ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2022, № 2, с. 7–15

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 517.913+004.434

СИМВОЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ГОМОЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА И ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА К ЕЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

© 2022 г. А. Б. Батхин[a,b,*] (ORCID: 0000-0001-8871-4697)

[a] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., д. 4, Россия*

[b] *Московский физико-технический институт (государственный университет), 141701 Долгопрудный Московской области, Институтский переулок, д. 9, Россия*

**E-mail: batkhin@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.07.2021 г.
После доработки 16.08.2021 г.
Принята к публикации 18.08.2021 г.

Рассматривается процедура получения гомологических уравнений произвольного порядка, решения которых используются для итерационной процедуры инвариантной нормализации гамильтониана в окрестности положения равновесия. Обсуждаются особенности реализации алгоритма приведения к нормальной форме с помощью современных систем компьютерной алгебры. Процедура нормализации применяется к гамильтониану задачи Хилла, записанной в масштабированных регулярных переменных. Полученная нормальная форма задачи Хилла может быть использована для поиска множеств аналитичности нормализующего преобразования.

DOI: 10.31857/S0132347422020042

1. ВВЕДЕНИЕ

Нормальная форма (НФ) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), вычисленная вблизи инвариантного многообразия (стационарной точки, периодического решения или инвариантного тора), является достаточно мощным инструментом для исследования локальной динамики фазового потока в окрестности этой инвариантной структуры. Несмотря на то, что НФ является формальным объектом, его можно использовать для поиска первых интегралов системы, семейств периодических решений, для изучения интегрируемости, устойчивости и бифуркаций (подробнее см. [1, 2]). Особые свойства гамильтоновых систем требуют специфических алгоритмов для вычисления их НФ. Цель данной работы – дать процедуру построения так называемого гомологического уравнения любого порядка, которое используется в современных методах нормализации.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

• Полужирные символы типа $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ обозначают столбцы-векторы в n-мерных вещественных $\mathbb{R}^n$ или комплексных $\mathbb{C}^n$ пространствах.

• Полужирные символы типа $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ обозначают векторы в n-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$.

• $|\mathbf{p}| = \sum_{j=1}^n |p_j|$ обозначает норму вектора.

• Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$ обозначим через $\mathbf{x}^{\mathbf{p}} \equiv \prod_{j=1}^{n} x_j^{p_j}$ – мультииндекс и через $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ – скалярное произведение пары векторов.

• Пусть $\mathfrak{A}$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^{2n}$, тогда для пары функций $F, G \in \mathfrak{A}$ запись $\{F, G\} \equiv F * G$ обозначает скобку Пуассона:

$$\{F, G\} \stackrel{\text{def}}{=} \langle J \operatorname{grad} G, \operatorname{grad} F \rangle,$$

где J – симплектическая единица.

• Запись $F * G^n$, $n > 1$, означает кратную левоассоциативную скобку Пуассона: $F * G^n = F * G^{n-1} * G$.

2. ГАМИЛЬТОНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Мы рассматриваем аналитическую систему Гамильтона

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{2.1}$$

с n степенями свободы вблизи ее стационарной точки

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$$

Функция Гамильтона $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ разлагается в сходящийся степенной ряд

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum H_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}$$

с постоянными коэффициентами $H_{\mathbf{pq}}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geq 0$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geq 2$.

Канонические преобразования координат $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \tag{2.2}$$

сохраняют гамильтонов характер исходной системы (2.1).

Обозначим через $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$ фазовый вектор. Тогда линейная часть системы (2.1) записывается в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}, \quad B = \frac{1}{2} J \operatorname{Hess} H\big|_{\mathbf{z}=0}, \quad J = \begin{pmatrix} 0^n & E^n \\ -E^n & 0^n \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где J – симплектическая единичная матрица, а $\operatorname{Hess} H$ – гессиан (матрица частных производных второго порядка) H.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ – собственные значения матрицы B, они могут быть переупорядочены таким образом, что $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top$ – n-мерный вектор собственных чисел линейной системы (2.3).

Существует [3, §12, Теорема 12] каноническое формальное преобразование (2.2) в виде степенного ряда, которое приводит исходную систему (2.1) к ее *нормальной форме*

$$\dot{\mathbf{u}} = \partial h / \partial \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\partial h / \partial \mathbf{u},$$

задаваемой нормализованным гамильтонианом $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}},$$

который содержит только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}$ с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0.$$

Здесь $0 \leq \mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geq 2$ и $h_{\mathbf{pq}}$ – постоянные коэффициенты.

