ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2022, № 1, с. 65–70

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 519.85

О ВЫЧИСЛЕНИИ РЕЗУЛЬТАНТА МНОГОЧЛЕНА И ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

© 2022 г. В. И. Кузоватов[a],*, А. А. Кытманов[a],, Е. К. Мышкина[b],*****

[a] *Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, 79, 660041 Красноярск, Россия*

[b] *Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 50/44, 660036 Красноярск, Россия*

**E-mail: kuzovatov@yandex.ru*

***E-mail: aakytm@gmail.com*

****E-mail: elfifenok@mail.ru*

Поступила в редакцию 02.08.2021 г.
После доработки 02.09.2021 г.
Принята к публикации 16.09.2021 г.

На основе рекуррентных формул Ньютона на комплексной плоскости найдены суммы значений одной целой функции в нулях другой целой функции. Это позволяет ответить на вопрос, имеют ли эти функции общие нули или нет. Приведен алгоритм вычисления приближения к результанту многочлена (или целой функции с конечным числом нулей) и целой функции. Алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры Maple. Приведены примеры, демонстрирующие работу данного алгоритма.

DOI: 10.31857/S013234742201006X

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее значимых типов задач, решаемых при помощи универсальных систем компьютерной алгебры, являются задачи по вычислениям с полиномами от нескольких переменных над различными полями и кольцами (разложения на множители, вычисление дискриминантов и результантов систем уравнений, базисов Гребнера и т.п.), а также решения систем нелинейных алгебраических уравнений и других систем, сводящихся к ним подстановками элементарных функций.

В то же время, аппарат исследования систем неалгебраических уравнений находится еще на начальной стадии развития. Одним из инструментов для исследования таких систем является формула многомерного логарифмического вычета, на основе которой был создан модифицированный метод исключения неизвестных из алгебраических систем, предложенный в [1] и развитый в [2]. Однако, для систем неалгебраических уравнений (содержащих, например, голоморфные функции) такие разработки отсутствовали.

Вместе с тем, неалгебраические системы уравнений возникают в различных областях знания. В частности, в процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений с правыми частями, разложимыми в ряд Тейлора, актуален вопрос об определении числа стационарных состояний в множествах определенного вида (и их локализации). Эта проблема приводит к задачам построения алгоритмов для определения числа корней заданной системы уравнений в различных множествах, определения самих корней, исключения части неизвестных из системы. В частности, в монографиях [2, 3] приведены многочисленные примеры из химической кинетики, где требуются алгоритмы исключения неизвестных.

Одним из методов исключения неизвестных служит построение результанта двух целых функций. Хорошо известен классический результант Сильвестра для двух многочленов и метод исключения неизвестных, на нем основанный. Для неалгебраических функций такое понятие не было изучено ранее. Лишь в последние годы в работах [4, 5] обсуждается один подход к нахождению результанта двух целых функций, основанный на рекуррентных формулах Ньютона.

Разработанный в данной работе алгоритм может быть также использован при исследовании дзета-функции корней некоторых классов целых функций, которые являются важным инструментом в создании методов исключения неизвестных из систем нелинейных уравнений, как было показано в работах [6, 7].

2. КЛАССИЧЕСКИЙ РЕЗУЛЬТАНТ СИЛЬВЕСТРА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Напомним, что для данных многочленов f и g классический результант $R(f,g)$ может быть определен различными способами (см. [8], [9]) с использованием определителя Сильвестра, способа Безу—Кэли или формулы для произведения

$$R(f,g) = \prod_{\{x:f(x)=0\}} g(x). \tag{1}$$

В данной работе мы рассматриваем построение результанта двух целых функций $f(z)$ и $g(z)$, $z \in \mathbb{C}$, с помощью (1). Выбор формулы произведения объясняется тем, что целые функции являются естественным обобщением многочленов в комплексном анализе.

