

УДК 004.421.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОСТОЯННОГО МОМЕНТА НА ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2023 г. С. А. Гутник^{a,b,*}, В. А. Сарычев^{c,**}^a МГИМО МИД России

119454, Москва, Проспект Вернадского, 76, Россия

^b Московский физико-технический институт, МФТИ (НИУ)
141701, Долгопрудный, Институтский переулок, 9, Россия^c Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
125047, Москва, Миусская пл., дом 4, Россия

*E-mail: s.gutnik@inno.mgimo.ru

**E-mail: vas31@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.07.2022 г.

После доработки 14.08.2022 г.

Принята к публикации 30.10.2022 г.

С использованием методов компьютерной алгебры проведено исследование положений равновесия спутника, движущегося по круговой орбите под действием гравитационного и постоянного моментов. Основное внимание уделено исследованию положений равновесия для случаев, когда вектор постоянного момента параллелен плоскостям, образуемым главными центральными осями инерции спутника. С использованием методов построения базисов Гребнера проведена редукция системы шести алгебраических уравнений, определяющих равновесные ориентации спутника, к одному алгебраическому уравнению шестого порядка от одной неизвестной. Проведена классификация областей с равным числом положений равновесия с применением алгебраических методов построения дискриминантных гиперповерхностей. Построены бифуркационные кривые в пространстве параметров задачи, которые задают границы областей с равным числом положений равновесия спутника. Выполнен сравнительный анализ влияния выбора порядка переменных при построении базисов Гребнера для решения рассматриваемой задачи. С использованием предложенного подхода показано, что спутник с неравными главными центральными моментами инерции при действии постоянного момента имеет на круговой орбите не более 24 положений равновесия.

DOI: 10.31857/S0132347423020103, EDN: MFVDTU

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе представлены результаты применения методов компьютерной алгебры для исследования положений равновесия спутника, на который кроме гравитационного момента действует постоянный в связанной со спутником системе координат момент (далее постоянный момент), обусловленный, например, истечением газа или рабочего тела из его корпуса. Влияние на спутник постоянного момента изменяет его ориентацию и может вывести систему из заданного положения равновесия.

Исследование движения спутника в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите под действием гравитационного и постоянного моментов представляет практический интерес для создания систем управления ориентацией искусственных спутников Земли. Важным свой-

ством гравитационных систем ориентации является возможность функционировать на орбите продолжительное время без расходования энергии и рабочего тела.

Задаче определения положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов посвящено много работ. В [1] была показана возможность существования положений равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов для некоторых частных случаев.

Общий случай задачи был впервые изучен в [2], где представлены результаты символьно-численного исследования положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и постоянного моментов. Показано, что равновесия спутника определяются действительными корнями алгебраического уравнения ше-

стой степени и возможно существование не более 24 положений равновесия в орбитальной системе координат. Алгебраическое уравнение, определяющее равновесия спутника, было получено с использованием понятия результата.

В [3] с использованием подхода работы [2] был проведен детальный анализ эволюции областей существования различного числа положений равновесия спутника в пространстве параметров задачи. В [4, 5] была показана возможность применения методов компьютерной алгебры для исследования свойств системы нелинейных алгебраических уравнений, определяющих положения равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и постоянного моментов. С использованием алгоритмов построения базисов Гребнера [6, 7] и понятия результата было получено более простое по сравнению с [2] алгебраическое уравнение, определяющее положения равновесия спутника.

В настоящей статье проводится подробное исследование положений равновесия спутника, когда вектор постоянного момента параллелен плоскостям, образуемым главными центральными осями инерции спутника с применением алгебраических методов, которые ранее успешно использовались для изучения положений равновесия спутника-гиростата в [8, 9], равновесий спутника при влиянии аэродинамического момента [10] и динамики движения связки двух тел [11, 12]. Рассмотрение более простых случаев по сравнению с общим случаем [2] позволяет получить более простые решения задачи, позволяющие качественно оценить действие постоянного момента на равновесные ориентации спутника и более наглядно продемонстрировать возможности применения методов компьютерной алгебры для решения задач механики космического полета.

