

УДК 519.85

УСТОЙЧИВАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

© 2023 г. И. А. Курузов^{a,b,*} (ORCID: 0000-0002-2715-5489), А. В. Рогозин^{a,**} (ORCID: 0000-0003-3435-268), С. А. Чежегов^{a,***} (ORCID: 0009-0003-7378-3210), А. Б. Купавский^{a,****} (ORCID: 0000-0002-8313-9598)

^aМосковский физико-технический институт
141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия

^bИнститут проблем передачи информации РАН им. А.А. Харкевича
127051, г. Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1, Россия

*E-mail: kuruzov.ia@phystech.edu

**E-mail: aleksandr.rogozin@phystech.edu

***E-mail: chezhegov.sa@phystech.edu

****E-mail: kupavskii@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.06.2023 г.

После доработки 12.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Алгебраическая связность графа определяется как второе собственное число лапласиана. Данная величина является одной из численных характеристик, показывающих насколько граф связан. Однако данная метрика не учитывает возможных изменений для графа. При этом, стоит заметить, что удаление даже одной вершины или ребра может сделать граф несвязным. Данная работа посвящена разработке метрик на основе алгебраической связности, которые принимают во внимание возможность таких модификаций и дают представление об устойчивости сети. Кроме этого, мы приводим обобщения некоторых известных методов оптимизации для наших версий робастной алгебраической связности. Также данная работа содержит некоторые численные эксперименты, демонстрирующие эффективность предложенных подходов.

DOI: 10.31857/S0132347423060067, EDN: FWLNGZ

1. ВВЕДЕНИЕ

Для любого ненаправленного графа мы можем определить его матрицу Лапласа. Спектр такой матрицы характеризует некоторые свойства этого графа. В частности, второе наименьшее собственное число показывает насколько данный граф связан [1–3]. Данная величина известна, как алгебраическая связность. Заметим, что данная метрика обобщена на случай взвешенных графов с неотрицательными весами [4]. Эта метрика обладает следующими свойствами. Если и только если исходный граф не связан, то ее значение равно нулю [1]. Кроме этого, при добавлении ребра в граф или увеличении веса на любом из ребер данная метрика не убывает. Более того, если исходный граф был связан, то в таком случае она будет строго возрастать. Кроме этого, в работе [5] показано, что увеличение алгебраической связности тесно связано с повышением как вершинной связности, так и реберной.

Однако во многих приложениях сети могут меняться. Так, могут исчезать единичные ребра или вершины вместе со смежными ребрами. Вопросам измерения и повышения устойчивости сетей

посвящено множество работ. Кроме этого, есть ряд работ, показывающих, что некоторые классы сетей устойчивы к удалению ребер в том смысле, что они остаются связными. Так в работе [6] рассматриваются различные классы сетей, устойчивых к атакам на ребрах. Работа [7] посвящена изучению сетей Нэша и эффективных сетей.

Также стоит отметить, что некоторые работы рассматривают устойчивость с другой стороны. Так, в работе [8] авторы изучают вопрос устойчивости сети не к удалению ее элементов, а к перегрузке мощностей на ребрах при пропускании потоков.

Отдельным направлением является вопрос добавления ребер или увеличения весов на ребрах с целью повышения значения алгебраической связности. Заметим, что вопрос добавления ребер является комбинаторной проблемой, и не может быть решен перебором даже для небольших сетей на ста вершинах. Так в работе [3] предложен алгоритм добавления ребер через решение SDP-релаксации. Однако данный подход не применим для достаточно больших графов ввиду его высокой вычислительной сложности. Однако в этой

же работе была предложена жадная эвристика на основе суперградиента алгебраической связности и вектора Фидлера. Данная эвристика в дальнейшем была обобщена для взвешенных графов [10], и в недавней работе [11] на случай направленных графов. Кроме этого в работе [11] было предложено обобщение на случай добавления нескольких ребер на одной итерации.

Данная работа посвящена разработке численной метрики устойчивости графа к удалению ребер на основе алгебраической связности. Так, в разделе 2.1 будут рассмотрены случаи удаления одного или нескольких ребер как в худшем случае, так и в среднем. В разделе 2.2 будут предложены обобщения подходов оптимизации алгебраической связности из работы [3] для ее робастной версии. Наконец, в разделе 3 будут продемонстрированы результаты численных экспериментов на графах из коллекции `sndlib` [12].

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим ненаправленный взвешенный граф $G = (V, E)$ с неотрицательными весами на ребрах $W_{ij} \geq 0$. В рамках данной статьи мы считаем, что возможны следующие атаки на графы:

1. Удаление одного ребра.
2. Уменьшение веса на одном ребре.

Целью данной статьи является рассмотрение различных метрик, которые показывают, насколько данный граф устойчив к таким модификациям.

Кроме этого, мы рассматриваем сценарий, в котором необходимо повысить устойчивость графа, увеличивая веса на ребрах и/или добавляя новые ребра. Будем считать, что у нас есть следующие ограничения на модификации структуры при оптимизации:

1. Каждый вес на каждом ребре можно увеличить на любую положительную величину $\Delta w_{ij} \geq 0$.

2. Добавление нового ребра происходит с некоторым минимальным весом $w_{\min} \geq 0$.

3. Суммарные затраты на изменение структуры графа задаются следующей формулой:

$c_1 \sum_{i,j=1}^n \Delta w_{ij} + c_2 \sum_{i,j=1}^n \mathbb{1}(w_{ij} = 0, \Delta w_{ij} > 0)$, т.е. есть некоторая плата c_1 за увеличение веса и есть дополнительные затраты c_2 на добавление нового ребра.

