

УДК 517.9+004.4

## РЕЗОНАНСЫ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИНЫ АТВУДА С ДВУМЯ КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ ГРУЗАМИ

© 2023 г. А. Н. Прокопеня<sup>а,\*</sup><sup>а</sup> *Варшавский университет естественных наук – SGGW  
02-776 Варшава, ул. Новоурсыновска, 159, Польша*<sup>\*</sup> *E-mail: alexander\_prokopenyu@sggw.edu.pl*

Поступила в редакцию 03.08.2022 г.

После доработки 16.10.2022 г.

Принята к публикации 30.10.2022 г.

Обсуждается проблема построения периодических решений уравнений движения машины Атвуда, в которой оба груза одинаковой массы могут колебаться в вертикальной плоскости. Получены дифференциальные уравнения движения системы и описан алгоритм вычисления их решений, определяющих периодические колебания грузов при условии резонанса частот вида  $n\omega_1 = m\omega_2$ , где  $n$  и  $m$  – натуральные числа, в виде степенных рядов по малому параметру. Сравнение полученных результатов с соответствующими численными решениями уравнений движения подтверждает их корректность. Все необходимые вычисления выполняются с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

DOI: 10.31857/S0132347423020140, EDN: MGUJCT

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Машина Атвуда [1], в которой один из грузов может колебаться в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, представляет собой консервативную механическую систему с двумя степенями свободы, которая была предметом исследования многих работ (см., напр., [2–8]). Следует отметить, что уравнения движения такой системы существенно нелинейны и их общее решение не может быть записано в символьной форме. Численное исследование уравнений движения показывает, что машина Атвуда с одним колеблющимся грузом может совершать различные виды движения, например, квазипериодическое и хаотическое движение (см. [3, 5, 7]). В частности, при небольшой разнице масс грузов система может находиться в состоянии динамического равновесия, когда колеблющийся груз меньшей массы уравновешивает груз большей массы. Естественно в таком случае более тяжелый груз также колеблется около некоторого равновесного положения, но его движение происходит только вдоль вертикальной оси. Соответствующее равновесное состояние системы описывается периодическим решением уравнений движения (см. [9]).

Поскольку колебания груза приводят к возрастанию средней силы натяжения нити (см. [8]), можно ожидать, что рассматриваемая система будет находиться в состоянии динамического равновесия и в том случае, когда оба груза имеют

одинаковую массу ( $m_1 = m_2$ ), но второй груз также совершает колебания. В работах [10, 11] показано, что такое состояние системы существует, если оба груза совершают синфазные колебания или колеблются в противофазе с одинаковыми амплитудами и частотами. В таком случае грузы можно рассматривать как два одинаковых маятника, длины которых не изменяются. Состояние динамического равновесия существует и в том случае, когда грузы совершают колебания с одинаковыми амплитудами и частотами со сдвигом по фазе  $\pm\pi/2$  (см. [11]). При этом длины маятников колеблются в противофазе около некоторого равновесного значения.

В данной работе обсуждается возможность существования периодических движений машины Атвуда с двумя колеблющимися грузами одинаковой массы в более общем случае, когда грузы колеблются с разными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , удовлетворяющими резонансным соотношениям вида  $n\omega_1 = m\omega_2$ , где  $n$  и  $m$  – натуральные числа. Основное внимание уделяется описанию алгоритма символьных вычислений, позволяющего найти приближенные решения уравнений движения в виде степенных рядов по малому параметру. Построение и исследование таких решений сводится к выполнению достаточно стандартных, но весьма громоздких символьных вычислений, которые удобно реализовать с помощью систем компьютерной алгебры (см., напр., [12–16]). Хотя

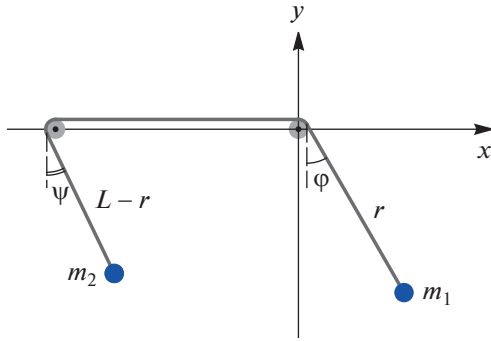


Рис. 1. Машина Атвуда с двумя колеблющимися грузами.

для таких расчетов может быть использована любая доступная система компьютерной алгебры, в данной работе все расчеты и визуализация полученных результатов выполняются с помощью системы *Wolfram Mathematica* [17].

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассматривается машина Атвуда, в которой два груза массами  $m_1$  и  $m_2$  подвешены на нити длиной  $(L + b)$ , перекинутой через два шкива пренебрежимо малого радиуса, находящихся на расстоянии  $b$  друг от друга (рис. 1). Использование двух шкивов не изменяет физической природы классической машины Атвуда (см. [1]) и позволяет избежать столкновений грузов при колебаниях. Геометрическая конфигурация системы определяется углами  $\phi$  и  $\psi$  отклонения грузов  $m_1$  и  $m_2$  от вертикали, а также расстоянием  $r$  между грузом  $m_1$  и шкивом. Так как нить предполагается нерастяжимой, расстояние между грузом  $m_2$  и шкивом равняется  $(L - r)$ .

Система имеет три степени свободы, а ее функция Лагранжа имеет вид (см. [11])

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{r}^2 + (L - r)^2\dot{\psi}^2) + m_1gr \cos \phi + m_2g(L - r) \cos \psi, \quad (2.1)$$

где точка над символом означает полную производную соответствующей функции по времени,  $g$  — ускорение свободного падения. Выражение (2.1) записано в предположении, что радиусы шкивов пренебрежимо малы и изменением длины нити  $r$  и  $(L - r)$  при колебаниях грузов за счет наматывания нити на шкив можно пренебречь.