В работах [10]– [14] были предложены обобщения понятия результанта для аналитических функций в кольце матричнозначных функций, мероморфных функций на римановой поверхности, для систем алгебраических уравнений. Во всех этих исследованиях предполагалось, что число нулей или полюсов конечно. Наш случай существенно отличается тем, что целые функции могут иметь бесконечное число нулей. Поэтому для нахождения результанта необходим предельный переход (по степени n многочлена $g(z)$ при фиксированном количестве нулей многочлена $f(z)$).

Первым шагом в нахождении результанта двух целых функций явилась работа [4], в которой рассмотрен случай, когда одна из функций — целая, а вторая является многочленом (или целой функцией с конечным числом нулей). В работе [15] обобщены результаты из [4] в случае, когда одна из целых функций удовлетворяет некоторым жестким ограничениям, но все-таки может иметь бесконечное число нулей.

Преимущество нашего подхода состоит в том, что он позволяет ответить на вопрос, имеют ли целые функции общие нули или нет, не вычисляя самих нулей. Итоговая формула для результанта содержит степенные суммы корней, которые можно вычислить по формулам Ньютона, не прибегая к нахождению самих нулей.

3. РЕЗУЛЬТАНТ ДВУХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим систему уравнений, состоящую из двух многочленов $f(z)$ и $g(z)$ степеней m и n соответственно (случай $m = 2$ рассмотрен в [5]):

$$\begin{cases} f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m, \\ g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n. \end{cases} \tag{2}$$

Напомним, что классические рекуррентные формулы Ньютона связывают между собой коэффициенты многочлена и степенные суммы его корней. А именно, пусть

$$P(z) = z^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_{m-1} z + c_m.$$

Тогда если $z_1, \ldots, z_m$ — его корни (в том числе и кратные), то степенные суммы S_k (определяемые как $S_0 = m$, $S_k = z_1^k + \ldots + z_m^k$, $k \in \mathbb{N}$) и коэффициенты c_j связаны соотношениями:

$$\begin{cases} S_j + \sum\limits_{i=1}^{j-1} S_{j-i} c_i + j c_j = 0, \quad 1 \le j \le m, \\ S_j + \sum\limits_{i=1}^{m} S_{j-i} c_i = 0, \quad j > m. \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим нули многочлена $f(z)$ через $z_1, \ldots, z_m$. Везде далее под S_j понимаются степенные суммы корней многочлена $f(z)$, которые определяются формулами (3). Используя определение результанта в виде формулы произведения, в [16] был получен следующий результат.

Теорема 1 ([16]). *Результант $R(f,g)$ системы многочленов вида* (2), *где $m = 3$, вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned} R(f,g) = {} & \sum_{k=0}^{n} b_k^3 (-a_0)^k + \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=s+1}^{n} (-a_0)^s \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} b_s b_t^2 (S_{t-s}^2 - S_{2t-2s}) + b_s^2 b_t S_{t-s} \right) + \\ & + \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=s+1}^{n} \sum_{p=t+1}^{n} b_s b_t b_p (-a_0)^s \times \\ & \times [S_{t-s} \cdot S_{p-s} - S_{t+p-2s}]. \end{aligned} \tag{4}$$

В работе [16] приводится также общий результат для произвольных степеней m и n многочленов из (2). Однако, следует отметить, что приведенная в этой работе формула для результанта двух многочленов [16, Теорема 3, формула 7] не является полностью конструктивной. Алгоритмизация данного результата является открытой задачей и, по всей видимости, может быть решена с помощью описания рекуррентного перехода по степени m многочлена f. Тем не менее, используя данный результат, как частный случай может быть получена формула для степени $m = 4$, которую мы приводим ниже.

