a r i a b l e = x ;
function = y [ x ] ;
(*Вычисление векторных степеней мономов *)
d = Coefficient Rules [equation,
    Join [{variable, function},
    Table [D[function, {variable, i}],
    {i, 1, order}]]]/.Rule => List
vectorDegree [degrees_ ] :=
    {degrees [[1]], degrees[[2]]} +
    Total [Table[{=( i = 2), 1}
    degrees [[i]], {i, 3,
    Length [degrees]}]]
points = Sort [DeleteDuplicates [Map[
vectorDegree, (#[[1]]) & /@d]]]
(*Построение многоугольника Ньютона *)
convexHull = ConvexHullMesh [points,
    PlotTheme => “Detailed”];
convexHull Points =
    MeshCoordinates [convexHull];
Show[convexHull, ListPlot [points,
    PlotStyle => {Red,
    PointSize [Large]}]]
```

Листинг 1: Построение многоугольника Ньютона

Каждому ребру и вершине многоугольника Ньютона, изображённого на рис. 1, сопоставим принадлежащие ему точки Q_i и составим укороченные суммы. Это можно сделать с помощью программы символьных вычислений, которая приведена в Листинге 2.

```
(*Точки вершин многоугольника Ньютона *)
gamma0 = (#[[1]]) & /@
    Rationalize [ MeshPrimitives[
Region   ‘Mesh‘   MergeCells   [convex-
Hull], 0]]
lines = Rationalize [ MeshPrimitives [
Region   ‘Mesh‘   MergeCells   [convex-
Hull], 1]];
(*Точки сторон многоугольника Ньютона *)
gamma1 = Table [Select [points,
    RegionMember[lines[[i]], #] &], {i,
    1, Length [lines]}]
(*Укороченные уравнения для вершин *)
f0 = Table [FromCoefficientRules [Map[
Rule [#[[1]], #[[2]]]&, Select [d,
vectorDegree [#[[1]]] == gamma0 [[i]]
&]], Join[{variable, function},
Table [D[function, {variable, i}],
{ i, 1, order}]]], {i, 1,
Length [gamma0]}]
```

```
(*Укороченные уравнения для сторон *)
f1 = Table [FromCoefficientRules [Map[
Rule [#[[1]], #[[2]]] &,
    Flatten [Table [Select[d,
    vectorDegree [#[[1]]] ==
    gamma1 [[i]] [[j]] &], {j, 1,
    Length [gamma1 [[i]]]}], 1]],
    Join [{variable, function},
    Table [D[function, {variable, i}],
    {i, 1, order}]]], {i, 1,
    Length [gamma1]}]
```

Листинг 2: Вычисление укороченных уравнений

Теперь последовательно рассмотрим ребра получившегося многоугольника, а затем его вершины и найдём отвечающие им асимптотики и асимптотические разложения.

4. РЕБРО Γ_1

Ребру Γ_1 отвечает внешняя нормаль $N_1 = (-1; -2)$ и укороченное уравнение

$$\begin{gathered} y_{xx}y^2y_{xxxx} - \beta y^2 y_{xxxx} - \frac{1}{2}y^2y_{xxx}^2 - yy_xy_{xx}y_{xxx} + \\ + \beta yy_xy_{xxx} - \frac{4}{3}yy_{xx}^3 + 3\beta yy_{xx}^2 + \frac{3}{2}y_x^2y_{xx}^2 - \\ 2\beta^2yy_{xx} - 3\beta y_x^2y_{xx} + \frac{3}{2}\beta^2y_x^2 + c13\beta^3y = 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Этому ребру соответствует асимптотика $y = cx^2$ при $x \to 0$. Значения c находим из уравнения

$$\frac{1}{3}\beta^3c + 2\beta^2c^2 - 12\beta c^3 + \frac{40}{3}c^4 = 0,$$

ненулевыми корнями которого являются $c_1 = -0.1\beta$ (некратный) и $c_2 = 0.5\beta$ (кратности два).