Для исследования применялась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 12.1 [13, 14]. Системы компьютерной алгебры широко используются при решении задач небесной механики, в частности, при исследовании задачи динамики многих тел. Так, с применением символьных вычислений были получены новые результаты при рассмотрении классической задачи трех тел с переменными массами в общем случае и поиске положений равновесия в ограниченной задаче четырех тел в работах [15–18].

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение спутника – твердого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного момента. Пусть на спутник, кроме гравитационного момента, действует постоянный момент, обусловленный, например, истечением газа из корпуса спутника.

Для записи уравнений движения введем две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс O спутника. Орбитальную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вдоль радиуса–вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника, ось OX направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O спутника. Тогда ось OY будет направлена вдоль нормали к плоскости орбиты. Связанную со спутником систему координат $Oxyz$; здесь Ox , Oy , Oz – главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием самолетных углов тангажа α , рыскания β и крена γ . Направляющие косинусы осей Ox , Oy , Oz в орбитальной системе координат выражаются через самолетные углы с помощью соотношений [19]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(x, X) = \cos \alpha \cos \beta, \\ a_{12} &= \cos(y, X) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \cos(z, X) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ a_{21} &= \cos(x, Y) = \sin \beta, \\ a_{22} &= \cos(y, Y) = \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{23} &= \cos(z, Y) = -\cos \beta \sin \gamma, \\ a_{31} &= \cos(x, Z) = -\sin \alpha \cos \beta, \\ a_{32} &= \cos(y, Z) = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{33} &= \cos(z, Z) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

При малых колебаниях спутника углу тангажа соответствует поворот вокруг оси OY , углу рыскания – поворот вокруг оси OZ , углу крена – поворот вокруг оси OX .

Тогда уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде [19]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \bar{a} &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \bar{b} &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \bar{c} &= 0, \\ p &= \bar{p} + \omega_0 a_{21}, \quad \bar{p} = \dot{\alpha} a_{21} + \dot{\gamma}, \\ q &= \bar{q} + \omega_0 a_{22}, \quad \bar{q} = \dot{\alpha} a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma, \\ r &= \bar{r} + \omega_0 a_{23}, \quad \bar{r} = \dot{\alpha} a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (2), (3) A , B , C – главные центральные моменты инерции спутника; p , q , r и \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} – проекции абсолютной угловой скорости и проекции вектора постоянного момента спутника на оси Ox , Oy , Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

3. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА

Введем обозначения $a = \bar{a}/\omega_0^2(C - B)$, $b = \bar{b}/\omega_0^2(A - C)$, $c = \bar{c}/\omega_0^2(B - A)$ и положим в уравнениях (2) и (3) $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, тогда получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} - a &= 0, \\ a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31} - b &= 0, \\ a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32} - c &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. С учетом (1) систему (4) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными α_0 , β_0 и γ_0 . Исследовать решения такой тригонометрической системы не представляется возможным.

Другой более удобный для исследования способ замыкания уравнений (4) заключается в добавлении условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned} a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 - 1 &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 - 1 &= 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно шести направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника. Для этой системы уравнений ставится следующая задача: при заданных a , b , c определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. После нахождения шести направляющих косинусов a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{31} , a_{32} , a_{33} оставшиеся направляющие косинусы a_{11} , a_{12} , a_{13} , с учетом того, что каждый элемент направляющих косинусов равен своему алгебраическому дополнению, можно определить из условий ортогональности.

Решения системы уравнений (4), (5) исследовались в научной литературе. Так в работах [2, 3], было показано, что равновесия спутника определяются действительными корнями алгебраического уравнения шестой степени. Алгебраическое уравнение, определяющее равновесия спутника было получено с использованием понятия результата. В явном и довольно сложном виде эти уравнения, определяющие положения равновесия, были получены в работах [4, 5].