Далее мы будем использовать определение алгебраической связности взвешенного графа G . Пусть матрица D есть диагональная матрица вида

$D_{ii} = \sum_{j=1}^n w_{ij}$. Тогда мы можем ввести лапласиан для матрицы весов $W : L = D - W$. Заметим, что матрица лапласиана является симметричной, неотрицательно определенной и $\lambda_1(L(W)) = 0$ [3]. Тогда мы можем ввести алгебраическую связность графа G , как второе минимальное собственное число лапласиана $\lambda_2(G) := \lambda_2(L(W))$.

Заметим, что функция $\lambda_2(L(W))$ является вогнутой функцией по W [9]. И задачу оптимизации алгебраической связности над некоторым множеством матриц $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{S}^n$ можно записать в форме полуопределенного программирования (SDP):

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in \mathbb{R}, W \in \mathcal{W}} \lambda \\ \text{s.t. } & \lambda \cdot \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right) \preceq L(W). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В случае, если множество \mathcal{W} является выпуклой, то данную задачу можно решить множеством стандартных пакетов.

2.2. Робастная алгебраическая связность

В случае удаления одного ребра из графа, естественной метрикой является рассмотрение наилучшего случая. Иными словами, для измерения устойчивости предлагается рассмотреть набор графов, получающихся при удалении одного ребра из исходного, и определить робастную алгебраическую связность, как минимальную алгебраическую связность среди этих графов.

Введем обозначение $G \setminus e$ ($e \in E$) для графа с вершинами V и ребрами $E \setminus \{e\}$. В таком случае, определим *робастную алгебраическую связность*, как $\lambda_{2,R}(G) = \min_{e \in E} \lambda_2(G \setminus e)$. Из свойств алгебраической связности, можно получить следующие свойства ее устойчивой версии:

1. $0 \leq \lambda_{2,R}(G) \leq \lambda_2(G)$.
2. $\lambda_{2,R}(G)$ равна нулю, если и только если, в исходном графе G существует мост, т.е. ребро, удаление которого приводит к увеличению связных компонент, или исходный граф был не связан.
3. $\lambda_{2,R}(G) = \lambda_2(G)$, если и только если, исходный граф был не связан. В таком случае, $\lambda_{2,R}(G) = \lambda_2(G) = 0$.

Таким образом, предложенная выше метрика показывает, насколько связным остается граф после выкидывания одного ребра в худшем случае. Заметим, что данная метрика равна нулю для всех графов с мостом. Таким образом, два связных графа с мостом относительно этой метрики одинаковые. Также, заметим, что если исходный граф имеет мосты и мы можем только увеличи-

вать веса на ребрах, то оптимизация робастной алгебраической связности ни к чему не приведет.

Далее мы определим другую модификацию, которая не обладает выше описанными недостатками. Пусть $G \setminus \alpha e$ ($e \in E$, $0 \leq \alpha \leq 1$) есть граф с такими же вершинами и ребрами, как в исходном графе, но вес на ребре e уменьшен с w_e до αw_e . Тогда определим α -робастную алгебраическую связность в виде: $\lambda_{2,\alpha R}(G) = \min_{e \in E} \lambda_2(G \setminus \alpha e)$. Далее мы можем выписать следующие свойства для данной метрики:

1. $0 \leq \lambda_{2,\alpha R}(G) \leq \lambda_2(G)$,
2. $\lambda_{2,\alpha R}(G) = 0$ для связных графов, тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и в исходном графе есть мост.

Первое утверждение следует из того, что суперградиент функции $\lambda_2(W)$ равен $v v^\top$, где v — есть собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2(W)$. Тогда $v_\alpha v_\alpha^\top$ будет являться суперградиентом функции $\lambda_{2,\alpha R}(G)$, где v_α вектор Филдера для матрицы весов графа $G \setminus e_\alpha$. Тогда по определению суперградиента мы имеем следующее неравенство:

$$\lambda_{2,\alpha R}(G) \leq \lambda_2(G \setminus \alpha e) \leq \lambda_2(G \setminus e) + \alpha w_e (v_{\alpha,i} - v_{\alpha,j})^2 = \lambda_{2,R}(G) + \alpha w_e (v_{\alpha,i} - v_{\alpha,j})^2$$

Также из 1 утверждения и свойств робастной алгебраической связности следует второе свойство α -робастной метрики.

Наконец, рассмотрим случай, когда случайно выбирается ребро с вероятностью $p_e > 0$ ($\sum_{e \in E} p_e = 1$) и удаляется. В таком случае, введем *среднюю алгебраическую связность*: $\lambda_{2,mean}(G) = \sum_{e \in E} p_e \lambda_2(G \setminus e)$. В случае равномерного распределения имеем следующее выражение: $\lambda_{2,mean}(G) = \frac{1}{|E|} \sum_{e \in E} \lambda_2(G \setminus e)$. Заметим, что данная метрика обнуляется только в том случае, если каждое ребро является мостом. Иными словами, средняя алгебраическая связность при равномерном распределении равна нулю только на дереве. Вместе с тем, для графа с большими связными компонентами и мостами между ними эта метрика близка к обычной алгебраической связности, что является ее недостатком.

2.3. Возможные обобщения

В данном разделе мы обсудим возможные обобщения ранее обозначенных метрик. В первую очередь, можно ввести k -робастную алгебраическую связность ($k = 1, |E|$), равную алгебраической связ-

ности при удалении k наихудших ребер. Данная метрика задает более высокие требования к устойчивости графа, однако ее сложность вычисления равна $\frac{|E|!}{k!(|E| - k)!}$ вычислений собственного числа матрицы.