Используя функцию Лагранжа (2.1), запишем уравнения движения в виде (см., напр., [18])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Выполняя в (2.2) дифференцирование с помощью встроенной функции *D* системы *Mathematica* (см. [17]), получаем

$$r\ddot{\phi} = -g \sin \phi - 2\dot{r}\dot{\phi}, \quad (2.3)$$

$$(L - r)\ddot{\psi} = -g \sin \psi + 2\dot{r}\dot{\psi}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{r} &= m_1g \cos \phi - m_2g \cos \psi + \\ &+ m_1r\dot{\phi}^2 - m_2(L - r)\dot{\psi}^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Далее будем предполагать, что массы грузов одинаковы  $m_1 = m_2$ , и для удобства вычислений введем безразмерные переменные

$$r^*(t^*) = r(t)/R_0, \quad t^* = t\sqrt{g/R_0}, \quad (2.6)$$

где  $R_0$  — длина нити  $r$  в положении равновесия  $\phi = 0$ ,  $\psi = 0$  в отсутствие колебаний. В дальнейших вычислениях безразмерные переменные  $r^*$ ,  $t^*$  будем обозначать обычным образом через  $r$ ,  $t$ . Тогда уравнения движения (2.3)–(2.5) принимают вид

$$r\ddot{\phi} = -\sin \phi - 2\dot{r}\dot{\phi}, \quad (2.7)$$

$$(k - r)\ddot{\psi} = -\sin \psi + 2\dot{r}\dot{\psi}, \quad (2.8)$$

$$2\ddot{r} = \cos \phi - \cos \psi + r\dot{\phi}^2 - (k - r)\dot{\psi}^2, \quad (2.9)$$

где введен безразмерный параметр  $k = L/R_0 > 1$ .

В работе [11] показано, что существуют периодические решения уравнений (2.7)–(2.9), которые описывают колебания грузов с одинаковыми частотами и амплитудами со сдвигом по фазе  $0$ ,  $\pm\pi/2$  или  $\pm\pi$ . Целью данной работы является рассмотрение более общего случая и построение решений системы (2.7)–(2.9), описывающих состояния динамического равновесия системы, когда оба груза совершают периодические колебания, а их частоты соизмеримы, т.е. удовлетворяют соотношению  $n\omega_1 = m\omega_2$ , где  $n$  и  $m$  — натуральные числа. Поскольку взаимодействие двух маятников неизбежно приводит к появлению колебаний с комбинационными частотами  $n\omega_1 \pm m\omega_2$  (см., напр., [18]), только в случае соизмеримых частот можно ожидать существования периодических движений системы.

## 3. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Отметим, что уравнения (2.7)–(2.9) являются существенно нелинейными, а период колебаний нелинейной системы обычно зависит от амплитуды (см., напр., [18, 19]). С другой стороны, сред-

нее значение силы натяжения нити при колебаниях маятника также зависит от амплитуды (см. [8]) и потому в условиях динамического равновесия системы естественно ожидать, что амплитуды колебаний обоих грузов должны быть одинаковы. Далее будем считать, что амплитуды колебаний грузов определяются параметром  $\varepsilon$ , который предполагается малым, но конечным. Поскольку при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , функции  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  должны сводиться к равновесному решению  $r = 1$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ , для удобства вычислений произведем замену переменных

$$\begin{aligned} r(t) &\rightarrow 1 + \varepsilon r(t), \\ \varphi(t) &\rightarrow \sqrt{\varepsilon} \varphi(t), \quad \psi(t) \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \psi(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

и будем предполагать, что  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  являются ограниченными осциллирующими функциями. Подставляя (3.1) в (2.7)–(2.9) и заменяя тригонометрические функции их разложениями в степенные ряды с точностью до седьмого порядка включительно, перепишем уравнения движения в виде, удобном для применения теории возмущений (см. [18, 20]):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \varphi &= -\varepsilon \left( r \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - \frac{1}{6} \varphi^3 \right) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{120} \varphi^5 + \frac{\varepsilon^3}{5040} \varphi^7, \\ (k-1)\ddot{\psi} + \psi &= \varepsilon \left( r \ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} + \frac{1}{6} \psi^3 \right) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{120} \psi^5 + \frac{\varepsilon^3}{5040} \psi^7, \\ \ddot{r} &= -\frac{1}{4}(\varphi^2 - \psi^2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(k-1)\dot{\psi}^2 + \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \left( r(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{24}(\varphi^4 - \psi^4) \right) - \frac{\varepsilon^2}{1440}(\varphi^6 - \psi^6). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поскольку предполагается, что частоты колебаний грузов соизмеримы и зависят от амплитуд колебаний, которые в условиях динамического равновесия являются одинаковыми и определяются параметром  $\varepsilon$ , частоты колебаний можно представить в виде

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{k-1}}, \quad (3.3)$$

где

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_{10} + \varepsilon^2 \omega_{20} + \dots \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) получаем частоты  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1/\sqrt{k-1}$  гармонических колебаний маятников, определяемых уравнениями (3.2) в случае  $\varepsilon = 0$ . При подстановке частот (3.3) в уравнение  $n\omega_1 = m\omega_2$ , где  $n$  и  $m$  – натуральные числа, находим выражение для начальной длины второго маятни-

ка  $k = 1 + m^2/n^2$ . Так как начальная длина первого маятника равна 1, выбор такой длины второго маятника обеспечивает выполнение условия соизмеримости частот  $n\omega_1 = m\omega_2$ . Отметим, что неизвестные коэффициенты  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$ , ... в разложении (3.4) далее определяются из условия существования периодических решений.