Основное внимание в данной работе уделено символьным методам исследования положений равновесия в случаях, когда вектор постоянного момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции

спутника: 1) $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, 2) $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, 3) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСОВ ГРЕБНЕРА

4.1. Положения равновесия для случая $a = 0$

Начнем с рассмотрения первого случая $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, когда вектор постоянного момента находится в плоскости Oyz . Для нахождения решения алгебраической системы (4), (5) применялись алгоритмы построения базисов Гребнера [6, 7]. Метод построения базиса Гребнера представляет собой алгоритмическую процедуру для полного приведения задачи в случае системы полиномов от многих переменных к рассмотрению полинома от одной переменной. Алгоритмы построения базиса Гребнера реализованы в большинстве современных систем компьютерной алгебры. Исследование проводилось с использованием реализованного в системе компьютерной алгебры Mathematica 12.1 [13, 14] пакета построения базисов Гребнера GroebnerBasis[]. Построим базис Гребнера для 6 полиномов f_i , которые представляют собой левые части уравнений системы (4), (5) с 6 направляющими косинусами a_{ij} ($i = 2, 3, j = 1, 2, 3$), используя лексикографическое упорядочение по переменным направляющим косинусам:

GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4,f5,f6},{a21,a22,a23,a31,a32,a33}].

Следует отметить, что при изменении лексикографического порядка в списке переменных в базисе Гребнера полином от одной неизвестной по переменной a_{23} имеет более простой вид, чем по переменной a_{33} . Выпишем из построенного базиса Гребнера, состоящего из 36 полиномов, полином, который зависит только от одной переменной $x = a_{33}$

$$\begin{aligned} P(x) &= p_0x^6 + p_1x^5 + p_2x^4 + p_3x^3 + \\ &+ p_4x^2 + p_5x + p_6 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= 9^3 4096, \\ p_1 &= -9^3 8192 \\ p_2 &= 9^2 256(25b^2 + 144), \\ p_3 &= 3456b^2(b^2c^2 - 150), \\ p_4 &= 144b^4(25b^2 + 144), \\ p_5 &= -288b^6c^2, \end{aligned}$$

$$p_6 = b^8 c^4.$$

При построении базиса Гребнера, используя другой лексикографический порядок в списке переменных

GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4,f5,f6},{a31,a32,a33,a21,a22,a23}] получим базис, состоящий из 28 полиномов. Выпишем из построенного базиса Гребнера полином, который зависит только от одной переменной $y = a_{23}$

$$P_1(y) = p_0 y^6 + p_1 y^5 + p_2 y^4 + p_3 y^3 + p_4 y^2 + p_5 y + p_6 = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= 4096, \\ p_1 &= -8192 \\ p_2 &= 256(17b^2 + 16), \\ p_3 &= 128b^2(b^2 c^2 - 34), \\ p_4 &= 16b^4(17b^2 + 16), \\ p_5 &= -32b^6 c^2, \\ p_6 &= b^8 c^4. \end{aligned}$$

Полином (7) имеет более простой вид по сравнению с (6) и именно его будем использовать для исследования равновесных решений системы (4), (5). В работе [4] было показано, что каждому действительному корню уравнения (6) или (7) соответствуют четыре равновесных решения исходной системы (4), (5). Отсюда следует, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и постоянного момента в случае $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, может иметь не более 24 положений равновесия.