Кроме этого, можно рассмотреть случай, в котором нам задан некоторый бюджет на ухудшения графа. В таком случае, можно ввести следующую метрику: $\lambda_{2,B,R}(G) = \min_{\|\hat{W} - W\| \leq B} \lambda_2(\hat{W})$.

Также отметим, что можно рассматривать устойчивость по отношению не к удалению единичных ребер, а к удалению вершин и инцидентных ей ребер. В таком случае, будет достаточно произвести $|V|$ вычислений собственного числа матрицы. Заметим, что здесь также возможно обобщение до частичного удаления ребер, инцидентных вершине. Обсуждаемые в следующем разделе методы оптимизации при небольших изменениях также применимы для метрик, устойчивых к удалению вершин.

2.4. Методы оптимизации робастной алгебраической связности

По аналогии с (2.1), мы можем выписать задачу оптимизации весов на ребрах для повышения $\lambda_{2,R}(G)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in \mathbb{R}, W \in \mathcal{W}} \lambda \\ \text{s.t. } & \lambda \cdot \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right) \preceq L(W \setminus e), \quad \forall e \in E \end{aligned} \quad (2.2)$$

Заметим, что в такой форме, в отличие от постановки (2.1), мы имеем $|E|$ матричных неравенств вместо 1, что существенно повышает сложность каждой итерации.

Аналогично, мы можем поставить задачу для оптимизации α -робастной алгебраической связности:

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in \mathbb{R}, W \in \mathcal{W}} \lambda \\ \text{s.t. } & \lambda \cdot \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right) \preceq L(W \setminus \alpha e), \quad \forall e \in E \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сложность задачи (2.3) совпадает со сложностью задачи (2.2). Если множество \mathcal{W} есть выпуклое множество, то данные задачи можно решать стандартными пакетами для SDP. В случае, если множество \mathcal{W} является дискретным, то можно построить выпуклую релаксацию (см. [3]).

Далее мы предложим обобщение жадного алгоритма из работ [3, 10] на случай оптимизации робастной связности.

Таблица 1. Параметры графов из библиотеки `sndlib`

Graph	V	E	max $W_{i,j}$	min $W_{i,j}$
Abilene	12	15	9920000	2480000
Ebone	23	38	500	31
Geant	23	37	1000000	1000000
germany50	50	88	40.0	40.0

В жадном алгоритме мы будем увеличивать вес на ребрах на некоторую фиксированную величину Δw_q . Пусть $\Omega_e(G)$ есть оценка на улучшение метрики при увеличении веса на ребре $e \in E$ на Δw_q или при добавлении ребра $e \notin E$ с весом $w_{\min} \geq 0$. Данную оценку для отдельных метрик мы введем ниже. Тогда рассмотрим следующую жадную эвристику:

1. Для робастной и α -робастной алгебраической связности $E_\lambda := \{e_\lambda\}$, где e_λ – одно из ребер, на котором достигается минимальное значение связности. Для средней алгебраической связности $E_\lambda = \emptyset$.

2. Если $w_{\min} \leq B$, то $e^* = \max_{e \in (V \times V) \setminus E_\lambda} \Omega_e(G)$. Если $w_{\min} > B$, то $e^* = \max_{e \in E \setminus E_\lambda} \Omega_e(G)$.

3. Если $e \in E$, то $w_e := w_e + \min(\Delta w_q, B)$; $B := B - c_1 \Delta w_q$.

4. Если $e \notin E$, то $E := E \cup \{e\}$; $w_e = w_{\min}$; $B := B - c_1 w_{\min} - c_2$.

Используя свойство суперградиента функции $\lambda_2(G)$, мы можем получить следующую оценку:

$$\lambda_2(G \cup \{(i, j)\}) \leq \lambda_2(G) + (v_i - v_j)^2$$

Таким образом, в работе [3] использовалась метрика $\Omega_{(i,j)}(G) = (v_i - v_j)^2$ для добавления ребра. Естественным образом, она была обобщена для взвешенных графов в работе [10].

Для робастной алгебраической связности мы можем получить оценку:

$$\lambda_{2,R}(G \cup \{(i, j)\}) \leq \lambda_2(G \setminus e_\lambda) + c(v_i - v_j)^2.$$

Здесь под обозначением $G \cup \{(i, j)\}$ подразумевается увеличение веса на ребре (i, j) ($c = \Delta w_q$) или добавление нового ребра с минимальным весом ($c = w_{\min}$). Таким образом, получаем, что $\Omega_{(i,j)}(G) = c(v_i - v_j)^2$ для робастной алгебраической связности.

Заметим, что для α -робастной алгебраической связности мы получим такую же верхнюю оценку

для всех ребер, кроме e_α . Однако на первом шаге нашей эвристики мы исключаем его из рассмотрения. Следовательно, метрика для α -робастной алгебраической связности имеет такой же вид.

Наконец, мы можем вывести метрику для средней алгебраической связности

$$\lambda_2(G \cup \{(i, j)\} \setminus e) \leq \lambda_2(G \setminus e) + c_{i,j}(v_i^e - v_j^e)^2, \quad \forall e \in E,$$

где v^e – вектор Филдера для графа без ребра e . Вес $c_{i,j}$ равен w_{\min} для ребра (i, j) из графа или Δw_q в противном случае. Тогда усреднив все неравенства по всем $e \in E$, мы получаем следующую оценку:

$$\lambda_{2,\text{mean}}(G \cup (i, j)) \leq \lambda_{2,\text{mean}}(G) + \frac{c_{i,j}}{|E|} \sum_{e \in E} (v_i^e - v_j^e)^2$$

Таким образом, получаем $\Omega_{(i,j)}(G) = \frac{c_{i,j}}{|E|} \sum_{e \in E} (v_i^e - v_j^e)^2$ для средней алгебраической связности при равномерном распределении.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В наших экспериментах мы будем рассматривать четыре графа из библиотеки `sndlib` [12]: Abilene, Ebone, Geant и germany50. В таблице 1 можно найти их следующие параметры: число вершин, число ребер, а также максимальное и минимальное значения весов на ребрах.