Если матрица B полупростая, т.е. геометрические и алгебраические кратности собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$ равны, то мы имеем так называемую нормальную форму Биркгофа [4] или Черри–Густавсона [5].

2.1. Методы построения канонических преобразований

Существует несколько методов построения нормализующих канонических преобразований. Укажем их в хронологическом порядке.

1. Метод порождающих функций Якоби [4, 5], известный как *метод Биркгоффа*.

2. Метод рядов Ли [6, 7], более известный своей реализацией как *метод Депри–Хори*.

3. Метод примитивных функций [8].

4. Метод параметрических порождающих функций Пуанкаре [9].

Ниже подробнее дадим описание разновидности метода Депри–Хори, названного методом *инвариантной нормализации* [10]. Хоть этот метод и не является универсальным в том смысле, что он применяется только в случае ненулевых простых (или полупростых) собственных чисел, но он довольно эффективен и его программная реализация существенно легче, чем в методе Депри–Хори и, тем более, чем в методе Биркгоффа.

Суть метода нормализации с помощью рядов Ли состоит в использовании вспомогательного гамильтониана $G(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, называемого *порождающим*. Этот гамильтониан определяет каноническую систему

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \tau} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} \tag{2.4}$$

с начальными условиями $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{y}$. Порождающая функция G представлена в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \varepsilon) = \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \cdots.$$

Пусть для $\tau = 1$ новые переменные $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ определяются как решение задачи Коши (2.4): $\mathbf{u} = \mathbf{X}(1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{Y}(1)$. Преобразование $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на фазовом потоке гамильтоновой системы (2.1) является унивалентным каноническим преобразованием.

Для малых значений ε старые переменные $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ могут быть записаны в виде рядов Ли от новых переменных $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{u} + \mathbf{u} * G + \frac{1}{2!} \mathbf{u} * G^2 + \cdots, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{v} + \mathbf{v} * G + \frac{1}{2!} \mathbf{v} * G^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Новый преобразованный гамильтониан h также связан со старым H следующим рядом Ли

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v}) = H(\mathbf{u},\mathbf{v}) + H * G + \frac{1}{2!}H * G^2 + \frac{1}{3!}H * G^3 + \cdots$$

Процедуру нелинейной нормализации вещественного гамильтониана H удобнее выполнять, когда он записан в комплексной форме. В [1, п. 1Г] были предложены такие комплексные координаты $\mathbf{z}$, что их комплексно-сопряженные значения $\overline{\mathbf{z}}$ не являются их канонически-сопряженными, но эти координаты позволяют записать универсально квадратичную НФ для любых наборов собственных значений 1. Переход к таким комплексным координатам задается унивалентным преобразованием.

Здесь мы будем использовать другой набор комплексных координат $\mathbf{z}$, комплексно сопряженные значения которых одновременно являются канонически сопряженными. Обычно это удобно, когда собственные значения λ_j являются либо чисто мнимыми, либо вещественными, что в дальнейшем предполагается. Для перехода к таким комплексным координатам построить унивалентное преобразование нельзя.

Существует формальное преобразование $\Phi : (\mathbf{x},\mathbf{y}) \to (\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}})$, которое преобразует исходный гамильтониан к виду

$$h(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}}) = \sum h_{\mathbf{pq}}\mathbf{z}^{\mathbf{p}}\overline{\mathbf{z}}^{\mathbf{q}}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ и $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geq 2$. Значение $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$ называется *порядком* соответствующего члена разложения.

Определение 1. Функция Гамильтона $h(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}})$ называется *комплексной нормальной формой* для полупростого случая, если

- его квадратичная часть h_0 имеет вид $h_2 = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_j \overline{z}_j$,
- разложение (2.5) содержит только члены

$$h_{\mathbf{pq}}\mathbf{z}^{\mathbf{p}}\overline{\mathbf{z}}^{\mathbf{q}}, \quad (2.6)$$

которые удовлетворяют резонансному условию

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$$

Слагаемые (2.6), у которых $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, называются *секулярными*, все остальные называются *строго резонансными*.

2.2. Свойства нормальной формы

Приведем здесь некоторые свойства гамильтоновой НФ, которые понадобятся в дальнейшем. Их доказательство см. в [2].

Свойство 1. Если НФ h записана в виде степенного ряда $h = h_2 + f$, где h_2 – квадратичная часть, то h_2 и f коммутативны, т.е. $h_2 * f = 0$.

