

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 621.371.334:537.874.6

**ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА МАЛЫХ ЧАСТИЦАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ПРИ ПОМОЩИ
МЕТОДА ДИАГРАММНЫХ УРАВНЕНИЙ**

© 2019 г. Д. Б. Демин¹, А. И. Клеев², А. Г. Кюркчан^{1,3,4,*}

¹Московский технический университет связи и информатики,
Российская Федерация, 111024 Москва, ул. Авиамоторная, 8а

²Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН,
Российская Федерация, 119334 Москва, ул. Косыгина, 2

³Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Российская Федерация, 141190 Фрязино Московской обл., пл. Введенского, 1

⁴ФГУП Центральный научно-исследовательский институт связи,
Российская Федерация, 111141 Москва, 1-й проезд Перова поля, 8

*E-mail: agkmtuci@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.04.2018 г.

После доработки 16.04.2018 г.

Принята к публикации 27.04.2018 г.

Приведены явные приближенные формулы для интегральных характеристик рассеяния, применимые для малых трехмерных рассеивателей сложной формы. На нескольких примерах выполнено сравнение результатов приближенного подхода с точными результатами, полученными с помощью метода диаграммных уравнений. Для широкого диапазона параметров задачи показано, что точность вычислений, контролируемая посредством вычисления баланса потоков мощностей для падающей и рассеянной волн (проверка выполнения “оптической теоремы”) вполне достаточна для практики.

DOI: 10.1134/S0033849419010042

ВВЕДЕНИЕ

Исследование рассеяния электромагнитных волн на малых, по сравнению с длиной волны, частицах имеет большое теоретическое и практическое значение [1–6]. В частности, моделирование взаимодействия излучения с малыми частицами играет решающую роль в оптике наноразмерных плазмонных частиц [3, 5, 6]. В настоящее время отмечается возрастание интереса к данной проблематике в связи с необходимостью исследования разнообразных сред искусственного происхождения (метаматериалов) [7]. Вплоть до настоящего момента, практически единственной математической моделью взаимодействия электромагнитных волн с малыми частицами является приближение Рэлея [8]. Данный подход основан на решении вспомогательной электростатической задачи, когда волновое число предполагается равным нулю, а первичное поле считается постоянным. Для некоторых частных случаев рассеяния на шарах и эллипсоидах, когда решение вспомогательной электростатической задачи можно получить в явном виде, в том числе для двухслойного эллипсоида [1], многослойного конфокального [8] и неконфокального эллипсоидов [9], данный подход

изложен достаточно подробно. Известно, что подобный традиционный подход обладает определенными недостатками. Например, использование дипольного приближения приводит к невыполнению оптической теоремы [10]. Необходимо также отметить, что решение задачи в электростатическом приближении в общем случае само по себе довольно сложно. Как показано в [11], существующие методы ее решения имеют ряд принципиальных ограничений на форму частицы.

В данной работе предложен новый подход к анализу рассеяния электромагнитных волн на малых частицах. Подход базируется на использовании метода диаграммных уравнений (МДУ), который был предложен в работе [12] (см. также [13]). В работе [14] была продемонстрирована высокая скорость сходимости МДУ, в частности, при решении задачи о рассеянии волн сплюснутым сфероидом скорость сходимости МДУ практически не меняется даже при увеличении отношения осей сфероида до 40 : 1.

Установленная в указанных выше работах высокая скорость сходимости МДУ была использована при построении нового подхода к анализу рассеяния на тонких цилиндрах. Действительно,

как показали расчеты [15–17], для решения двумерной задачи рассеяния на идеально проводящих цилиндрах, характерный поперечный размер которых сопоставим с длиной волны первичного поля, достаточно учесть, в зависимости от поляризации падающего поля, от одного до трех слагаемых в разложении диаграммы рассеяния. Это дало возможность получить явные формулы для интегральных характеристик рассеяния, применимые для цилиндрических рассеивателей сложной формы поперечного сечения (в частности, для цилиндров, контур поперечного сечения которых имеет изломы) и обладающие существенно большей точностью, чем приближение Рэлея.

Цель данной работы – распространить предложенный в [15–17] подход на решение трехмерных векторных задач рассеяния.

1. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МДУ

Рассмотрим рассеяние плоской волны на идеально проводящем теле вращения. В этом случае на поверхности S выполняется граничное условие

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad (1)$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к S , $\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)}$ – вектор полного (падающего $\vec{E}^{(0)}$ и рассеянного $\vec{E}^{(1)}$) электрического поля. В сферической системе координат уравнение поверхности S имеет вид

$$r = \rho(\theta, \varphi) = \rho(\theta). \quad (2)$$

Полагаем, что в дальней зоне (при $kr \gg 1$) для компонент рассеянного поля $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{H}^{(1)}$ выполняются асимптотические соотношения вида