Теорема 2. *Результант $R(f,g)$ системы многочленов вида* (2), *где $m = 4$, вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned} R(f,g) = {} & \sum_{k=0}^{n} b_k^4 a_0^k + \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=s+1}^{n} b_s^3 b_t a_0^s S_{t-s} + \\ & + \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=s+1}^{n} b_s b_t^3 a_0^s \frac{S_{t-s}^3 - 3S_{2t-2s} \cdot S_{t-s} + 2S_{3t-3s}}{4} + \end{aligned}$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s+1}^{n} b_s^2 b_t^2 a_0^s \frac{1}{2}(S_{t-s}^2 - S_{2t-2s}) +$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s+1}^{n}\sum_{p=t+1}^{n} b_s^2 b_t b_p a_0^s \left(S_{p-s}\cdot S_{t-s} - S_{p+t-2s}\right) +$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\pm\sum_{t=s+1}^{n}\sum_{p=t+1}^{n} b_s b_t^2 b_p a_0^s \frac{1}{2}(S_{t-s}^2\cdot S_{p-s} -$$

$$- S_{2t-2s}\cdot S_{p-s} - 2S_{t+p-2s}\cdot S_{t-s} + 2S_{2t+p-3s}) +$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s+1}^{n}\sum_{p=t+1}^{n} b_s b_t b_p^2 a_0^s \frac{1}{2}(S_{p-s}^2\cdot S_{t-s} -$$

$$- S_{2p-2s}\cdot S_{t-s} - 2S_{t+p-2s}\cdot S_{p-s} + 2S_{2p+t-3s}) +$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s+1}^{n}\sum_{p=t+1}^{n}\sum_{r=p+1}^{n} b_s b_t b_p b_r a_0^s \times$$

$$\times\left(S_{t-s}\cdot S_{p-s}\cdot S_{r-s} - S_{t+p-2s}\cdot S_{r-s} -\right.$$

$$\left.- S_{t+r-2s}\cdot S_{p-s} - S_{p+r-2s}\cdot S_{t-s} + 2S_{t+p+r-3s}\right). \qquad (5)$$

Осуществив в (4) (соответственно, в (5)) предельный переход по n, получаем утверждение о результанте относительно многочлена (или целой функции с конечным числом нулей) и целой функции.

Теорема 3. *Пусть $g(z)$ — целая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ вида*

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots,$$

а $f(z)$ — многочлен вида (2) *при $m = 3$* (*или*, *соответственно, при $m = 4$*). *Тогда результантом $R(f, g)$ является выражение* (4) (*соответственно*, *выражение* (5)), *в котором необходимо выполнить предельный переход по n*.

Замечание 1 ([16]). *Теорема 3 имеет смысл при условии, что ряды*, *получающиеся при предельном переходе по n в правых частях формул* (4) *и* (5), *абсолютно сходятся*.

4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм состоит из функции, реализующей вычисление степенных сумм с помощью классических формул Ньютона (3) и основной функции, вычисляющей результант системы (2) по формулам (4) и (5). Таким образом, для заданного многочлена $f(z)$ 3-й или 4-й степени и заданной целой функции $g(z)$, алгоритм вычисляет результант $f(z)$ и частичной суммы порядка n (разложения в ряд) функции $g(z)$ для произвольного n. Таким образом, условие остановки алгоритма при предельном переходе в формулах (4) и (5) определяется тем, что в вычислениях целая функция заменяется многочленом степени n, при этом степень n является произвольной и задается пользователем (см. пример 2).

5. ПРИМЕРЫ

Алгоритм был реализован в среде Maple 2016 64bit. Полный код программы доступен по адресу `https://github.com/aakytmanov/Resultant34n`. Вычисления производились на машине Intel Core i7-4790 (3.6 GHz) с 32 Gb RAM под управлением Windows 10 Pro x64 21H1. Время счета для приведенных примеров составило менее 0.2 секунды.