В первых экспериментах мы продемонстрируем результаты решения SDP задачи для различных метрик. В данной постановке мы не рассматриваем возможность добавления ребер. Для этих целей мы возьмем множество допустимых матриц в виде $\mathcal{W} = \{W : \|W - W_0\|_1 \leq B; W_{i,j} = 0, \forall (i, j) \notin E\}$, где $B \in \mathbb{R}_+$ есть бюджет для модификаций графа. Здесь $\|\cdot\|_1$ обозначает поэлементную

ℓ_1 -норму, т.е. $\|X\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |x_{ij}|$.

Во всех наших экспериментах для различных графов мы введем бюджет, как $B = \gamma \max_{i,j} W_{i,j}$, и параметр γ будет варьироваться.

На рис. 1 показана зависимость алгебраической связности и ее робастной связности для графа, полученного из графа Ebone при оптимизации робастной алгебраической связности, от различных параметров бюджета. Для удобства на этом графике и на всех последующих значения метрик были разделены на значение алгебраической связности исходного графа. Как мы можем видеть, для всех параметров бюджета робастная алгебраическая связность равна нулю. Это проис-

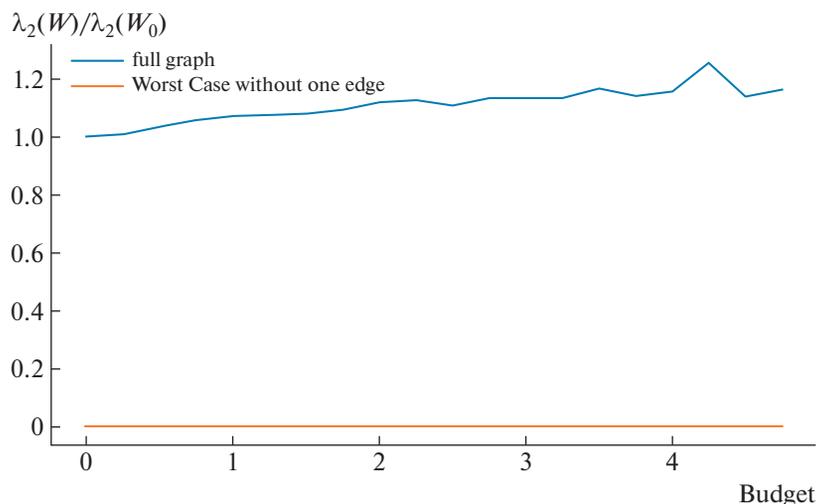


Рис. 1. Результаты оптимизации метрики $\lambda_{2,R}(G)$ для графа Ebone при различных значениях параметра γ .

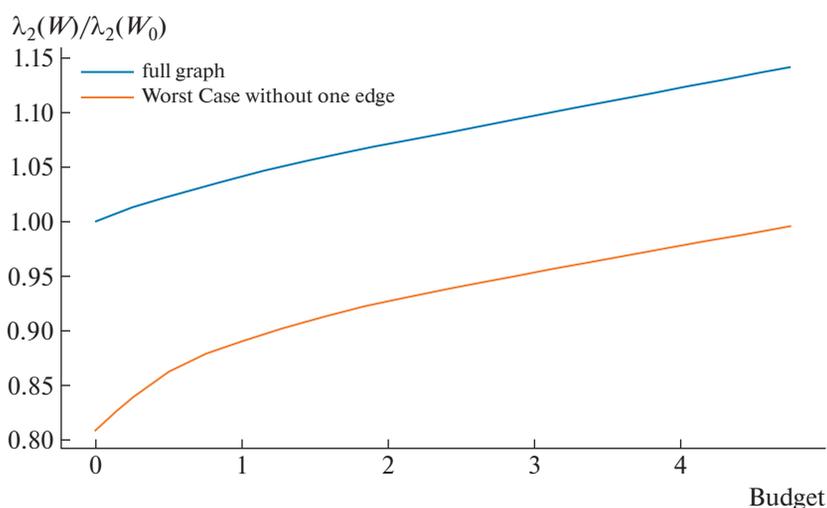


Рис. 2. Результаты оптимизации метрики $\lambda_{2,R}(G)$ для графа germany50 при различных значениях параметра γ .

ходит поскольку в графе есть мост. Здесь мы видим одну из основных проблем данной метрики для таких графов. Ее оптимизация не приводит к улучшению графа, если возможность добавлять ребра отсутствует.

В свою очередь мы можем увидеть другую ситуацию на рис. 2 для графа germany50. Данный граф не содержит моста и робастная алгебраическая связность отлична от нуля для всех значений бюджета. Во-первых, можно заметить, что оптимизация робастной алгебраической связности приводит к увеличению алгебраической связности. Во-вторых, обе метрики начиная с некоторого момента начинают увеличиваться почти линейно. Кроме этого, мы видим, что с какого-то

момента зазор между этими двумя метриками почти не меняется.