Для упрощения вычислений введем новую независимую переменную  $\tau = \omega t$  и заменим производные по времени в (3.2) согласно правилу

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \omega \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} \rightarrow \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}. \quad (3.5)$$

Решение системы (3.2) будем искать в виде степенных рядов по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \varphi_0(\tau) + \varepsilon \varphi_1(\tau) + \varepsilon^2 \varphi_2(\tau) + \dots, \\ \psi(\tau) &= \psi_0(\tau) + \varepsilon \psi_1(\tau) + \varepsilon^2 \psi_2(\tau) + \dots, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$r(\tau) = r_0(\tau) + \varepsilon r_1(\tau) + \varepsilon^2 r_2(\tau) + \dots$$

Подставляя (3.4)–(3.6) в (3.2), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + \varphi_0 + \varepsilon(\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1) + \varepsilon^2(\ddot{\varphi}_2 + \varphi_2) + \dots &= \\ -\varepsilon \left( r_0 \ddot{\varphi}_0 + 2\dot{r}_0 \dot{\varphi}_0 + 2\omega_{10} \dot{\varphi}_0 - \frac{1}{6} \varphi_0^3 \right) - \\ -\varepsilon^2 \left( \frac{1}{120} \varphi_0^5 + r_0 \dot{\varphi}_1 + 2\dot{r}_0 \dot{\varphi}_1 + (2\omega_{10} r_0 + r_1) \dot{\varphi}_0 + \right. \\ + 2\omega_{10} \dot{\varphi}_1 + (\omega_{10}^2 + 2\omega_{20}) \ddot{\varphi}_0 + 2(\omega_{10} \dot{r}_0 + \dot{r}_1) \dot{\varphi}_0 - \\ \left. - \frac{1}{2} \varphi_0^2 \varphi_1 \right) - \varepsilon^3 \left( -\frac{1}{5040} \varphi_0^7 + r_0 \dot{\varphi}_2 + 2\omega_{10} \dot{\varphi}_2 + \right. \\ + (\omega_{10}^2 + 2\omega_{20} + 2\omega_{10} r_0 + r_1) \dot{\varphi}_1 + 2\dot{r}_2 \dot{\varphi}_0 + \\ + 2(\omega_{10} \dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1) \dot{r}_1 + 2(\omega_{20} \dot{\varphi}_0 + \omega_{10} \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{r}_0 + \\ + (2(\omega_{10} \omega_{20} + \omega_{30}) + (\omega_{10}^2 + 2\omega_{20}) r_0 + 2\omega_{10} r_1 + \\ \left. + r_2) \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{24} \varphi_0^4 \varphi_1 - \frac{1}{2} \varphi_0 (\varphi_1^2 + \varphi_0 \varphi_2) \right) + \dots, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} (k-1)\ddot{\psi}_0 + \psi_0 + \varepsilon((k-1)\ddot{\psi}_1 + \psi_1) + \dots &= \\ = \varepsilon \left( r_0 \ddot{\psi}_0 + 2\dot{r}_0 \dot{\psi}_0 - 2(k-1)\omega_{10} \dot{\psi}_0 + \frac{1}{6} \psi_0^3 \right) - \\ -\varepsilon^2 \left( \frac{1}{120} \psi_0^5 + (2\omega_{10}(k-1) - r_0) \dot{\psi}_1 - (2\omega_{10} r_0 + \right. \\ + r_1 - (k-1)(\omega_{10}^2 + 2\omega_{20})) \dot{\psi}_0 - 2\dot{r}_0(\omega_{10} \dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_1) - \\ \left. - 2\dot{r}_1 \dot{\psi}_0 - \frac{1}{2} \psi_0^2 \psi_1 \right) - \varepsilon^3 \left( -\frac{1}{5040} \psi_0^7 + \right. \\ + (2\omega_{10}(k-1) - r_0) \dot{\psi}_2 + ((k-1)(\omega_{10}^2 + 2\omega_{20}) - \\ - 2\omega_{10} r_0 - r_1) \dot{\psi}_1 - 2\dot{r}_2 \dot{\psi}_0 - 2(\omega_{10} \dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_1) \dot{r}_1 - \\ \left. - 2(\omega_{20} \dot{\psi}_0 + \omega_{10} \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \dot{r}_0 + (2(k-1) \times \right. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
& \times (\omega_{10}\omega_{20} + \omega_{30}) - (\omega_{10}^2 + 2\omega_{20})r_0\ddot{\psi}_0 - (2\omega_{10}r_1 + \\
& + r_2)\ddot{\psi}_0 + \frac{1}{24}\psi_0^4\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_0(\psi_1^2 + \psi_0\psi_2) + \dots, \\
& \ddot{r}_0 + \varepsilon\ddot{r}_1 + \varepsilon^2\ddot{r}_2 + \dots = -\frac{1}{4}(\varphi_0^2 - \psi_0^2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 - \\
& - \frac{1}{2}(k-1)\psi_0^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{2}r_0 + \omega_{10}\right)\dot{\varphi}_0^2 + \\
& + \left(\frac{1}{2}r_0 - (k-1)\omega_{10}\right)\dot{\psi}_0^2 + \dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 - (k-1)\dot{\psi}_0\dot{\psi}_1 - \\
& - \frac{1}{2}(\varphi_0\varphi_1 - \psi_0\psi_1) + \frac{1}{48}(\varphi_0^4 - \psi_0^4) + \\
& + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}r_1(\dot{\varphi}_0^2 + \dot{\psi}_0^2) + r_0(\omega_{10}(\dot{\varphi}_0^2 + \dot{\psi}_0^2) + \dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 + \right. \\
& \left. + \dot{\psi}_0\dot{\psi}_1) + 2\omega_{10}\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1 - 2(k-1)\omega_{10}\dot{\psi}_0\dot{\psi}_1 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_2 - (k-1)\dot{\psi}_0\dot{\psi}_2 - \frac{1}{2}(k-1)\dot{\psi}_1^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{12}(\varphi_0^3\varphi_1 - \psi_0^3\psi_1) - \frac{1}{4}(\varphi_1^2 - \psi_1^2) - \frac{1}{2}(\varphi_0\varphi_2 - \right. \\
& \left. - \psi_0\psi_2) - \frac{1}{1440}(\varphi_0^6 - \psi_0^6) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(\omega_{10}^2 + 2\omega_{20})(\dot{\varphi}_0^2 - (k-1)\dot{\psi}_0^2)\right) + \dots
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Отметим, что уравнения (3.7)–(3.9) записаны в форме, удобной для вычисления неизвестных функций  $r_j(\tau)$ ,  $\varphi_j(\tau)$ ,  $\psi_j(\tau)$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) в разложениях (3.6). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$  в левой и правой части каждого уравнения (3.7)–(3.9), получим систему дифференциальных уравнений, которые можно решать последовательно, выбирая начальные условия таким образом, чтобы получаемые решения определяли периодические движения тел. Соответствующий алгоритм символьных вычислений и используемые функции системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* [17] подробно описаны в работе [11]. Поэтому в данной работе сосредоточимся только на основных особенностях вычислений в рассматриваемом случае различных частот колебаний грузов и обсудим получаемые результаты.