При исследовании положений равновесия спутника ставится задача определения на плоскости параметров b , c областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (7). Для выделения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней построим дискриминантную гиперповерхность полинома (7). Эта гиперповерхность содержит компоненту коразмерности 1, которая является границей областей с одинаковым числом вещественных корней. Множество особых точек дискриминантной кривой на плоскости параметров b , c задается следующей системой алгебраических уравнений:

$$P_1(y) = 0, \quad P_1'(y) = 0. \quad (8)$$

Символом “штрих” обозначено дифференцирование по переменной y . Исключим переменную y из системы уравнений (8) путем вычисления определителя матрицы результата этих уравнений с помощью символьных матричных функций

системы Wolfram Mathematica и получим в результате алгебраическое уравнение дискриминантной гиперповерхности в виде

$$P_2(b, c) = p_{00} b^{10} + p_{01} b^8 + p_{02} b^6 + p_{03} b^4 + p_{04} b^2 + p_{05} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} p_{00} &= 729c^8, \\ p_{01} &= c^4(27376 - 18252c^2 - 3159c^4 + 729c^6) \\ p_{02} &= 20736 - 97344c^2 - 118976c^4 + 132619c^6 - 18252c^8, \\ p_{03} &= -134784 + 648288c^2 - 170183c^4 - 118976c^6 + 27376c^8, \\ p_{04} &= -36(-6084 + 29029c^2 - 18008c^4 + 2704c^6), \\ p_{05} &= 1296(c^2 - 4)(4c^2 - 1)(4c^2 - 9). \end{aligned}$$

Теперь мы должны проверить как изменяется число равновесий при пересечении кривой (9). Это можно сделать численно, определив число действительных решений в одной точке из каждой области, ограниченной кривой (9) на плоскости (b, c) . Другим способом определить число действительных корней полинома можно путем вычисления i -х субдискриминантов, используя работы [20, 21].

Области в пространстве параметров, где существуют положения равновесия, как было показано в работе [2], ограничены следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\leq 5, \quad a^2 + b^2 \leq 4, \\ c^2 + b^2 &\leq 4, \quad a^2 + c^2 \leq 4. \end{aligned} \quad (10)$$

На рис. 1 показаны области с одинаковым числом действительных решений уравнения (7), равным 6, 4 и 2, где существуют 24, 16 и 8 равновесных ориентаций спутника соответственно. В работе [5] было показано, что каждому корню уравнения (7) соответствуют 4 равновесные ориентации. Границы этих областей задаются уравнением $P_2(b, c) = 0$. Области изменения параметров b , c ограничены в данном случае квадратом $2 \leq b \leq 2$; $2 \leq c \leq 2$. Кривые границ областей на рис. 1 построены с использованием функции *ContourPlot* в системе Wolfram Mathematica.

4.2. Положения равновесия для случая $b = 0$

Рассмотрим теперь следующий случай, когда вектор постоянного момента лежит в плоскости Oxz и $b = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$. Построим базис Гребнера для полиномов, представляющих собой левые

части системы (4), (5) для случая $b = 0$. Выполнение алгоритма с лексикографическим упорядочением по переменным позволяет получить в построенном базисе полином, который зависит только от одной переменной $y = a_{23}$

$$P_3(y) = p_0y^6 + p_1y^5 + p_2y^4 + p_3y^3 + p_4y^2 + p_5y + p_6 = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= 4096, \\ p_1 &= -8192 \\ p_2 &= 256(17a^2 + 16), \\ p_3 &= 128a^2(a^2c^2 - 34), \\ p_4 &= 16a^4(17c^2 + 16), \\ p_5 &= -32a^6c^2, \\ p_6 &= a^8c^4. \end{aligned}$$

Полином (11) с точностью до замены параметра a на b совпадает с (7). Поэтому и уравнение дискриминантной гиперповерхности для полинома (11) совпадает с точностью до обозначений с уравнением (9) и области с одинаковым числом действительных решений уравнения (11) имеют такой же вид как показано на рис. 1.