Проверим, есть ли критические числа, получим линейный оператор

$$\begin{gathered} y_{xx}y^2\frac{d^4}{dx^4} - \beta y^2\frac{d^4}{dx^4} - yy_xy_{xx}\frac{d^3}{dx^3} + \beta yy_x\frac{d^3}{dx^3} - \\ - \frac{4}{3}y_{xx}^3 - 4yy_{xx}^2\frac{d^2}{dx^2} + 3\beta y_{xx}^2 + 6\beta yy_{xx}\frac{d^2}{dx^2} + \\ + 3y_x^2y_{xx}\frac{d^2}{dx^2} + 3y_xy_{xx}^2\frac{d}{dx} - 2\beta^2y\frac{d^2}{dx^2} - 2\beta^2y_{xx} - \\ - 6\beta y_xy_{xx}\frac{d}{dx} - -3\beta y_x^2\frac{d^2}{dx^2} + 3\beta^2y_x\frac{d}{dx} + \frac{1}{3}\beta^3. \end{gathered} \tag{4.2}$$

При подстановке $y = -\dfrac{\beta}{10}x^2$ в выражение (4.2) получим оператор

$$\begin{gathered} \varkappa = \frac{108\beta^3}{125} - \frac{108\beta^3}{125}x\frac{d}{dx} + \frac{24\beta^3}{125}x^2\frac{d^2}{dx^2} + \\ + \frac{3\beta^3}{125}x^3\frac{d^3}{dx^3} - \frac{3\beta^3}{250}x^4\frac{d^4}{dx^4}. \end{gathered}$$

Применим оператор $\varkappa$ к x^k и сократим результат на $x^k\beta^3$, получим характеристический многочлен

$$\nu(k) = \frac{108}{125} - \frac{117}{125}k - \frac{3}{250}k^2 + \frac{12}{125}k^3 - \frac{3}{250}k^4$$

с корнями $k_1 = -3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 4$, $k_4 = 6$. Учитывая подходящие значения k, а именно, $k = 4$ и $k = 6$, выпишем множество степеней, участвующих в разложении, продолжающем рассматриваемую асимптотику, и сразу приведем соответствующее семейство степенных разложений решений при $x \to 0$:

$$W_1 = \left\{ y = -\frac{\beta x^2}{10} + c_4x^4 + \frac{\beta}{80}x^5 + c_6x^6 + \sum_{k=7}^{\infty} c_kx^k \right\},$$

где $c_4, c_6 \in \mathbb{C}$ — произвольные константы, остальные коэффициенты c_k, где $k > 6$, однозначно выражаются через них.

При подстановке $y = \dfrac{\beta}{2}x^2$ получим нулевой оператор, так как соответствующий корень был кратным. Делаем замену $y = \dfrac{\beta}{2}x^2 + w$ в уравнении (3.1) и проводим вычисления для уравнения, получившегося после замены. Получаем два варианта для следующего члена разложения: $w_{1,2} = \left(\dfrac{\beta}{20} \pm \dfrac{3\beta\sqrt{2\delta}}{250}\right)x^5$. Применяя первую вариацию укороченного уравнения, соответствующего ребру многоугольника Ньютона уравнения с зависимой переменной w (вычисленную на решениях $w_{1,2}$), к x^k, получаем характеристический многочлен, корнями которого являются $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 4$, $k_4 = 6$. Нам опять подходят только значения 4 и 6. Итак, продолжая асимптотику $y = \dfrac{\beta}{2}x^2$ в виде степенных асимптотических разложений, получаем 2 семейства разложений решений при $x \to 0$:

$$\begin{gathered} W_{2,3} = \left\{ y = \frac{\beta x^2}{2} + c_4x^4 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\beta}{20} \pm \frac{3\beta\sqrt{2\delta}}{250}\right)x^5 + c_6x^6 + \sum_{k=7}^{\infty} c_kx^k \right\}, \end{gathered}$$

где $c_4, c_6 \in \mathbb{C}$ — произвольные константы, c_k, где $k > 6$, однозначно выражаются через них.