Будем считать, что в начальный момент времени обоим грузам, находящимся в положении равновесия  $\varphi(0) = 0$ ,  $\psi(0) = 0$ , сообщают некоторые начальные скорости в горизонтальном направлении. Поскольку амплитуды колебаний грузов определяются параметром  $\varepsilon$  и зависят от их начальных скоростей, без ограничения общности рассуждений будем считать, что начальная скорость первого груза равна  $\dot{\varphi}(0) = 1$ , а начальная скорость второго груза определяется в процессе вычислений из условия существования периодических движений системы. Начальная скорость в

радиальном направлении также предполагается равной нулю  $\dot{r}(0) = 0$ , а начальное значение длины  $r(0)$  определяется из условия, что частоты колебаний грузов при  $\varepsilon = 0$  равняются  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1/\sqrt{k-1} = n\omega_1/m$ .

В нулевом порядке по  $\varepsilon$  из уравнений (3.7)–(3.9) получаем

$$\ddot{\varphi}_0 + \varphi_0 = 0, \quad (3.10)$$

$$(k-1)\ddot{\psi}_0 + \psi_0 = 0, \quad (3.11)$$

$$\ddot{r}_0 = \frac{1}{4}(\psi_0^2 - \varphi_0^2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 - \frac{1}{2}(k-1)\dot{\psi}_0^2. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.10), (3.11) определяют гармонические колебания маятников и их решения, удовлетворяющие начальным условиям  $\varphi_0(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_0(0) = 1$ ,  $\psi_0(0) = 0$ , можно представить в виде

$$\varphi_0(\tau) = \sin(\tau), \quad \psi_0(\tau) = \sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{k-1}}\right). \quad (3.13)$$

Амплитуды колебаний в (3.13) одинаковы, что обеспечивает равенство нулю постоянной составляющей функции в правой части уравнения (3.12) и не приводит к появлению квадратичной зависимости от времени функции  $r_0(\tau)$ , которая является решением уравнения (3.9) при  $\varepsilon = 0$ . Напомним, что интересующее нас решение (3.6) описывает малые колебания длины  $r(\tau)$  около некоторого равновесного значения, а амплитуды колебаний переменных  $\varphi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$  определяются параметром  $\varepsilon$  (см. (3.1)). Поэтому далее предполагаем, что функции  $\varphi_j(\tau)$ ,  $\psi_j(\tau)$ ,  $r_j(\tau)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  удовлетворяют начальным условиям  $\varphi_j(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_j(0) = 0$ ,  $\psi_j(0) = 0$ ,  $\dot{\psi}_j(0) = 0$ , и будем искать такие решения уравнений (3.7)–(3.9), которые описывают малые колебания функций  $\varphi_j(\tau)$ ,  $\psi_j(\tau)$ ,  $r_j(\tau)$ .

Подставляя решения (3.13) в (3.12), получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{r}_0 = \frac{3}{8}\cos(2\tau) - \frac{3}{8}\cos\left(\frac{2\tau}{\sqrt{k-1}}\right). \quad (3.14)$$

Для получения общего решения уравнения (3.14) достаточно дважды проинтегрировать его правую часть с помощью встроенной функции *Integrate*[#,  $\tau$ ,  $\tau$ ]. В результате находим

$$r_0 = -\frac{3}{32}\cos(2\tau) + \frac{3(k-1)}{32}\cos\left(\frac{2\tau}{\sqrt{k-1}}\right) + r_{00}, \quad (3.15)$$

где  $r_{00}$  – произвольная постоянная. Отметим, что вторая постоянная, возникающая при интегрировании уравнения второго порядка (3.14), получается равной нулю, так как в противном случае искомое решение (3.15) будет содержать линейно растущую функцию времени и не будет периодическим.