Свойство 2. Если квадратичная часть h_2 гамильтониана $h = h_2 + f$ нормирована и ряд f, состоящий из мономов степени больше двух, коммутирует с ней $h_2 * f = 0$, то ряд f содержит только резонансные члены.

Поэтому условие $h_2 * f = 0$ является необходимым и достаточным условием для нормальной формы.

Далее мы рассмотрим важный с практической точки зрения случай, когда все собственные значения λ_j либо вещественные $\lambda_j = \gamma_j \in \mathbb{R}$, либо чисто мнимые $\lambda_j = \mathrm{i}\omega_j$, $\omega_j \in \mathbb{R}$.

3. НОРМАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОМ РЯДОВ ЛИ

3.1. Обзор процедуры нормализации

Опишем общую схему процедуры нормализации системы Гамильтона в окрестности ее стационарной точки, расположенной в начале координат.

1. Вначале, исходный вещественный гамильтониан $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ записывается в комплексной форме $H(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}})$ с помощью соответствующего канонического преобразования.

2. Затем к $H(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}})$ применяется один из методов нормализации и получаем НФ $h(\mathbf{Z},\overline{\mathbf{Z}})$ (до определенного порядка), которая содержит только резонансные члены.

3. Наконец, полученную комплексную НФ $h(\mathbf{Z},\overline{\mathbf{Z}})$ можно преобразовать в вещественную НФ $h(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

Итак, рассматривается гамильтонова система, положение равновесия (ПР) которой совпадает с началом координат. Применяя масштабирование фазовых переменных $\mathbf{x} \to \varepsilon\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \to \varepsilon\mathbf{y}$ и независимой переменной $t \to \varepsilon^2 t$, ее гамильтониан H вблизи ПР, можно записать в виде степенного ряда по ε

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = H_0 + F = H_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j H_j(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

где H_j – однородная форма порядка $j + 2$:

$$H_j = \sum_{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|=j+2} H_{\mathbf{pq}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}}.$$

Ищем НФ исходного гамильтониана H в виде степенного ряда

$$h(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}}) = h_0 + f = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j h_j(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}}),$$

где $h_0 = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_j \overline{z}_j$, а однородные формы $h_j, j > 0$, содержат только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}}\mathbf{z}^{\mathbf{p}}\overline{\mathbf{z}}^{\mathbf{q}}$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| = j + 2$, такие, что $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(p_j - q_j) = 0$.

Переход от исходного гамильтониана H к его НФ h осуществляется с помощью генератора Ли (порождающей функции) $G = \sum_{j=1} \varepsilon^j G_j$:

$$h = H + H * G + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} H * G^j.$$

Поскольку генератор Ли G производит близкое к идентичному преобразование, то получим, что $h_0 = H_0$, и тогда

$$\begin{gathered} f = h_0 * G + M, \\ M = F + F * G + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} H * G^j, \end{gathered} \tag{3.1}$$

Используя свойство 1 и собирая члены уравнения (3.1) с равными коэффициентами при соответствующих степенях ε^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, можно переписать его как рекуррентную систему *гомологических уравнений*

$$h_0 * f_j = 0, \quad f_j = h_0 * G_j + M_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

где член M_j зависит от величин H_k, F_k, G_k, $k < j$, полученных на предыдущих шагах процедуры нормализации.

Для малых значений j члены M_j имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} M_1 = F_1, \quad M_2 = F_2 + F_1 * G_1 + \frac{1}{2} H_0 * G_1^2, \\ M_3 = F_3 + F_1 * G_2 + F_2 * G_1 + \\ + \frac{1}{2} H_0 * (G_1 * G_2 + G_2 * G_1) + \\ + \frac{1}{2} F_1 * G_1^2 + \frac{1}{6} H_0 * G_1^3. \end{gathered} \tag{3.3}$$

При увеличении индекса j число N_M членов в слагаемом M_j растет экспоненциально: $N_M = 2^j - 1$.

3.2. Решение гомологических уравнений

Существует два метода решения гомологических уравнений (3.2)

1. *Алгебраический метод*, который был независимо разработан G. Hori [6] и A. Deprit [7] и усовершенствован в последующих работах [11–15]. Гомологические уравнения решаются как система линейных алгебраических уравнений коэффициентов однородных форм f_j и G_j. Этот метод не имеет ограничений на структуру квадратичной части h_0 и может быть применен также в случае кратных или нулевых собственных значений. Тем не менее, из-за большого числа мономов порядок соответствующих систем быстро растет.