5. РЕБРО Γ_2

Данному ребру отвечает внешняя нормаль $N_2 = (-1; 1)$ и укороченное уравнение

$$\begin{gathered} y_{xx}y^2y_{xxxx} - 2y^5y_{xxxx} - \frac{1}{2}y^2y_{xxx}^2 + 8y^4y_xy_{xxx} - \\ - y_xy_{xx}yy_{xxx} - \frac{4}{3}yy_{xx}^3 - \frac{3}{2}y^4y_{xx}^2 + \\ \frac{3}{2}y_x^2y_{xx}^2 - 12y_x^2y^3y_{xx} + 10y^7y_{xx} - \frac{10}{3}y^{10} = 0, \end{gathered} \tag{5.1}$$

что дает соответствие асимптотики вида $y = \frac{c}{x}$ при $x \to 0$. Значения c находим из уравнения

$$c^4(c^6 - 6c^4 + 9c^2 - 4) = 0,$$

ненулевые корни которого – это $c_1 = 2$, $c_2 = -2$ (некратные), $c_3 = 1$, $c_4 = -1$ (каждый – кратности два).

Для корней $c = \pm 2$ получаем, что корни k характеристического многочлена таковы, что $k \in \{-3, -2, 3, 4\}$, что влияет на структруру степеней, участвующих в степенном разложении. Для продолжений этих асимтотик при $x \to 0$ имеем такие семейства разложения:

$$W_4 = \left\{ y = \frac{2}{x} + \left(\frac{\beta - 2}{20}\right)x^2 + c_3c^3 + c_4x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} c_kx^k \right\};$$

$$W_5 = \left\{ y = -\frac{2}{x} + \left(\frac{\beta + 2}{20}\right)x^2 + c_3c^3 + c_4x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} c_kx^k \right\},$$

здесь $c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ – произвольные константы, остальные коэффициенты c_k, $k > 4$ однозначно определяются через них.

Для исследования разложений, соответствующих кратным корням $c = \pm 1$ делаем в уравнении (5.1) замену $y = \pm\frac{1}{x} + w$, проводя процесс поиска следующего члена асимптотики для нового уравнения и его многоугольника Ньютона. Так, следующее слагаемое асимптотики имеет вид $w_{6,\,7} = \pm\frac{\sqrt{9\delta - 8 - 8\beta - 2\beta^2}}{4\sqrt{2}}x^2$ для $y = \frac{1}{x}$ и $w_{8,\,9} = \pm\frac{\sqrt{-9\delta + 8 - 8\beta + 2\beta^2}}{4\sqrt{2}}x^2$ для $y = -\frac{1}{x}$ (здесь нумерацию приводим в соответствии с нумерацией соответствующих разложений). Далее находим характеристический многочлен. Его корни – это $k_1 = -2$, $k_2 = 0$, $k_3 = 3$, $k_4 = 4$. Критическими числами являются k_3 и k_4, так как для них $\operatorname{Re} k_i > 2$. Имеем следующие четыре семейства асимптотических разложений решений при $x \to 0$:

$$W_{6,7} = \left\{ y = \frac{1}{x} \pm \frac{\sqrt{9\delta - 8 - 8\beta - 2\beta^2}}{4\sqrt{2}}x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} c_kx^k \right\};$$

$$W_{8,9} = \left\{ y = -\frac{1}{x} \pm \frac{\sqrt{-9\delta + 8 - 8\beta + 2\beta^2}}{4\sqrt{2}}x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} c_kx^k \right\},$$

вновь $c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ – произвольные константы, остальные постоянные c_k, $k > 4$ однозначно определяются через них.