Далее выполняем подобные вычисления в первом порядке по  $\varepsilon$ . Из уравнений (3.7)–(3.9) получаем

$$\ddot{\phi}_1 + \phi_1 = -r_0 \dot{\phi}_0 - 2\dot{r}_0 \phi_0 - 2\omega_{10} \dot{\phi}_0 + \frac{1}{6} \phi_0^3, \quad (3.16)$$

$$(k-1)\ddot{\psi}_1 + \psi_1 = r_0 \dot{\psi}_0 + 2\dot{r}_0 \psi_0 - 2(k-1)\omega_{10} \dot{\psi}_0 + \frac{1}{6} \psi_0^3, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 = & \left(\frac{1}{2}r_0 + \omega_{10}\right)\dot{\phi}_0^2 + \left(\frac{1}{2}r_0 - (k-1)\omega_{10}\right)\dot{\psi}_0^2 + \\ & + \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1 - (k-1)\dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 - \frac{1}{2}(\phi_0 \phi_1 - \psi_0 \psi_1) + \\ & + \frac{1}{48}(\phi_0^4 - \psi_0^4). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Подставляя решения (3.13), (3.15) в уравнение (3.16) и преобразуя его правую часть в линейную комбинацию тригонометрических функций с помощью функции *TrigReduce*, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + \phi_1 = & \left(2\omega_{10} + r_{00} - \frac{1}{64}\right)\sin(\tau) - \frac{53}{192}\sin(3\tau) + \\ & + \left(\frac{3(k-1)}{64} - \frac{3\sqrt{k-1}}{16}\right)\sin\left(\tau - \frac{2\tau}{\sqrt{k-1}}\right) + \\ & + \left(\frac{3(k-1)}{64} + \frac{3\sqrt{k-1}}{16}\right)\sin\left(\tau + \frac{2\tau}{\sqrt{k-1}}\right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Аналогичным образом приводим уравнение (3.17) к виду

$$\begin{aligned} (k-1)\ddot{\psi}_1 + \psi_1 = & \left(2\omega_{10} - \frac{r_{00}}{k-1} - \frac{1}{64}\right)\sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{k-1}}\right) - \\ & - \left(\frac{3}{64(k-1)} - \frac{3}{16\sqrt{k-1}}\right)\sin\left(2\tau - \frac{\tau}{\sqrt{k-1}}\right) + \\ & + \left(\frac{3}{64(k-1)} + \frac{3}{16\sqrt{k-1}}\right)\sin\left(2\tau + \frac{\tau}{\sqrt{k-1}}\right) - \\ & - \frac{53}{192}\sin\left(\frac{3\tau}{\sqrt{k-1}}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Дифференциальные уравнения (3.19), (3.20) описывают вынужденные колебания переменных  $\phi_1(\tau)$ ,  $\psi_1(\tau)$  и их решения будут ограниченными осциллирующими функциями только при условии, что правые части этих уравнений не содержат резонансных членов, пропорциональных  $\cos(\tau)$ ,  $\sin(\tau)$  и  $\cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{k-1}}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{k-1}}\right)$  соответственно, которые приводят к неограниченному возрастанию амплитуды колебаний (см. [18, 19]). Поскольку при произвольном значении параметра  $k$  вычисления довольно громоздки, далее в ка-

честве примера рассмотрим случай  $k = 5/4$  или  $2\omega_1 = \omega_2$ . Подставляя значение  $k = 5/4$  в уравнения (3.19), (3.20) и приравнивая к нулю коэффициенты при  $\sin(\tau)$  и  $\sin(2\tau)$ , получаем систему двух уравнений

$$2\omega_{10} + r_{00} + \frac{7}{128} = 0, \quad 2\omega_{10} - 4r_{00} - \frac{19}{64} = 0. \quad (3.21)$$

Решая систему (3.21), находим значения неизвестных параметров

$$r_{00} = -\frac{9}{128}, \quad \omega_{10} = \frac{1}{128}. \quad (3.22)$$

Подставляя параметры (3.22) и  $k = 5/4$  в уравнение (3.19), с помощью встроенной функции *DSolve* находим решение, удовлетворяющее начальным условиям  $\phi_1(0) = \dot{\phi}_1(0) = 0$

$$\begin{aligned} \phi_1(\tau) = & \frac{1}{6144}(-312\sin(\tau) + 149\sin(3\tau) - \\ & - 27\sin(5\tau)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Соответствующее решение уравнения (3.20), удовлетворяющее начальному условию  $\psi_1(0) = 0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1(\tau) = & C_1 \sin(2\tau) - \frac{3}{16}\sin(4\tau) + \\ & + \frac{53}{1536}\sin(6\tau), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная, которая далее будет найдена из условия периодичности движения системы.

Подставляя решения (3.13), (3.15), (3.23), (3.24) в уравнение (3.18) и преобразуя его правую часть в линейную комбинацию тригонометрических функций с учетом (3.22), получаем дифференциальное уравнение для определения функции  $r_1(\tau)$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 = & -\frac{13}{1024} - \frac{1}{4}C_1 - \frac{285}{8192}\cos(2\tau) + \\ & + \frac{33}{2048}\cos(4\tau) - \frac{3}{4}C_1\cos(4\tau) + \\ & + \frac{1461}{8192}\cos(6\tau) - \frac{105}{2048}\cos(8\tau). \end{aligned} \quad (3.25)$$

При условии  $C_1 = -13/256$  постоянная составляющая функции в правой части (3.25), которая привела бы к квадратичной зависимости функции  $r_1(\tau)$  от времени, обнуляется, что приводит к осциллирующему частному решению

$$\begin{aligned} r_1(t) = & r_{10} + \frac{285}{32768}\cos(2\tau) - \frac{111}{32768}\cos(4\tau) - \\ & - \frac{487}{98304}\cos(6\tau) + \frac{105}{131072}\cos(8\tau), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $r_{10}$  – произвольная постоянная, которая далее будет найдена из условия периодичности функций  $\varphi_2(\tau)$ ,  $\psi_2(\tau)$ .