2. *Метод инвариантной нормализации*, предложенный В.Ф. Журавлёвым [10], [2, Гл. 8]. Этот метод можно рассматривать как последовательное усреднение функций M_j на невозмущенных решениях $\mathbf{z}(t, \mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}})$. Он может быть применен для случая ненулевых собственных значений. В случае кратных собственных значений этот метод также работает, но требует другого масштабирования фазовых координат, что приводит к тому, что члены $H_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ уже не являются однородными формами.

Здесь мы приведем краткое описание метода инвариантной нормализации (подробнее см. [10] или [2, гл. 7]), а также опишем особенности ее программной реализации.

Вдоль решений $\mathbf{z}(t, \mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}})$, $\overline{\mathbf{z}}(t, \mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}})$ невозмущенной канонической системы

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial H_0}{\partial \overline{\mathbf{z}}}, \quad \dot{\overline{\mathbf{z}}} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{z}} \tag{3.4}$$

мы имеем следующие тождества:

- $h_0 * f_j = df_j/dt = 0$ согласно свойству 1;
- $h_0 * G_j = dG_j/dt$.

Таким образом, гомологические уравнения можно переписать в виде

$$\frac{df_j}{dt} = 0, \quad M_j = f_j - \frac{dG_j}{dt}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Подставим решения $\mathbf{z}(t, \mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}})$, $\overline{\mathbf{z}}(t, \mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}})$ невозмущенной системы (3.4) в функцию M_j:

$$m_j(t, \mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) = M_j(t, \mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}). \tag{3.6}$$

Согласно уравнениям (3.5) получаем следующую квадратуру

$$\int_0^t m_j(t, \mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) dt = t f_j(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) + G_j(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}}) + g(t). \tag{3.7}$$

Следовательно, на каждом шаге процедуры нормализации очередной член НФ f_j равен коэффициенту при t, а член генератора Ли G_j равен независящему от времени члену в квадратуре (3.7).

Когда все собственные значения λ простые и чисто мнимые или вещественные, нет необходимости интегрировать левую часть (3.7). Все функции M_j являются однородными полиномами в $\mathbf{z}$, $\overline{\mathbf{z}}$, поэтому после подстановки получаем $m_j = \sum_k C_k e^{\beta_k t} + C_0$, где β_k есть не равная нулю линейная комбинация собственных чисел λ_j, $j = 1, \ldots, n$, а C_0, C_k – некоторые многочлены от новых переменных $\mathbf{Z}$, $\overline{\mathbf{Z}}$. Из формы (3.7) следует, что

$$f_j = C_0, \quad G_j = \sum_k \frac{C_k}{\beta_k}. \tag{3.8}$$

3.3. Упрощение гомологических уравнений

Покажем, что можно примерно в 4 раза сократить число слагаемых в функциях M_j, $j = 2, 3, \ldots$. Из первого уравнения (3.1) для каждого $j = 2, 3, \ldots$ можно получить $h_0 * G_j = f_j - M_j$. Члены f_j и M_j вычислены на предыдущих шагах и могут быть использованы в последующих:

$$h_0 * G_1 = f_1 - F_1 \Rightarrow \frac{1}{2} H_0 * G_1^2 = \\ = \frac{1}{2}(f_1 - F_1) * G_1$$

Подставляя это в M_2 в формуле (3.3), получаем

$$M_2 = F_2 + \frac{1}{2}(F_1 + f_1) * G_1.$$

Таким образом, три вычисления скобок Пуассона сводятся к вычислению только одной скобки.

Введем следующие обозначения:

$$f_j^+ \overset{\text{def}}{=} F_j + f_j, \quad f_j^- = F_j - f_j,$$

$$H * G_{j_1 \cdots j_k}^k = H * G_{j_1 \cdots j_{k-1}}^{k-1} * G_{j_k}.$$

Здесь приведем упрощенные выражения функций M_j, $j = 3, 4, 5$. Все индексы k_1, k_2, k_3 – натуральные числа.

$$M_3 = F_3 + \frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=3} f_{k_1}^+ * G_{k_2} + \frac{1}{12} f_1^- * G_1^2,$$

$$M_4 = F_4 + \frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=4} f_{k_1}^+ * G_{k_2} + \\ + \frac{1}{12} \sum_{k_1+k_2+k_3=4} f_{k_1}^- * G_{k_2 k_3}^2,$$

$$M_5 = F_5 + \frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=5} f_{k_1}^+ * G_{k_2} + \\ + \frac{1}{12} \sum_{k_1+k_2+k_3=5} f_{k_1}^- * G_{k_2 k_3}^2 - \frac{1}{720} f_1^- * G_1^4.$$