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений ($m = 4$, $n = 5$)

$$\begin{cases} f(z) = z^2(z-1)(z+1) = z^2(z^2-1) = z^4 - z^2, \\ g(z) = z^5 + 2. \end{cases}$$

Алгоритм 1: Алгоритм вычисления классических рекуррентных формул Ньютона

Function ***RecurrNewton***($\{c_1, \ldots, c_m\}$, k):
- **Input**: Список коэффициентов $c_1, \ldots, c_m$; натуральное число k.
- **Output**: Список $S_1, \ldots, S_k$ степенных сумм, вычисляющихся по формулам (3)
- **begin:**
  - $S_1 := -c_1$
  - **for** $j = 2 \ldots \min(m, k)$ **do**
    - $S_j := -\sum_{i=1}^{j-1} S_{j-i}c_i - jc_j$
  - **if** $k > m$ then
    - **for** $j = m + 1 \ldots k$ do
      - $S_j = -\sum_{i=1}^{m} S_{j-i}c_i$
  - **return** $\{S_1, \ldots, S_k\}$

В данном случае

$$a_0 = a_1 = a_3 = 0, \quad a_2 = -1,$$
$$b_0 = 2, \quad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad b_5 = 1.$$

Поскольку $a_0 = 0$, то в выражении (5) останутся лишь слагаемые, соответствующие $s = 0$. Также отметим, что поскольку только b_0 и b_5 отличны от нуля, то в соответствующих суммах останутся лишь слагаемые при $t = 5$. Таким образом, получим

$$\sum_{s=0}^{5} b_s^4 a_0^s = b_0^4 = 16,$$

$$\sum_{s=0}^{5}\sum_{t=s+1}^{5} b_s^3 b_t a_0^s S_{t-s} = \sum_{t=1}^{5} b_0^3 b_t S_t = b_0^3 b_5 S_5 = 8S_5,$$

$$\sum_{s=0}^{5}\sum_{t=s+1}^{5} b_s b_t^3 a_0^s \frac{1}{4}\times$$
$$\times (S_{t-s}^3 - 3S_{2t-2s}\cdot S_{t-s} + 2S_{3t-3s}) =$$
$$= \sum_{t=1}^{5} b_0 b_t^3 \frac{1}{4}(S_t^3 - 3S_{2t}\cdot S_t + 2S_{3t}) =$$
$$= \frac{1}{4} b_0 b_5^3 (S_5^3 - 3S_{10}\cdot S_5 + 2S_{15}) =$$
$$= \frac{1}{2}(S_5^3 - 3S_{10}\cdot S_5 + 2S_{15}),$$

$$\sum_{s=0}^{5}\sum_{t=s+1}^{5} b_s^2 b_t^2 a_0^s \frac{1}{2}(S_{t-s}^2 - S_{2t-2s}) =$$
$$= \sum_{t=1}^{5} \frac{1}{2} b_0^2 b_t^2 (S_t^2 - S_{2t}) = \frac{1}{2} b_0^2 b_5^2 (S_5^2 - S_{10}) =$$
$$= 2(S_5^2 - S_{10}).$$

Алгоритм 2: Алгоритм вычисления приближения к результанту многочлена 3-й степени и целой функции

Input: Список $\{a_0, a_1, a_2\}$ коэффициентов многочлена f; список $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ первых $n+1$ коэффициентов разложения целой функции g в ряд

Output: Приближение к результанту системы (2), вычисленное по формуле (4).

begin

$S :=$ **RecurrNewton**$(\{a_0, a_1, a_2\}, n)$

$R := \sum_{k=0}^{n} b_k^3 (-a_0)^k$

for $s = 0 \ldots n$ do

$$R := R + \sum_{t=s+1}^{n} (-a_0)^s \left(\frac{1}{2} b_s b_t^2 \times \right.$$
$$\left. \times (S^2[t-s] - S[2t-2s]) + b_s^2 b_t S[t-s]\right)$$

for $s = 0 \ldots n$ do

for $t = s+1 \ldots n$ do

$$R := R + \sum_{p=t+1}^{n} b_s b_t b_p (-a_0^s) \times$$
$$\times (S[t-s]\cdot S[p-s] - S[t+p-2s])$$

return R

Все остальные тройные и четверные суммы в выражении (5) обращаются в ноль из-за того, что предыдущие суммы отличны от нуля только в случае значения индексов $s = 0$, $t = 5$.