Результаты для графа Geant, показанные на рис. 3 похожи на результаты для germany50. Мы видим, что выше обозначенные наблюдения верны для графа Geant. Единственным отличием является то, что выход на режим линейного улучшения метрик происходит раньше. При этом заметим, что веса на всех ребрах как в графе Geant, так и в графе germany50 равны одному и тому же значению (см. таблицу 1). Естественным предположением в таком случае может быть, что веса на всех ребрах продолжают увеличиваться равномерно или почти равномерно, что и приводит к линейному увеличению. Поэтому далее мы срав-

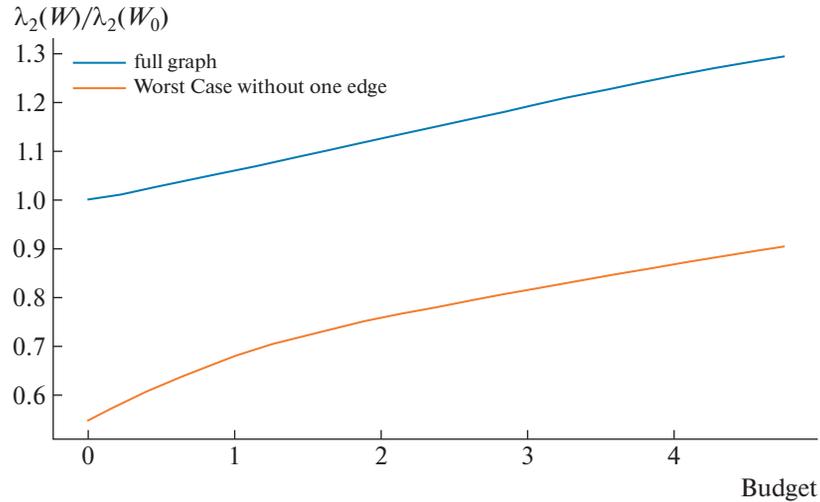


Рис. 3. Результаты оптимизации метрики $\lambda_{2,R}(G)$ для графа Geant при различных значениях параметра γ .

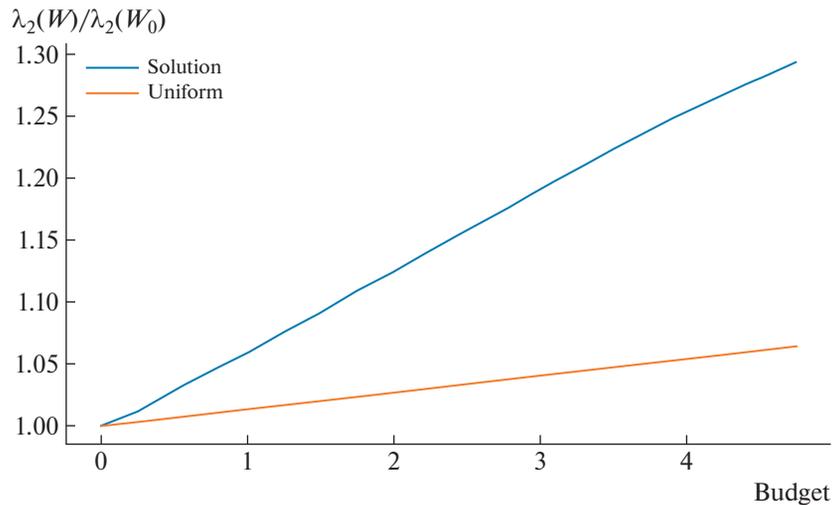


Рис. 4. Сравнение решений по метрике λ_2 с равномерным улучшением на сети Geant.

ним результаты между оптимизацией робастной алгебраической связности и равномерным увеличением всех весов на всех ребрах на величину $\frac{B}{|E|}$.

Результаты такого сравнения для графа Geant показаны на рис. 4 и 5. На рис. 4 показаны значения алгебраической связности для весов, полученных через оптимизацию робастной алгебраической связности и через равномерное улучшение. Здесь мы можем видеть, что вторая стратегия приводит к существенно худшему результату. Из этого можно сделать вывод, что решение найденное через SDP-постановку существенно отличается от равномерного улучшения.

Более того, на рис. 5 мы можем видеть, что равномерное улучшение почти не увеличивает робастную алгебраическую связность. Таким образом, результат оптимизации робастной алгебраической связности существенно превосходит равномерное улучшение как по значению алгебраической связности, так и по значению ее робастной версии.

Однако как было показано на графе Ebone, оптимизация данной метрики на графах с мостом ни к чему не приводит. Поэтому далее мы рассмотрим α -робастную алгебраическую связность.

Так на рис. 6 показаны результаты оптимизации α -робастной алгебраической связности на

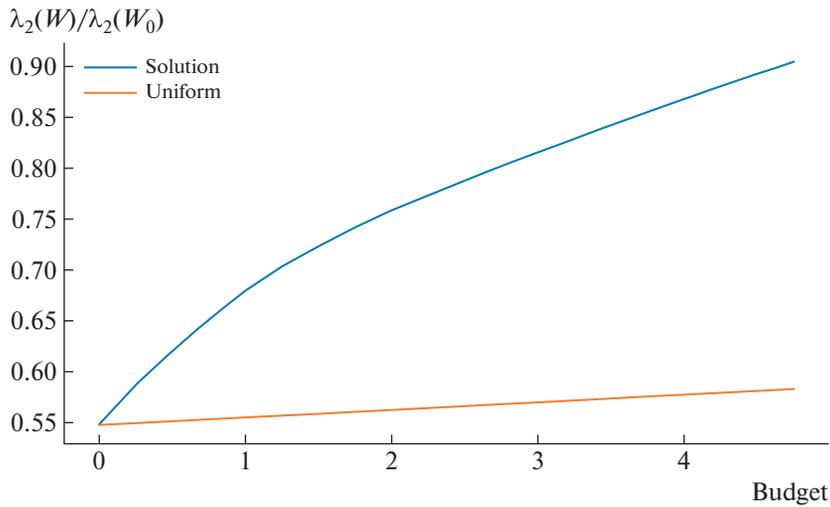


Рис. 5. Сравнение решений по метрике $\lambda_{2,R}$ с равномерным улучшением на сети Geant.