Уже по приведенным выше формулам несложно восстановить общий вид упрощенной функции M_j для произвольных значений j. Здесь главная сложность состояла в нахождении коэффициентов при кратных скобках Пуассона. Автор предпринял несколько попыток их нахождения. Вначале, с помощью СКА `Maple` была запрограммирована процедура упрощения M_j и был найден их вид и соответствующие коэффициенты для $j < 14$. Для бóльших номеров созданный алгоритм в силу его экспоненциальной сложности был неприменим. Затем был реализован более эффективный комбинаторный алгоритм, позволивший продвинуться до значений $j \le 17$. Дальнейшее продвижение было уже затруднительно, поскольку времена счета для каждого значения j увеличивались с коэффициентом 4 и, например, для $j = 17$ составляли порядка 2.5×10^6 с на довольно производительном компьютере. Тем не менее, выполненные вычисления позволили высказать предположение об общей структуре упрощенного выражения функций M_j, а также подобрать производящую функцию для коэффициентов при кратных скобках Пуассона. Строгое доказательство этого факта будет дано автором в другой работе.

Каждый член последовательности $\{M_2, M_3, \ldots\}$, получается по следующей схеме:

1. используется член F_j из разложения функции H;

2. добавляется сумма $\frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=j} f_{k_1}^+ * G_{k_2}$;

3. добавляются ранее записанные суммы кратных скобок Пуассона, составленных из членов f_k^- и G_l, $k, l < j$, умноженные на соответствующий коэффициент α_k. Кратность скобок Пуассона всегда нечетна и не превышает j, а сумма индексов этих функций, участвующих в вычислении, равна j.

Более точное описание упрощенных гомологических уравнений может быть дано в терминах разбиений целых чисел.

Определение 2. *Разбиением* $\nu(n)$ натурального числа n называется любая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ такая, что $\sum_{j=1}^k \nu_j = n$. Каждое разбиение можно записать в виде $\nu = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \ldots]$, где n_j – число повторений слагаемого j в разбиении $\nu(n)$, т. е. $\sum j n_j = n$. Обозначим через $\nu^{(k)}(n)$ такое разбиение числа n, которое состоит ровно из k слагаемых.

Теперь сформулируем основной результат работы о структуре упрощенного гомологического уравнения.

Утверждение 1. *Для* $j > 2$ функция M_j строится таким образом:

1. Добавляется член F_j и сумма $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} f_k^+ * G_{j-k}$.

2. Для каждого k не больше $[j/2]$ вычисляем множество $\mu_{2k+1}(j)$ всех перестановок любого разбиения $\nu(2k+1)(j)$, т. е. множество $\mu_{2k+1}(j)$ содержит кортеж из $2k+1$ индексов, сумма которых равна j. Для каждого такого кортежа $\mathcal{J}[i_1, \ldots, i_{2k+1}]$

Таблица 1

k	3	5	7	9	11	13
α_k	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{720}$	$\frac{1}{30240}$	$-\frac{1}{1209600}$	$\frac{1}{47900160}$	$-\frac{691}{1307674368000}$

Для четных k все $\alpha_k \equiv 0$.

индексов необходимо вычислить все скобки Пуассона вида $f_{i_1}^- * G_{i_2 \cdots i_{2k+1}}^{2k}$.

3. Сумма всех вычисленных выше скобок Пуассона умножается на коэффициент α_{2k+1}. Эти коэффициенты можно получить с помощью производящей функции

$$\mathfrak{g}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{e^{\varepsilon} - 1} \right). \tag{3.9}$$

Первые 13 коэффициентов α_k даны в табл. 1.

4. Окончательная формула для M_j может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned} M_j = F_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} f_k^+ * G_{j-k} + \\ + \sum_{k=1}^{[j/2]} \alpha_{2k+1} \sum_{(i_1, \ldots, i_{2k+1}) \in \mu_{2k+1}^j} f_{i_1}^- * G_{i_2 \cdots i_{2k+1}}^{2k}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Заметим, что наличие производящей функции $\mathfrak{g}(\varepsilon)$ (3.9) позволяет находить коэффициенты α_k для произвольных значений k за доли секунды.