Итак,

$$R(f, g) = 16 + 8S_5 + \frac{1}{2}S_5^3 -$$
$$- \frac{3}{2}S_{10}\cdot S_5 + S_{15} + 2S_5^2 - 2S_{10}.$$

Найдем степенные суммы корней S_5, S_{10}, S_{15}, не используя значения самих корней. А именно, по рекуррентным формулам Ньютона вида (3), в которых нужно положить

$$m = 4, \quad c_1 = a_3 = 0, \quad c_2 = a_2 = -1,$$
$$c_3 = a_1 = 0, \quad c_4 = a_0 = 0.$$

Алгоритм 3: Алгоритм вычисления приближения к результанту многочлена 4-й степени и целой функции

Input: Список $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ коэффициентов многочлена f; список $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ первых $n+1$ коэффициентов разложения целой функции g в ряд

Output: Приближение к результанту системы (2), вычисленное по формуле (5).

begin

$S :=$ **RecurrNewton**$(\{a_0, a_1, a_2, a_3\}, n)$

$R := \sum_{k=0}^{n} b_k^4 a_0^k$

for $s = 0 \ldots n$ **do**

$$R := R + \sum_{t=s+1}^{n} \left(b_s^3 b_t a_0^s S[t-s] + \right.$$
$$+ \frac{b_s b_t^3 a_0^s}{4}\cdot (S^3[t-s] - 3S[2t-2s]\times$$
$$\left. \times S[t-s] + 2S[3t-3s]) + \frac{b_s^2 b_t^2 a_0^s}{2}(S^2[t-s] - S[2t-2s]) \right)$$

for $s = 0 \ldots n$ **do**

for $t = s+1 \ldots n$ **do**

$$R := R + \sum_{p=t+1}^{n} b_s b_t b_p a_0^s \,(b_s\,(S[p-s]\cdot S[t-s] -$$
$$- S[p+t-2s]) + \frac{b_t}{2}(S^2[t-s]\cdot S[p-s] -$$
$$- S[2t-2s]S[p-s] - 2S[t+p-2s]\cdot S[t-s] +$$
$$+ 2S[2t+p-3s]) + \frac{b_p}{2}(S^2[p-s]S[t-s] -$$
$$- S[2p-2s]\cdot S[t-s] -$$
$$- 2S[t+p-2s]\cdot S[p-s] + 2S[2p+t-3s]))$$

for $s = 0 \dots n$ **do**
  for $t = s+1 \dots n$ **do**
    for $p = t+1 \dots n$ **do**

$$R := R + \sum_{r=p+1}^{n} b_s b_t b_p b_r a_0^s (S[t-s] \cdot S[p-s] \cdot \cdot S[r-s] - S[t+p-2s] \times \times S[r-s] - S[t+r-2s] \cdot S[p-s] - - S[p+r-2s] \cdot S[t-s] + 2S[t+p+r-3s])$$

return R

Так, для нашего случая

$$S_5 = 0, \quad S_{10} = 2, \quad S_{15} = 0.$$

Таким образом, $R(f, g) = 12$.

Входными данными алгоритма в этом случае будут списки коэффициентов a_i и b_j:

```
> Res4d([0, 0, -1, 0], [2, 0, 0, 0, 0, 1]);
```

Пример 2. Данные методы приводят к вычислению сумм некоторых типов кратных числовых рядов, ранее отсутствовавших в известных справочниках. Эти результаты представляют самостоятельный интерес. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f(z) = z^3 - a^3, \\ g(z) = e^{bz} = 1 + bz + \dfrac{(bz)^2}{2!} + \dots + \dfrac{(bz)^n}{n!} + \dots. \end{cases}$$

Вычисляя результант $R(f, g)$, используя теорему 3 с одной стороны, и используя определение результанта в виде формулы для произведения с другой стороны, получим соотношение (см. 16])