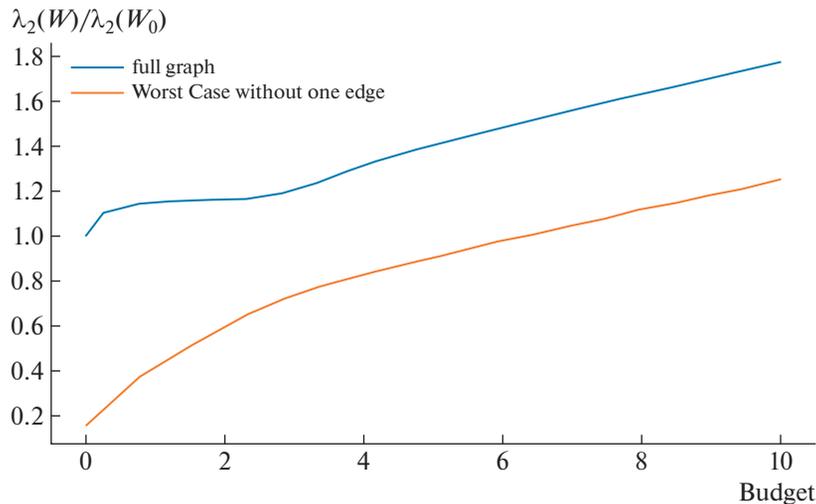


Рис. 6. Результаты оптимизации метрики $\lambda_{2,\alpha,R}(G)$ для графа Ebone при различных значениях параметра γ .

графе Ebone с $\alpha = 0.1$. Мы видим, что в отличие от оптимизации робастной алгебраической связности, которая тождественно равна нулю на графе с мостом, оптимизация α -робастной метрики приводит к существенному увеличению связности. Кроме этого, как и ранее с некоторого момента наблюдается почти линейное увеличение значения метрик.

Аналогичную ситуацию мы можем увидеть для графа Abilene на рис. 7. Исходно данный граф содержит мост и его оптимизация через робастную алгебраическую связность лишена смысла. В свою очередь, релаксация данной метрики приводит к тому, что растет алгебраическая связность. Тем не менее важно понимать, что такого

вида оптимизации не решает проблемы, что при удалении одного ребра граф может стать несвязным.

Как уже было показано, на графах с мостом α -робастная метрика не обращается в ноль. При этом при ее сравнении с исходной алгебраической связностью мы можем сделать вывод об устойчивости графа. Однако более естественной ситуацией является выпадение целого ребра, а не отдельной части.

На рис. 8 показаны результаты сравнения робастной алгебраической связности и α -робастной алгебраической связности при оптимизации последней при различных бюджетах на графе Geant, который не имеет ребер. Мы можем ви-

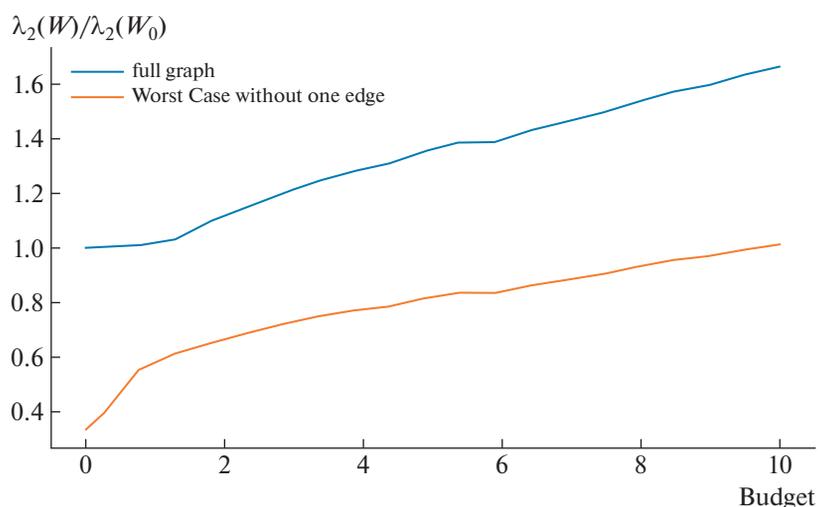


Рис. 7. Результаты оптимизации метрики $\lambda_{2,\alpha,R}(G)$ для графа Abilene при различных значениях параметра γ .

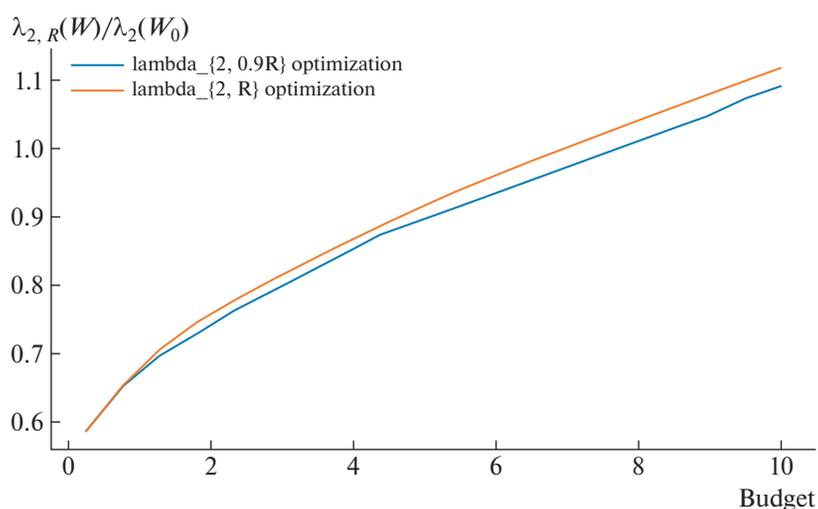


Рис. 8. Сравнение значений $\lambda_{2,R}$ и $\lambda_{2,\alpha,R}$ для результатов оптимизации α -робастной алгебраической связности графа Geant.