Основные вычислительные затраты при построении нормальной формы связаны с многократным вычислением скобок Пуассона от функций f_j^+, f_j^- и G_j. Для оптимизации вычислений при реализации метода были построены многоуровневые таблицы, которые последовательно заполнялись результатами вычисления вложенных скобок Пуассона от ранее определенных функций. Это позволило существенно сократить время вычисления генератора G_j из гомологического уравнения.

Замечание 1. Очевидно, что нормализация гамильтониана H до высокого порядка возможна только в системах компьютерной алгебры. Например, такое программное обеспечение [2, Гл. 7] было разработано в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica [16].

3.4. Программная реализация метода инвариантной нормализации

Алгоритм инвариантной нормализации может быть реализован с использованием технологии ленивых или отложенных вычислений, т.е. выполнение шагов алгоритма по вычислению необходимых для его работы данных происходит только в момент обращения к последним, но не выполняется заранее. Это позволяет в большинстве ситуаций сократить общее время вычислений.

Приведем ниже схематичное описание алгоритма вычисления НФ гамильтониана, представленного в виде ряда $H_0 + \sum_j F_j$, где $H_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \bar{z}_j$, а каждый член F_j есть форма от комплексных фазовых переменных z_j, $\bar{z}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Пусть выполнена нормализация до $(j-1)$-го порядка включительно, где $j \geq 1$. Тогда невозмущенное решение записано в виде

$$z_j = Z_j e^{\lambda_j t}, \quad \bar{z}_j = \bar{Z}_j e^{-\lambda_j t}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.11}$$

а также уже вычислены члены НФ f_k^+, f_k^-, члены генератора G_k, $k < j$, и вычислены кратные скобки Пуассона для соответствующих наборов индексов, полученных в п. 2 утверждения 1.

1. Составляем функцию M_j гомологического уравнение j-го порядка согласно п. 2. Для этого для каждого $k \leq [j/2]$ находим разбиение $\nu_{2k+1}(j)$, представленное в виде кортежа $\mathcal{J}[i_1, \ldots, i_{2k+1}]$ индексов. Находим множество $\mu_{2k+1}(j)$ всех перестановок этого кортежа индексов, и для каждого набора индексов из множества $\mu_{2k+1}(j)$ вычисляем $(2k+1)$-кратную скобку Пуассона вида $f_{i_1}^- * G_{i_2 \cdots i_{2k+1}}^{2k}$. Если ранее уже была вычислена $(2k-1)$-кратная скобка $f_{i_1}^- * G_{i_2 \cdots i_{2k-1}}^{2k}$, то результат ее вычисления хранится в соответствующей ячейке вспомогательной разреженной матрицы и используется для вычислений. Найденная таким образом $(2k+1)$-кратная скобка Пуассона также сохраняется для дальнейшего использования.

2. Когда все слагаемые формулы (3.10) найдены, выполняется подстановка в него невозмущенного решения (3.11), а затем происходит упрощение показателей каждого слагаемого из M_j. Группируя слагаемые с равными экспоненциальными множителями, получаем выражение (3.6), с помощью которого согласно формулам (3.8) находим и сохраняем для последующего использования j-е члены разложения НФ f_j и генератора G_j соответственно.

Вычисляются величины f_j^+ и f_j^- для получения правой части гомологического уравнения $(j+1)$-го порядка.

Замечание 2. Указанные выше шаги алгоритма нормализации могут быть легко запрограммированы с использованием различных систем компьютерной алгебры, в которых присутствуют эффективные комбинаторные процедуры. Здесь укажем лишь некоторые из таких реализаций.

• В СКА Wolfram Mathematica [2, 17]. Авторы отмечают, что данная программа справляется с ситуацией, когда собственные числа могут быть выражены в радикалах.

• В СКА Maplesoft Maple [18].

• Программный комплекс, реализованный с использованием языков программирования C++ и Python [19], библиотека [20], реализованная с использованием языков программирования C/C++.

Замечание 3. Отметим, что эффективность выполнения вычислений на шаге 2 алгоритма существенно зависит от того, в какой форме удается представить собственные числа $\boldsymbol{\lambda}$. В тех редких случаях, когда все λ_j рациональны, все вычисления могут быть выполнены точно. Если все или часть собственных чисел принадлежат алгебраическому расширению поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то вычисление коэффициентов НФ и генератора Ли можно проводить в этом расширении. Можно выполнять вычисление НФ по модулю идеала, который задает нули характеристического многочлена матрицы B формулы (2.3), так, как это, например, сделано в [21, п. 5.6, Способ 3]. Последний прием может быть использован, если квадратичная часть H_0 исходного гамильтониана H зависит от параметров.

4. ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ХИЛЛА

4.1. Гамильтониан задачи Хилла

Задача Хилла, уравнения которой описывают плоское движение спутника в окрестности меньшего из двух массивных тел [22], имеет следующий гамильтониан

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)+x_2y_1-x_1y_2-x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{r}, \quad (4.1)$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ — вектор координат, а $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$ — канонически сопряженный вектор импульса.

Каноническое преобразование, называемое регуляризацией Леви—Чивитты [23, Гл. 4],

$$\mathbf{x}=L(\mathbf{q})\mathbf{q}, \quad \mathbf{y}=\frac{2}{q_1^2+q_2^2}L(\mathbf{q})\mathbf{p}, \quad L(\mathbf{q})=\begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix},$$

которое вместе с заменой времени

$$d\tau=\frac{4dt}{q_1^2+q_2^2}$$

приводит функцию Гамильтона (4.1) с сингулярностью в начале координат к полиномиальному виду

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\mathbf{q},\mathbf{p},\tilde{h}) &= \frac{\tilde{h}}{4}(q_1^2+q_2^2)+\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\\ &+\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)(q_2p_1-q_1p_2)- \\ &-\frac{1}{4}(q_1^2+q_2^2)(q_1^4-4q_1^2q_2^2+q_2^4)-\frac{1}{4}\equiv 0.\end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь параметр $\tilde{h}$ выбирается так, чтобы $\tilde{h}+H(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$.

В [24] предложено преобразование (см., также [25])

$$\mathbf{q}=2^{3/4}\left|\tilde{h}\right|^{1/4}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{p}=2^{1/4}\left|\tilde{h}\right|^{3/4}\mathbf{P}, \quad s=\sqrt{2/\left|\tilde{h}\right|}\tau,$$

определенное для всех значений $\tilde{h}\neq 0$, что приводит регуляризованный гамильтониан (4.2) к виду

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P}) &= \frac{\delta}{2}(Q_1^2+Q_2^2)+\frac{1}{2}(P_1^2+P_2^2)+\\ &+2(Q_1^2+Q_2^2)(Q_2P_1-Q_1P_2)-\\ &-4(Q_1^2+Q_2^2)(Q_1^4-4Q_1^2Q_2^2+Q_2^4),\end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\delta=\pm1$, а s — новая независимая переменная. Здесь δ выбирается в зависимости от знака параметра $\tilde{h}$.

Структура функции (4.3) такова, что начало координат O соответствует точке равновесия системы канонических уравнений, определяемой гамильтонианом $\mathcal{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P})$. Квадратичная часть $\mathcal{H}_2$ уже приведена к вещественной нормальной форме.

Это позволяет без дополнительных преобразований применить алгоритм нормализации, описанный в разделе 3, предварительно записав функцию $\mathcal{H}$ в комплексной форме.

4.2. Нормальная форма задачи Хилла вблизи начала координат

Для записи функции Гамильтона $\mathcal{H}$ в комплексных переменных, введем обозначения:

$$\rho_i=z_i\bar{z}_i, \quad i=1,2,$$
$$h_2=\mathrm{i}(\rho_1+\rho_2), \quad g_2=z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1.$$

Тогда $\mathcal{H}(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})=\mathcal{H}_2+\mathcal{H}_4+\mathcal{H}_6$, где

$$\mathscr{H}_2 = h_2,$$
$$\mathscr{H}_4 = \mathrm{i}((z_1 - \overline{z}_1)^2 + (z_2 - \overline{z}_2)^2)g_2,$$
$$\mathscr{H}_6 = -\frac{\mathrm{i}}{2}((z_1 - \overline{z}_1)^2 + (z_2 - \overline{z}_2)^2)\times$$
$$\times((z_1 - \overline{z}_1)^4 - 4(z_1 - \overline{z}_1)^2(z_2 - \overline{z}_2)^2 + (z_2 - \overline{z}_2)^4).$$

Процедура инвариантной нормализации гамильтониана $\mathscr{H}$ была реализована автором в СКА Maple и выполнена до 22-го порядка включительно.