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ab)^{3k}}{(k!)^3} + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a^{3s} \times \times \left(3 \frac{b^{3s+6j}}{s!(s+3j)!^2} a^{6j} + 3 \frac{b^{3s+3j}}{s!^2 (s+3j)!} a^{3j} \right) + + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{p=t+1}^{\infty} b_s b_t b_p a^{3s} \times \times [S_{t-s} \cdot S_{p-s} - S_{t+p-2s}] = 1.$$

Частичные суммы выражения в левой части могут быть получены с помощью предложенного алгоритма, например, используя входные данные

```
> simplify(Res3d([-a^3, 0, 0], [1, b,
b^2/2!, b^3/3!, b^4/4!, b^5/5!,
b^6/6!]));
```

получим приближение к результанту (для заданной системы функций) в виде

$$R(f, g) = 1 - \frac{a^9 b^9}{4320} + \frac{a^{12} b^{12}}{345600} + + \frac{a^{15} b^{15}}{10368000} + \frac{a^{18} b^{18}}{373248000}.$$

6. БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке следующих фондов: первый автор использовал финансовую поддержку РФФИ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки, грант 20-41-243002 (разработка алгоритма, тестирование); второй автор использовал поддержку гранта РНФ 18-71-10007 (программная реализация алгоритма); третий автор поддержан грантом РФФИ 19-31-60012 (постановка технического задания для разработки алгоритма, вычисление примеров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзенберг Л. А.* Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 3. С. 505–508.
2. *Bykov V.I., Kytmanov A.M., Lazman M.Z.* Elimination methods in polynomial computer algebra, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-Basel, 1998.
3. *Быков В.И., Цыбенова С.Б.* Нелинейные модели химической кинетики. М.: КРАСАНД, 2011.
4. *Kytmanov A.M., Naprienko Ya.M.* An approach to define the resultant of two entire functions // Journal Complex Variables and Elliptic Equations. 2017. V. 62. № 2. P. 269–286.
5. *Kytmanov A.M., Myshkina E.K.* On Some Approach for Finding the Resultant of Two Entire Functions // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2019. V. 12. № 4. P. 434–438.
6. *Kytmanov A.M., Myslivets S.G.* On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations // Siberian Math. J. 2007. V. 48. № 5. P. 863–870.
7. *Kuzovatov V.I., Kytmanov A.A.* On the Zeta-Function of Zeros of Some Class of Entire Functions // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2014. V. 7. № 4. P. 489–499.
8. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля, упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.
9. *Krein M.G., Naimark M.A.* The Method of Symmetric and Hermitian Forms in the Theory of the Separation of the Roots of Algebraic Equation // Linear and Multilinear Algebra. 1981. V. 10. № 4. P. 265–308.
10. *Gohberg I.C., Heinig G.* Resultant Matrix and its Generalization. I. Resultant Operator of Matrix Polynomial // Acta Sci. Math. 1975. V. 72. P. 41–61.

11. *Gohberg I.C., Heinig G.* Resultant Matrix and its Generalization. II. Continual Analog of Resultant Matrix // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1976. V. 28. P. 189–209.
12. *Gohberg I.C., Lerer L.E.* Resultant Operators of a Pair of Analytic Functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 72. № 1. P. 65–73.
13. *Gustafsson B., Tkachev V.G.* The Resultant on Compact Riemann Surfaces // Comm. Math. Physics. 2009. V. 10. P. 265–308.
14. *Morozov A.Yu., Shakirov Sh.R.* New and Old Results in Resultant Theory // Theor. Math. Phys. 2010. V. 163. № 2. P. 587–617.
15. *Kytmanov A.M., Khodos O.V.* An Approach to the Determination of the Resultant of Two Entire Functions // Russian Mathematics. 2018. V. 62. № 4. P. 42–51.
16. *Kytmanov A.M., Myshkina E.K.* On Finding the Resultant of Two Entire Functions // Probl. Anal. Issues Anal. 2020. V. 9. № 3. P. 119–130.