деть, что данные метрики близки на всем диапазоне. Таким образом, использование α -робастной алгебраической связности позволяет сравнивать графы даже с мостом, и более того дает схожие результаты с робастной версией на графах без моста. Далее мы рассмотрим результаты оптимизации средней алгебраической связности.

На рис. 9 показаны результаты средней алгебраической связности. Можно заметить, что зазор между усреднением и исходной связностью значительно меньше, чем для робастной алгебраической связности. Также мы видим, что оптимизация

средней алгебраической связности позволяет улучшать связность даже графов с мостом.

На рис. 10 показаны результаты аналогичного эксперимента для графа Geant. Как можно видеть, оптимизация средней алгебраической связности приводит к более существенному росту алгебраической связности, чем ранее рассматриваемые метрики.

Как было выше отмечено, что метрика $\lambda_{2,R}(G)$ не может быть улучшена на графах с мостом только изменением весов на ребрах. Однако добавлением ребер можно избавиться от мостов. Для этих целей можно использовать предложенный в ра-

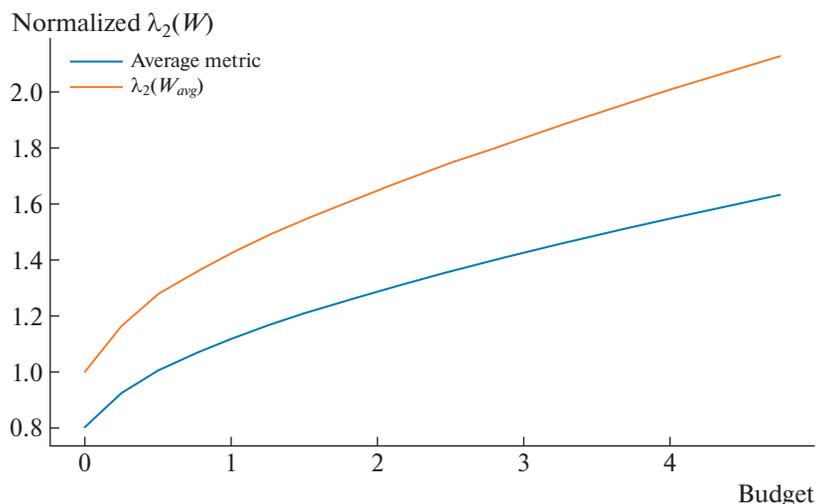


Рис. 9. Результаты оптимизации метрики $\lambda_{2,\text{mean}}(G)$ для графа Ebone при различных значениях параметра γ .

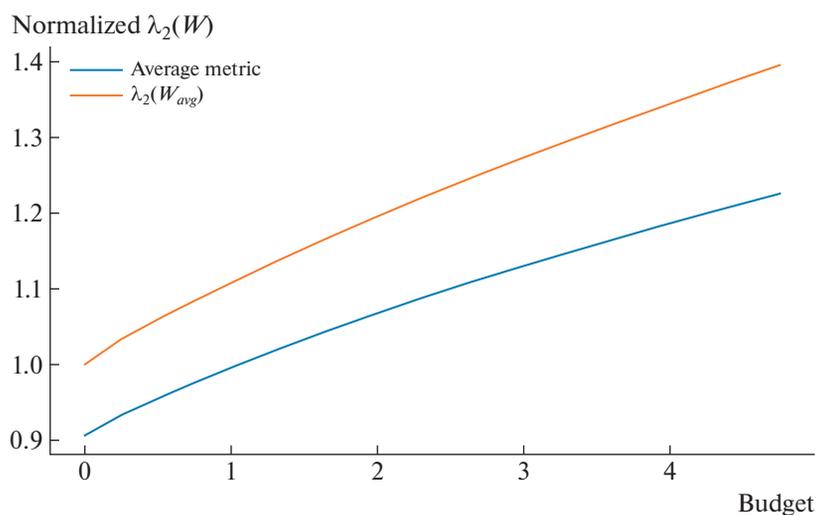


Рис. 10. Результаты оптимизации метрики $\lambda_{2,\text{mean}}(G)$ для графа Geant при различных значениях параметра γ .

боте [3] жадный алгоритм. Однако он не способен изменять веса на уже существующих ребрах. Поэтому в данной работе была предложена модификация, способная на это. Результаты применения нового жадного алгоритма на граф Ebone показана на рис. 11. Параметры следующие $w_{\min} = w_q = \frac{1}{10} \min_{e \in E} w_e$, $c_1 = c_2 = 1$. Как мы можем видеть, первые несколько итераций робастная алгебраическая связность равна нулю, поскольку в этом графе есть несколько мостов. Однако с некоторой итерации метрика начинает расти, и зазор между метриками сокращаться.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье были предложены возможные обобщения известной метрики алгебраической связности. Данные обобщения должны учесть, что граф может претерпевать изменения, которые могут существенно ухудшить связность. Были предложены робастные метрики, основанные на рассмотрении худшего случая, а также обсуждены их недостатки. Кроме этого, было рассмотрено усреднение по модификациям.