Первые шесть членов (включая h_2) нормальной формы h следующие:

$$h_4 = -2h_2g_2,$$
$$h_6 = -2h_2(5h_2^2 + 4g_2^2 + 30\rho_1\rho_2),$$
$$h_8 = -5h_2g_2(15h_2^2 + 11g_2^2 + 96\rho_1\rho_2),$$
$$h_{10} = -h_2(417h_2^4 + 678g_2^2h_2^2 + 445g_2^4 +$$
$$+ 4\rho_1\rho_2(3336h_2^2 + 4668g_2^2 + 7860\rho_1\rho_2)),$$
$$h_{12} = -\frac{1}{2}h_2g_2(15955h_2^4 + 13832g_2^2h_2^2 + 7841g_2^4 +$$
$$+ 4\rho_1\rho_2(31873h_2^2 + 24921g_2^2 + 76140\rho_1\rho_2)),$$

где в выражениях для ρ_1, ρ_2, h_2 и g_2 все исходные координаты z_j, $\overline{z}_j$ надо заменить на Z_j, $\overline{Z}_j$, $j = 1,2$. Другие вычисленные члены довольно громоздки и здесь не приводятся.

Найденные начальные члены разложения нормальной формы h позволяют сделать некоторые предположения о ее структуре.

1. Члены разложения с номерами $4k$, $k \geq 1$ состоят только из строго резонасных мономов, члены с номерами $4k - 2$ содержат как строго резонансные, так и секулярные мономы.

2. Все члены разложения, начиная с h_4, раскладываются на множители, один из которых всегда равен h_2.

3. Члены разложения с номерами $4k$, $k \geq 2$ раскладываются на три множителя, один из которых равен g_2, а другой h_2.

Вычисленная НФ задачи Хилла вблизи начала координат позволяет исследовать динамику исходной системы в этой области фазового пространства. В частности, с помощью НФ можно искать так называемые области аналитичности [1, Гл. I], на которых нормализующее преобразование сходится, и, следовательно, семействам периодических решений нормализованной системы Гамильтона будут соответствовать семейства периодических решений исходной системы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность профессору А.Д. Брюно за полезное обсуждение работы и ее поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел: плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. *Журавлёв В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
3. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199–239.
4. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999. 408 с.
5. *Gustavson F.G.* On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near all equilibrium point // Astronomical J. 1966. V. 71. № 8. P. 670–686.
6. *Hori G.* Theory of General Perturbation with Unspecified Canonical Variable // Publications of the Astronomical Society of Japan. 1966. V. 18. № 4. P. 287–296.
7. *Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter // Celestial Mechanics. 1969. V. 1. № 1. P. 12–30.
8. *Haro À.* An algorithm to generate canonical transformations: application to normal forms // Physica D. 2002. V. 167. P. 197–217.
9. *Петров А.Г.* Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем // ПММ. 2004. Т. 68. № 3. С. 402–413.
10. *Журавлёв В.Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // Прикл. матем. и мех. 2002. Т. 66. № 3. С. 356–365.
11. *Kamel A.A.* Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter // Celestial Mechanics. 1969. V. 1. № 2. P. 190–199.
12. *Mersman W.* A new algorithm for the Lie transformation // Celestial Mechanics. 1970. V. 3. № 1. P. 81–89.
13. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем: пер. с англ. / Под ред. Маркеева А.П. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 320 с.
14. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: “Мир”, 1976. 456 с.
15. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 352 с.
16. *Wolfram St.* The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.
17. *Прокопеня А.Н.* Нормализация гамильтониана в ограниченной задаче многих тел методами компьютерной алгебры // Программирование. 2012. Т. 38. № 3. С. 65–78.
18. *Шевченко И.И.* Исследование некоторых проблем устойчивости и хаотического поведения в небесной механике: дис. ... д-ра наук; ГАО РАН. С.-Петербург, 2000. 257 с.
19. Background and Documentation of Software for Computing Hamiltonian Normal Forms / Burbanks A.D.,

Wiggins S., Waalkens H., Schubert R. School of mathematics, University of Bristol, Bristol, University Walk, Bristol BS8 1TW. 2008.

20. *Jorba À.* A methodology for the numerical computation of normal forms, centre manifolds and first integrals of hamiltonian systems // Experimental Mathematics. 1999. V. 8. № 2. P. 155–195.
21. *Брюно А.Д., Батхин А.Б.* Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021. № 5. С. 22–43.
22. *Батхин А.Б., Батхина Н.В.* Задача Хилла. Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2009. 200 с. ISBN: 978-5-98461-574-7.
23. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 656 с.
24. *Simó C., Stuchi T.J.* Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // Physica D. 2000. V. 140. P. 1–32.
25. *Батхин А.Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. 2014. Т. 458. № 2. С. 131–137.