Действительно, приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon^2$  в левой и правой части каждого уравнения (3.7), (3.8) и подставляя в них найденные решения (3.13), (3.15), (3.22), (3.23), (3.24), (3.26), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + \varphi_2 = & \left(2\omega_{20} + r_{10} - \frac{15}{131072}\right)\sin(\tau) + \\ & + \frac{1179}{32768}\sin(3\tau) - \frac{37931}{491520}\sin(5\tau) - \\ & - \frac{11003}{1572864}\sin(7\tau) + \frac{1815}{524288}\sin(9\tau), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\ddot{\psi}_2 + \psi_2 = & \left(2\omega_{20} - 4r_{10} + \frac{75}{32768}\right)\sin(2\tau) - \\ & - \frac{793}{12288}\sin(4\tau) - \frac{14841}{65536}\sin(6\tau) + \\ & + \frac{14515}{49152}\sin(8\tau) - \frac{17439}{327680}\sin(10\tau). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Условие отсутствия резонансных членов в правых частях уравнений (3.27), (3.28), пропорциональных  $\sin(\tau)$  и  $\sin(2\tau)$  соответственно, дает

$$r_{10} = \frac{63}{131072}, \quad \omega_{20} = -\frac{3}{16384}. \quad (3.29)$$

С учетом (3.29), решение уравнения (3.27), удовлетворяющее начальным условиям  $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ , получается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_2(\tau) = & -\frac{40459}{12582912}\sin(\tau) - \frac{1179}{262144}\sin(3\tau) + \\ & + \frac{37931}{11796480}\sin(5\tau) + \frac{11003}{75497472}\sin(7\tau) - \\ & + \frac{363}{8388608}\sin(9\tau). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Решение уравнения (3.28), удовлетворяющее начальному условию  $\psi_2(0) = 0$ , получаем в виде

$$\begin{aligned} \psi_2(\tau) = & C_2 \sin(2\tau) + \frac{793}{36864}\sin(4\tau) + \\ & + \frac{14841}{524288}\sin(6\tau) - \frac{2903}{147456}\sin(8\tau) + \\ & + \frac{5813}{2621440}\sin(10\tau), \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $C_2$  – постоянная, которую определим из условия существования периодического решения  $r_2(\tau)$ . Приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon^2$  в левой и правой части уравнения (3.9) и подставляя в них найденные решения (3.13), (3.15), (3.22)–(3.24),

(3.26), (3.29)–(3.31), получаем дифференциальное уравнение, определяющее  $r_2(\tau)$ , в виде

$$\begin{aligned} \ddot{r}_2 = & \frac{5581}{1572864} - \frac{1}{4}C_2 - \frac{165409}{25165824}\cos(2\tau) + \\ & + \left(\frac{161629}{6291456} - \frac{3}{4}C_2\right)\cos(4\tau) - \frac{386787}{16777216}\cos(6\tau) - \\ & - \frac{342979}{6291456}\cos(8\tau) + \frac{2325035}{50331648}\cos(10\tau) - \\ & - \frac{6795}{1048576}\cos(12\tau). \end{aligned} \quad (3.32)$$

При условии  $C_2 = 5581/393216$  постоянная составляющая функции в правой части (3.32) обнуляется, а его интегрирование приводит к осциллирующему частному решению

$$\begin{aligned} r_2(t) = & r_{20} + \\ & + \frac{165409}{100663296}\cos(2\tau) - \frac{94657}{100663296}\cos(4\tau) + \\ & + \frac{128929}{201326592}\cos(6\tau) + \frac{342979}{402653184}\cos(8\tau) - \\ & - \frac{465007}{1006632960}\cos(10\tau) + \frac{755}{16777216}\cos(12\tau), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где  $r_{20}$  – постоянная, которая далее будет найдена из условия периодичности функций  $\varphi_3(\tau)$ ,  $\psi_3(\tau)$ .

Описанный процесс последовательного решения дифференциальных уравнений, которые получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$  в левой и правой части каждого из уравнений (3.7)–(3.9), можно продолжить и вычислить решения (3.6) и частоты (3.3) с требуемой точностью, хотя в более высоких порядках такие вычисления становятся все более громоздкими. Например, с точностью до третьего порядка по  $\varepsilon$  находим

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & \sqrt{\varepsilon}\sin(\tau) + \\ & + \frac{\varepsilon^{3/2}}{6144}(-312\sin(\tau) + 149\sin(3\tau) - \\ & - 27\sin(5\tau)) + \varepsilon^{5/2}\left(-\frac{40459}{12582912}\sin(\tau) - \right. \\ & - \frac{1179}{262144}\sin(3\tau) + \frac{37931}{11796480}\sin(5\tau) + \\ & + \frac{11003}{75497472}\sin(7\tau) - \frac{363}{8388608}\sin(9\tau)\left.) + \right. \\ & + \varepsilon^{7/2}\left(\frac{6414499\sin(\tau)}{16106127360} + \frac{103864093\sin(3\tau)}{154618822656} - \right. \\ & - \frac{23354665}{51539607552}\sin(5\tau) - \frac{1310507}{90194313216}\sin(7\tau) - \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$-\frac{26414627}{966367641600}\sin(9\tau) + \frac{8712713}{429496729600}\sin(11\tau) - \frac{92069}{51539607552}\sin(13\tau),$$