6. РЕБРО Γ_3

Ребру Γ_3 соответствует внешняя нормаль $N_3 = (1; 1/2)$ и укороченное уравнение

$$-\frac{10}{3}y^{10} - 8xy^8 - 6x^2y^6 - \frac{4}{3}x^3y^4 = 0. \tag{6.1}$$

Сразу отметим, что укороченное уравнение (6.1) алгебраическое, критических чисел нет. Исходя из вида внешней нормали, ищем степенную асимптотику соответствующего решения в виде $y = cx^{1/2}$, подставляя это выражение в уравнение (6.1). Получаем соотношение

$$-\frac{10}{3}c^{10}x^5 - 8xc^8x^4 - 6x^2c^6x^3 - \frac{4}{3}x^3c^4x^2 = 0,$$

откуда выражаем ненулевые значения c: $c_{1,2} = \pm i$ кратности 2, $c_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{2}{5}}$ – некратные корни. Продолжая асимптотики вида $y = c_kx^{1/2}$ в виде степенных асимптотических разложений, получаем 6 разложений решений при $x \to \infty$:

$$W_{10,11} = \left\{ y = i\sqrt{x} + \frac{\beta \pm \sqrt{\beta - (\beta^2 - 18\delta)}}{4x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_kx^{-1-\frac{3}{2}k} \right\};$$

$$W_{12,13} = \left\{ y = -i\sqrt{x} + \frac{\beta \pm \sqrt{\beta + (\beta^2 - 18\delta)}}{4x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_kx^{-1-\frac{3}{2}k} \right\};$$

$$W_{14,15} = \left\{ y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}i\sqrt{x} - \frac{\beta}{2x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_kx^{-1-\frac{3}{2}k} \right\}.$$

7. РЕБРО Γ_4

Укороченное уравнение для ребра Γ_4 имеет вид

$$-\frac{4}{3}x^3y^4 + x\beta^2y^2 + \frac{1}{3}\beta^3y = 0,$$

а внешняя нормаль — это $N_4 = (1; -1)$, ребру опять соответствуют асимптотики решений при $x \to \infty$, это асимптотики вида $y = cx^{-1}$. Укороченное уравнение вновь является алгебраическим, не дает критических чисел. Для нахождения значений c имеем уравнение

$$-\frac{4}{3}c^4 + \beta^2 c^2 + \frac{1}{3}\beta^3 c = 0,$$

откуда выражаем ненулевые значения c: $c_1 = \beta$ кратности 1, $c_2 = -\frac{\beta}{2}$ — кратности 2. Продолжаем асимптотики вида $y = c_k x^{1/2}$ в виде степенных асимптотических разложений, имеем ещё 3 разложения решений при $x \to \infty$:

$$W_{16} = \left\{ y = \frac{\beta}{x} + \frac{6\beta\delta - 7\beta - 5\beta^3}{2x^4} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^{-1-3k} \right\};$$

$$W_{17,18} = \left\{ y = -\frac{\beta}{2x} \pm \frac{3\beta\sqrt{\delta}}{4x^4} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^{-1-3k} \right\}.$$

8. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВЕРШИН

Рассмотрим укороченные уравнения, соответствующие вершинам.

Вершинам (0, 1), (3, 4) и (0, 10) соответствуют алгебраические мономы $1/3\beta^3 y$, $-4/3x^3y^4$, $-10/3y^{10}$, они не дают асимптотик решений уравнений, согласно [1]. Вершине (−6, 4) соответствует нормальный конус $\{(p_1, p_2) : (p_1, p_2) = \lambda_1(-1;\ -2) + \lambda_2(-1; 1), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$, что дает ограничения на показатель степени: $\{r : -1 < \mathrm{Re}\, r < 2, r \neq -1, r \neq 2\}$. Также данной вершине отвечает укороченное уравнение

$$y^2 y_{xx} y_{xxxx} - \frac{y^2 y_{xxx}^2}{2} - \frac{4}{3} y y_{xx}^3 + \frac{3}{2} y_x^2 y_{xx}^2 - y y_x y_{xx} y_{xxx} = 0.$$

Подставим в него $y = cx^r$, приравняем полученное выражение к нулю и решим уравнение относительно r; получим возможные значения r: $r = -3$, $r = 0$, $r = 1$, $r = 4$.

Только $r = 0$, $r = 1$ лежат в нормальном конусе, соответствующем данной вершине, откуда легко вычисляются дополнительные однопараметрические семейства асимптотик решений второго члена четвертой иерархии Пенлеве при $x \to 0$, а именно, имеются асимптотики вида $y = c$ и $y = cx$, где $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ — произвольная постоянная. В данной работе продолжим только вторую асимптотику как асимптотическое разложение.

Стандартный метод вычисления структуры разложения сразу не приводит нас к результату: линеаризация укороченного уравнения, соответствующего вершине (−6, 4), на решении $y = cx$, дает нулевой оператор. Поэтому мы продолжаем вычисления, делая сдвиг $y = cx + w$. Для нового уравнения получаем следующий многоугольник Ньютона (рис. 2).