4.3. Положения равновесия для случая $c = 0$

В последнем случае, когда вектор постоянного момента лежит в плоскости Oxy и $c = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), построим базис Гребнера для полиномов, представляющих собой левые части системы (4), (5). Вычисляя базис Гребнера с опцией лексикографического упорядочения по переменным для системы полиномов, представляющих собой левые части уравнений (4), (5) для случая $c = 0$, получим в результате полином, зависящий только от одной переменной a_{23} , который имеет вид

$$P_4(y) = p_0y^6 + p_1y^5 + p_2y^4 + p_3y^3 + p_4y^2 + p_5y + p_6 = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= 4096, \\ p_1 &= -8192 \\ p_2 &= 256(17(a^2 + b^2) - 6a^2b^2 + 16), \\ p_3 &= -128(a^2b^2(a^2 + b^2) - 8a^2b^2 + 34(a^2 + b^2)), \\ p_4 &= 16(16(a^4 + b^4) + 9a^4b^4 - \\ &\quad - 43a^2b^2(a^2 + b^2) + 289a^2b^2), \end{aligned}$$

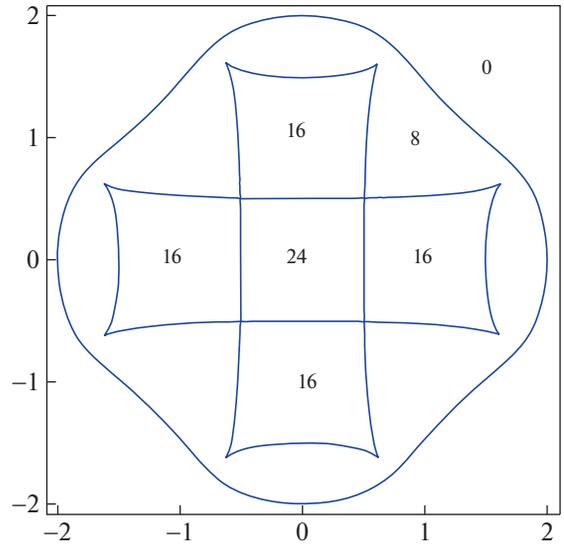


Рис. 1. Области с равным числом положений равновесия.

$$\begin{aligned} p_5 &= 8a^2b^2(4(a^4 + b^4) + 3a^2b^2(a^2 + b^2) - \\ &\quad - 30a^2b^2 - 34(a^2 + b^2)), \\ p_6 &= a^4b^4(a^2 + b^2 + 4)^2. \end{aligned}$$

Алгебраическое уравнение дискриминантной гиперповерхности уравнения (12) имеет вид

$$P_5(b, c) = p_{50}a^{10} + p_{51}a^8 + p_{52}b^6 + p_{53}b^4 + p_{54}b^2 + p_{55} = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} p_{50} &= 729b^8, \\ p_{51} &= b^4(729b^6 - 3159b^4 - 18252b^2 + 27376) \\ p_{52} &= 20736 - 97344b^2 - 118976b^4 + \\ &\quad + 132619b^6 - 18252b^8, \\ p_{53} &= 27376b^8 - 118976b^6 - 170183b^4 + \\ &\quad + 648288b^2 - 134784, \\ p_{54} &= -36(2704b^6 - 18008b^4 + 29029b^2 - 6084), \\ p_{55} &= 1296(b^2(13 - 4b^2)^2 - 36). \end{aligned}$$

График уравнения (13) на плоскости a, b , где указаны границы областей с одинаковым числом действительных решений, имеет такой же вид, как на рис. 1.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование положений равновесия спутника, движущегося по круговой

орбите при влиянии постоянного момента с применением методов построения базиса Гребнера. Метод построения базиса Гребнера является универсальным методом, применяемым для решения систем алгебраических уравнений. Существенным ограничением для применения данного метода является экспоненциальная сложность алгоритмов вычисления базиса Гребнера. В нашем случае время построения базиса Гребнера в системе Wolfram Mathematica 12.1 на персональном компьютере с 8 Гигабайт оперативной памяти и процессором Intel Core i7 2.8 ГГц составило всего около 0.1 сек. Анализ полиномов, входящих в базис Гребнера, позволяет провести детальное исследование влияния постоянного момента на положения равновесия спутника.