$$\begin{aligned} \psi(\tau) = & \sqrt{\varepsilon}\sin(2\tau) + \\ & + \frac{\varepsilon^{3/2}}{1536}(-78\sin(2\tau) - 288\sin(4\tau) + \\ & + 53\sin(6\tau)) + \varepsilon^{5/2}\left(\frac{5581}{393216}\sin(2\tau) + \right. \\ & + \frac{793}{36864}\sin(4\tau) + \frac{14841}{524288}\sin(6\tau) - \\ & - \frac{2903}{147456}\sin(8\tau) + \frac{5813}{2621440}\sin(10\tau)\left. + \right) \quad (3.35) \\ & + \varepsilon^{7/2}\left(\frac{2351739\sin(2\tau)}{2684354560} - \frac{871399\sin(4\tau)}{100663296} - \right. \\ & - \frac{5770387}{1610612736}\sin(6\tau) - \frac{624487}{314572800}\sin(8\tau) + \\ & + \frac{10923889}{1610612736}\sin(10\tau) - \frac{15973393}{7549747200}\sin(12\tau) + \\ & \left. + \frac{961939}{5637144576}\sin(14\tau)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(\tau) = & 1 + \frac{\varepsilon}{128}(-9 + 24\sin^4\tau) + \varepsilon^2\left(\frac{63}{131072} + \right. \\ & + \frac{285}{32768}\cos(2\tau) - \frac{111}{32768}\cos(4\tau) - \\ & - \frac{487}{98304}\cos(6\tau) + \frac{105}{131072}\cos(8\tau)\left. + \right) \\ & + \varepsilon^3\left(\frac{4869}{16777216} + \frac{165409}{100663296}\cos(2\tau) - \right. \\ & - \frac{94657}{100663296}\cos(4\tau) + \\ & + \frac{128929}{201326592}\cos(6\tau) + \frac{342979}{402653184}\cos(8\tau) - \\ & - \frac{465007}{1006632960}\cos(10\tau) + \frac{755}{16777216}\cos(12\tau)\left. \right). \quad (3.36) \end{aligned}$$

При этом частоты колебаний грузов определяются выражениями (3.3), причем в случае  $k = 5/4$  имеем  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ , где

$$\omega = 1 + \frac{\varepsilon}{128} - \frac{3\varepsilon^2}{16384} - \frac{125219\varepsilon^3}{100663296}. \quad (3.37)$$

Описанные вычисления можно продолжить и получить функции (3.6) с необходимой точностью, хотя в высших порядках по  $\varepsilon$  вычисления становятся все более громоздкими и для их выпол-

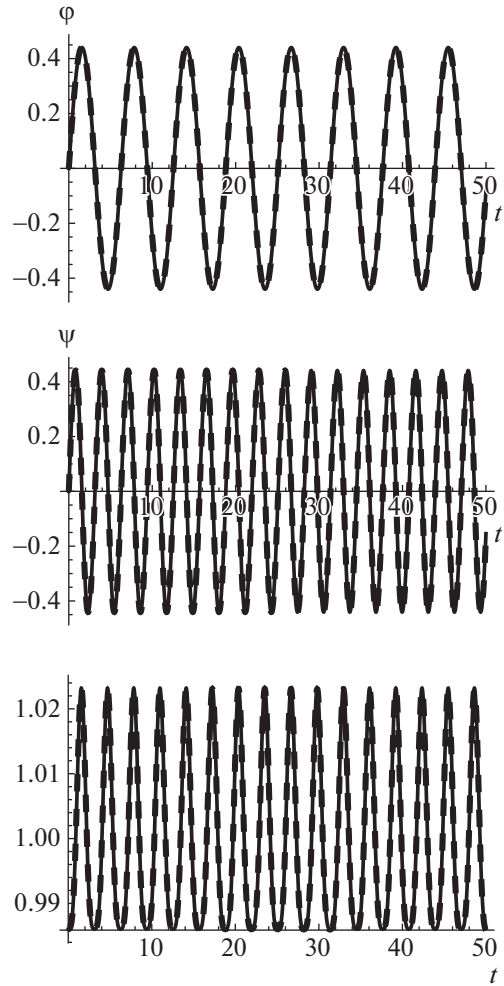


Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений системы (2.7)–(2.9) при  $\varepsilon = 0.2$ ,  $k = 5/4$ .

нения требуется применение систем компьютерной алгебры. При использовании системы *Wolfram Mathematica*, например, большинство операций можно реализовать, используя встроенные функции такие как *Expand*, *TrigExpand*, *Collect*, *Coefficient*, *D*, *Integrate*, *Series*, *Normal*, *DSolve*.

Используя найденные решения (3.33)–(3.35), можно вычислить начальные значения функций  $\varphi(0)$ ,  $\psi(0)$ ,  $r(0)$  и их производных  $\dot{\varphi}(0)$ ,  $\dot{\psi}(0)$ ,  $\dot{r}(0)$  при выбранно значении параметра  $\varepsilon$ , а затем найти соответствующие численные решения уравнений движения (2.7)–(2.9) с помощью встроенной функции *NDSolve*. Визуализация найденных аналитических решений при  $\varepsilon = 0.2$  (сплошные тонкие линии на рис. 2) демонстрирует хорошее совпадение с численными решениями (штриховые линии на рис. 2).