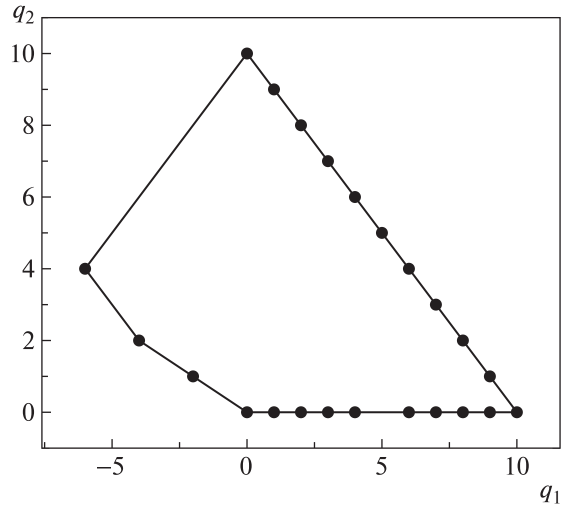

Рис. 2

Нас интересуют только те его вершины и ребра, нормальные конусы к которым могут дать асимпотики, соответствующие конусу задачи $\mathcal{K} = \{k : \mathrm{Re}\, k \geq 1, k \neq 1\}$. Этому условию соответствуют лишь вершины (0, 0) и (−4, 2) и соединяющее их ребро. Последовательно рассмотим их.

Вершине (0, 0) соответствует алгебраическое укороченное уравнение, которое не дает асимптотик.

Вершине (−4, 2) отвечает уравнение

$$\frac{3}{2}c^2 w_{xx}^2 - \frac{1}{2}c^2 x^2 w_{xxx}^2 + c^2 x^2 w_{xx} w_{xxxx} - c^2 x w_{xx} w_{xxx} = 0,$$

подставим в него $w = c_1 x^{r_1}$, видим, что $r_1 = 3$ или $r_1 = 5$. Ни одно из значений показателей степени не подходит, поскольку вектор $(-1, -r_1)$ не принадлежит нормальному конусу вершины.

Ребру, соединяющему указанные вершины, ставится в соответствие укороченное уравнение

$$\frac{3}{2}c^2 w_{xx}^2 - \frac{1}{2}c^2 x^2 w_{xxx}^2 + c^2 x^2 w_{xx} w_{xxxx} - c^2 xy w_{xx} w_{xxx} - \\ - \beta c^2 x^2 w_{xxxx} + \beta c^2 x w_{xxx} - 3\beta c^2 w_{xx} + \frac{3}{2}\beta^2 c^2 = 0,$$

а также внешняя нормаль (−1, −2), поэтому решение данного уравнения ищем в виде $w = Ax^2$. После подстановки получили:

$$6A^2 - 6\beta A + \frac{3}{2}\beta^2 = 0,$$

откуда $A = \frac{\beta}{2}$ — корень кратности 2. И поэтому мы продолжаем вычисления, делая сдвиг $y = cx + \frac{\beta}{2}x^2 + y_2$, добиваясь ненулевых значений линеаризации укороченного уравнения на решении. После подстановки получаем уравнение с многоугольником Ньютона, у которого подходящими являются вершина (−4, 2), дающая следующий член асимптотики вида c_3x^3 и критическое число 4, и ребро, соединяющее вершины (−4, 2) и (0, 4) данного многоугольника (критическое число 5).

В итоге получаем следующие семейства степенных асимптотических разложений, продолжающих асимптотику решения $y = cx$ при $x \to 0$:

$$W_{19} = \left\{ y = cx + \frac{\beta}{2}x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_k x^k \right\};$$

$$W_{20,21} = \left\{ y = cx + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{c(2 \pm 3\sqrt{2\delta})}{12}x^4 + c_5x^5 + \sum_{k=6}^{\infty} b_k x^k \right\},$$

где $c, c_3 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c_4, c_5 \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные, коэффициенты a_k, b_k однозначно через них выражаются.

9. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда 19-71-10003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пикеринг А.* Иерархии Пенлеве и тест Пенлеве // УМН. 2003. Т. 137. С. 445–456.
2. *Кудряшов Н.А.* О четвертой иерархии Пенлеве // Теор. и матем. физика. 2003. Т. 134. С. 101–109.
3. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.