На основании полученных в данной работе с использованием методов компьютерной алгебры результатов можно сделать вывод, что число положений равновесия спутника в случаях, когда вектор постоянного момента параллелен плоскости, образуемой любыми двумя главными центральными осями инерции спутника, увеличиваются от нуля до 8, далее до 16 и далее до 24 с шагом 8 при последовательном уменьшении величины вектора постоянного момента. Применение методов компьютерной алгебры позволяет в достаточно простой форме получить решение задачи механики космического полета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garber T.B.* Influence of Constant Disturbing Torques on the Motion of Gravity Gradient Stabilized Satellites. *AIAA J.* 1963. V. 1. № 4. P. 968–969.
2. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* Равновесия спутника под действием гравитационного и постоянного моментов. *Космич. исслед.* 1994. Т. 32. № 4–5. С. 43–50.
3. *Sarychev V.A., Paglione P., Guerman A.* Influence of Constant Torque on Equilibria of a Satellite in a Circular Orbit. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2003. V. 87. P. 219–239.
4. *Герман А.Д., Гутник С.А., Сарычев В.А.* Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов и их устойчивость. *Изв. РАН. ТИСУ.* 2016. № 3. С. 142–155.
5. *Gutnik S.A., Guerman A., Sarychev V.A.* Application of Computer Algebra Methods to Investigation of Influence of Constant Torque on Stationary Motions of Satellite. In: *Gerdt V.P., Koepef W., Seiler W.M., Vorozhtsov, E.V.* (eds.) *CASC 2015. Lecture Notes in Computer Science (LNCS).* Springer Verlag. 2015. V. 9301. P. 198–209.
6. *Buchberger B.* Theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms, *SIGSAM Bull.* 1976. V. 10. № 3. P. 19–29.
7. *Бухбергер Б.* Базисы Грёбнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1986. С. 331–372.
8. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Символьно-численные методы исследования положений равновесия спутника-гиростата. *Программирование.* 2014. № 3. С. 49–58.
9. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Применение методов компьютерной алгебры для исследования стационарных движений спутника-гиростата. *Программирование.* 2017. № 2. С. 35–44.
10. *Gutnik S.A., Sarychev V.A.* Symbolic-numeric Simulation of Satellite Dynamics with Aerodynamic Attitude Control System. *Lect. Notes Comput. Sci., Springer, Cham.* 2018. V. 11077. P. 214–229.
11. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики системы двух связанных тел на круговой орбите. *Программирование.* 2019. № 2. С. 32–40.
12. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Символьные методы вычисления положений равновесия системы двух связанных тел на круговой орбите. *Программирование.* 2022. № 2. С. 16–22.
13. <http://www.wolfram.com/mathematica>
14. *Hastings C., Mischo K., Morrison M.* Hands-on Start to Wolfram Mathematica and Programming with the Wolfram Language. 3-d Edition, Wolfram Media, Ink. Champaign. 2020.
15. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М.* Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами. *Программирование.* 2014. № 2. С. 51–59.
16. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.* Исследование ограниченной задачи трех тел с переменными массами методами компьютерной алгебры. *Программирование.* 2017. № 5. С. 18–23.
17. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Шомшекова С.А.* Применение компьютерной алгебры в исследованиях двухпланетной задачи трех тел с переменными массами. *Программирование.* 2019. № 2. С. 58–65.
18. *Будько Д.А., Прокопеня А.Н.* Символьно-численные методы поиска положений равновесия в ограниченной задаче четырех тел. *Программирование.* 2013. № 2. С. 30–37.
19. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников. *Итоги науки и техники. Сер. “Исследование космического пространства”.* Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978.
20. *Батхин А.Б.* Параметризация дискриминантного множества многочлена. *Программирование.* 2016. № 2. С. 8–21.
21. *Батхин А.Б.* Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена. *Программирование.* 2018. № 2. С. 5–17.