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе обсуждается проблема построения периодических решений уравнений движения машины Атвуда с двумя колеблющимися грузами одинаковой массы, которые описывают состояние динамического равновесия системы. Существование такого равновесного состояния не является очевидным и, как показывают вычисления, возможно только при таком выборе начальных условий, когда частоты колебаний грузов  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  являются соизмеримыми, т.е. удовлетворяют соотношению  $n\omega_1 = m\omega_2$ , где  $n$  и  $m$  – натуральные числа. Поскольку фактически рассматриваемая машина Атвуда представляет собой систему из двух маятников переменной длины, их взаимодействие неизбежно приводит к появлению колебаний с комбинационными частотами  $n\omega_1 \pm m\omega_2$ , а такое движение может быть периодическим только в случае соизмеримых частот. Соответствующие периодические решения уравнений движения найдены в виде степенных рядов по малому параметру  $\epsilon$ , который определяет амплитуды колебаний. Последовательно описаны символьные вычисления, необходимые для определения коэффициентов этих рядов, а сами функции найдены с точностью до третьего порядка по  $\epsilon$  включительно. Сравнение найденного аналитического решения с численным решением уравнений движения показало справедливость полученных теоретических результатов. Следует отметить, что реализовать описанные символьные вычисления удастся только выбирая конкретные натуральные числа  $n$  и  $m$  в выражении  $n\omega_1 = m\omega_2$ , поскольку в общем случае трудно выделить резонансные члены в уравнениях движения в каждом порядке по  $\epsilon$ .

Отметим также, что в данной работе все вычисления и визуализация результатов выполнены с использованием системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Atwood G.A* Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies. Cambridge University Press, 1784.
2. *Tufillaro N.B., Abbott T.A., Griffiths D.J.* Swinging Atwood's machine // *American Journal of Physics*. 1984. V. 52(3.1). P. 895–903.
3. *Tufillaro N.B.* Motions of a swinging Atwood's machine // *J. Physique*. 1985. V. 46. P. 1495–1500.
4. *Tufillaro N.B.* Integrable motion of a swinging Atwood's machine // *Amer. J. Phys.* 1986. V. 54. P. 142–143.
5. *Casasayas J., Nunes T.A., Tufillaro N.B.* Swinging Atwood's machine: integrability and dynamics // *J. Physique*. 1990. V. 51. P. 1693–1702.
6. *Yehia H.M.* On the integrability of the motion of a heavy particle on a tilted cone and the swinging Atwood's machine // *Mech. R. Comm.* 2006. V. 33(2.5). P. 711–716.
7. *Pujol O., Pérez J.P., Ramis J.P., Simo C., Simon S., Weil J.A.* Swinging Atwood machine: Experimental and numerical results, and a theoretical study // *Physica D*. 2010. V. 239(3.3). P. 1067–1081.
8. *Prokopenya A.N.* Motion of a swinging Atwood's machine: simulation and analysis with Mathematica // *Mathematics in Computer Science*. 2017. V. 11(3–4). P. 417–425.
9. *Прокопеня А.Н.* Построение периодического решения уравнений движения обобщенной машины Атвуда с применением компьютерной алгебры // *Программирование*. 2020. Т. 46(2.2). С. 53–59.
10. *Прокопеня А.Н.* Modelling Atwood's Machine with Three Degrees of Freedom // *Mathematics in Computer Science*. 2019. V. 13(1–2). P. 247–257.
11. *Прокопеня А.Н.* Поиск равновесных состояний машины Атвуда с двумя колеблющимися грузами с применением компьютерной алгебры // *Программирование*. 2021. Т. 47(2.1). С. 56–64.
12. *Абрамов С.А., Зима Е.Б., Ростовцев В.А.* Компьютерная алгебра // *Программирование*. 1992. № 5. С. 4–25.
13. *Васильев Н.Н., Еднерал В.Ф.* Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях // *Программирование*. 1994. № 1. С. 70–82.
14. *Прокопеня А.Н.* Некоторые алгоритмы символьных вычислений в исследованиях проблем космической динамики // *Программирование*. 2006. Т. 32(2.2). С. 16–22.
15. *Прокопеня А.Н.* Символьные вычисления в исследованиях устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // *Программирование*. 2007. Т. 33(2.2). С. 9–16.
16. *Прокопеня А.Н.* Нормализация гамильтониана в ограниченной задаче многих тел методами компьютерной алгебры // *Программирование*. 2012. Т. 38(2.3). С. 65–78.
17. *Wolfram S.* An elementary introduction to the Wolfram Language, 2nd ed. Champaign, IL, USA, Wolfram Media, 2017.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. 4-е изд. М.: Наука, 1988, 216 с.
19. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 592 с.
20. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley & Sons, 1981, 519 p.



## **Resonances and Periodic Motions of Atwood's Machine with Two Oscillating Weights**

© 2023 г. **A. N. Prokopenya**

*Warsaw University of Life Sciences, Warsaw, 02-776 Poland*

*e-mail: alexander\_prokopenya@sggw.edu.pl*

The problem of constructing periodic solutions to the equations of motion of Atwood's machine in which both weights have the same mass and can oscillate in the vertical plane is discussed. Differential equations governing the motion of this system are derived, and an algorithm for calculating their solutions that determine periodic oscillations of the weights under the condition that the oscillation frequencies are in resonance  $n\omega_1 = m\omega_2$ , where  $n$  and  $m$  are natural numbers, is proposed. These solutions are obtained in the form of series in a small parameter. The comparison of the results with numerical solutions of the equations of motion confirm the validity of the obtained solutions. All computations are performed using the computer algebra system Wolfram Mathematica.