Дополнительно были обобщены подходы оптимизации алгебраической связности на случай оптимизации робастных версий. В частности, были рассмотрены возможность модификации ве-

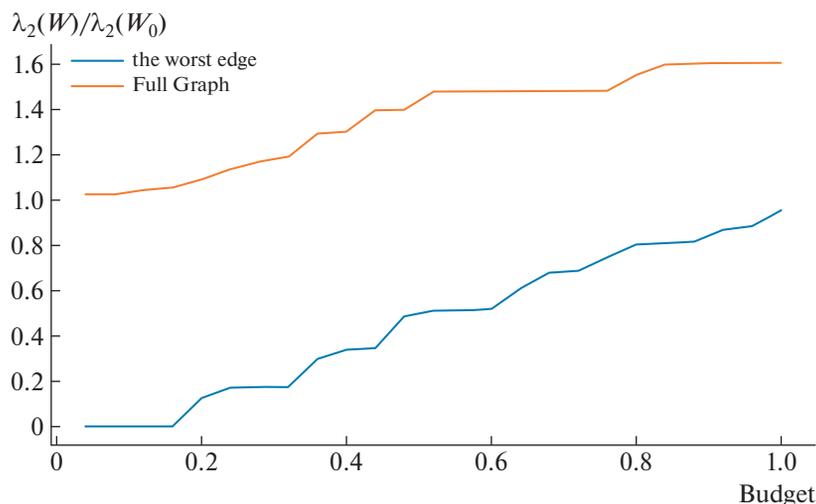


Рис. 11. Результаты оптимизации метрики $\lambda_{2,R}(G)$ жадным алгоритмом для графа Ebone при различных значениях параметра γ .

сов на ребрах через SDP-постановку задачи оптимизации. Также был обобщен жадный алгоритм на случай добавления ребер и модификации весов. Детали этих подходов описаны для каждой из предложенных метрик.

Наконец, были проведены численные эксперименты, показывающие работоспособность предложенных подходов. Также были обсуждены детали использования различных метрик на графах с мостами и без них. Было показано, что предложенная робастная алгебраическая связность и ее α -релаксация дают близкие результаты на графах без мостов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fiedler Miroslav*. Algebraic Connectivity of Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1973. V. 23. P. 298–305. <https://doi.org/10.21136/CMJ.1973.101168>
2. *Fallat Shaun, Kirkland Steve, Pati Sukanta*. On graphs with algebraic connectivity equal to minimum edge density. *Linear Algebra and its Applications*. 2003. V. 373. P. 31–50. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(02\)00538-4](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00538-4)
3. *Ghosh Arpita, Boyd Stephen*. Growing Well-connected Graphs. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. 2007. P. 6605–6611. <https://doi.org/10.1109/CDC.2006.377282>
4. *Kirkland Steve, Neumann M*. On Algebraic Connectivity as a Function of an Edge Weight. *Linear and Multilinear Algebra*. 2004. V. 052. P. 17–33. <https://doi.org/10.1080/0308108031000119663>
5. *Feddema John, Byrne Raymond, Abdallah Chaouki*. Algebraic connectivity and graph robustness. 2005. <https://doi.org/10.2172/973665>
6. *Goyal Sanjeev, Vigier Adrien*. *Robust Networks*. 2011.
7. *Bala Venkatesh, Goyal, Sanjeev*. A Strategic Analysis of Network Reliability. *Review of Economic Design*. 2000. V. 5. P. 205–228. <https://doi.org/10.1007/s100580000019>
8. *Ghayoori A., Leon-Garcia A.*, “Robust network design,” 2013 IEEE International Conference on Communications (ICC), Budapest, Hungary, 2013. P. 2409–2414. <https://doi.org/10.1109/ICC.2013.6654892>
9. *Lipovetsky Stan*. Matrix Analysis, 2nd edition, Roger A. Horn and Charles R. Johnson, book review, *Technometrics*. 2013. V. 55. № 3. 2013, 376. *Technometrics*. V. 55. P. 376. book review
10. *Gregoire Spiers, Peng Wei, Dengfeng Sun*, Algebraic Connectivity Optimization of Large Scale and Directed Air Transportation Network, *IFAC Proceedings Volumes, Volume 45, Issue 24, 2012, Pages 103-109, ISSN 1474-6670, ISBN 9783902823137*, <https://doi.org/10.3182/20120912-3-BG-2031.00019>
11. *Zhidong He*. Optimization of convergence rate via algebraic connectivity. 2019.
12. *Orlowski S., Wessaly R., Pioro M., Tomaszewski A*. SNDlib 1.0—Survivable network design library. *Networks: An International Journal* 55.3. 2010. P. 276–286.

ROBUST ALGEBRAIC CONNECTIVITY**I. A. Kuruzov^{a,b}, A. V. Rogozin^a, S. A. Chezhegov^a, and A. B. Kupavskii**

^a*Moscow Institute of Physics and Technology
Institutskiy per., 9, Moscow region, Dolgoprudny, 141701 Russia*

^b*Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)
Bolshoi Karetny lane, 19, build. 1, Moscow, 127051 Russia*

The second smallest eigenvalue of a graph Laplacian is known as algebraic connectivity of the graph. This value shows how much this graph is connected. But this metric does not take into attention possible changes in graph. Note, that deletion of even one node or edge can lead the graph to be disconnected. This work is devoted to development of a metric that should describe robustness of the graph to such changes. All proposed metrics are based on algebraic connectivity. Besides, we provide generalization of some famous optimization methods for our robust modifications of algebraic connectivity. Moreover, this work contains some numerical experiments demonstrated efficiency of proposed approaches.