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)} &= \frac{\exp(-ikr)}{r} \vec{F}^E(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right), \\ \vec{H}^{(1)} &= \frac{\exp(-ikr)}{r} \vec{F}^H(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где \vec{F}^E и \vec{F}^H – диаграммы электрического и магнитного полей соответственно. Для \vec{F}^E и \vec{F}^H использовались следующие разложения [18, 19]:

$$\begin{aligned} \vec{F}^E(\theta, \varphi) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} i^n (\vec{i}_r \times \vec{\Phi}_n^m(\theta, \varphi)) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{n,m} i^n \zeta_0 \vec{\Phi}_n^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}^H(\theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} i^n \frac{1}{\zeta_0} \vec{\Phi}_n^m(\theta, \varphi) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{n,m} i^n (\vec{i}_r \times \vec{\Phi}_n^m(\theta, \varphi)), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\vec{\Phi}_n^m(\theta, \varphi) = \vec{r} \times \nabla P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi). \quad (6)$$

Согласно МДУ [18, 19], коэффициенты a_{nm} и b_{nm} при решении задачи дифракции на идеально проводящем теле удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{n,m} = a_{n,m}^{(0)} + \sum_{q=|m|}^{\infty} (G_{n,m;q,m}^{(1,1)} a_{q,m} + G_{n,m;q,m}^{(1,2)} b_{q,m}), \\ b_{n,m} = b_{n,m}^{(0)} + \sum_{q=1}^{\infty} (G_{n,m;q,m}^{(2,1)} a_{q,m} + G_{n,m;q,m}^{(2,2)} b_{q,m}). \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad |m| \leq n. \quad (7)$$

Выражения для $G_{n,m;q,p}^{(i,j)}$ приведены в Приложении.

В данной работе рассмотрен случай, когда падающее поле является плоской волной. При этом

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)} &= \vec{g} \exp(-ik\vec{r}), \\ \vec{H}^{(1)} &= \frac{\vec{k} \times \vec{g}}{k\zeta} \exp(-ik\vec{r}) = \frac{\vec{g}_1}{\zeta} \exp(-ik\vec{r}), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\vec{k}\vec{r} = kr [\sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0]. \quad (9)$$

В (8) поляризация падающей волны определяется векторами \vec{g} и \vec{g}_1 :

$$\vec{g} = -\vec{i}_z \sin \theta_0 + \vec{i}_x \cos \varphi_0 \cos \theta_0 + \vec{i}_y \sin \varphi_0 \cos \theta_0, \quad (10)$$

$$\vec{g}_1 = -\vec{i}_x \sin \varphi_0 + \vec{i}_y \cos \varphi_0. \quad (11)$$

Рассматривали два случая. В первом случае $\theta_0 = \varphi_0 = 0$ и, следовательно, вектор электрического поля перпендикулярен оси z :

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)} &= \vec{i}_x \exp(-ikr \cos \theta), \\ \vec{H}^{(1)} &= \frac{1}{\zeta} \vec{i}_y \exp(-ikr \cos \theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Во втором случае $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$ – вектор электрического поля параллелен оси z :

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)} &= -\vec{i}_z \exp(-ikr \sin \theta \cos \varphi), \\ \vec{H}^{(1)} &= \frac{1}{\zeta} \vec{i}_y \exp(-ikr \sin \theta \cos \varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве критерия достоверности результатов расчетов проверяли точность выполнения оптической теоремы [1]. Как известно, для непоглощающего рассеивателя, в том случае, когда падающее поле является плоской волной, оптическая теорема может быть записана в виде [20–23]:

$$\sigma_s = -\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \left(\vec{F}^E \cdot \vec{g} \Big|_{\theta=\theta_0, \varphi=\varphi_0} \right). \quad (14)$$

В качестве количественной меры выполнения оптической теоремы можно использовать нормированную величину $\Delta_{\text{опт}}$, определяемую соотношением:

$$\Delta_{\text{опт}} = \left| \sigma_s + \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \left(\vec{F}^E \cdot \vec{g} \Big|_{\theta=\theta_0, \varphi=\varphi_0} \right) \right| / \sigma_s. \quad (15)$$

Как показывает анализ системы уравнений (7), первые три слагаемых в разложениях диаграммы (4), (5) имеют одинаковый порядок малости по параметру ka . Поэтому для получения корректных результатов необходимо учитывать первые три слагаемых в разложениях (4), (5). Численные расчеты продемонстрировали справедливость данного положения. Выражения для коэффициентов разложения диаграммы в рассматриваемом приближении имеют вид

$$a_{1,0} = \frac{a_{1,0}^{(0)} (1 - G_{1,0;1,0}^{(2,2)}) + b_{1,0}^{(0)} G_{1,0;1,0}^{(1,2)}}{(1 - G_{1,0;1,0}^{(1,1)}) (1 - G_{1,0;1,0}^{(2,2)}) - G_{1,0;1,0}^{(2,1)} G_{1,0;1,0}^{(1,2)}}, \quad (16)$$

$$b_{1,0} = \frac{a_{1,0}^{(0)} G_{1,0;1,0}^{(2,1)} + b_{1,0}^{(0)} (1 - G_{1,0;1,0}^{(1,1)})}{(1 - G_{1,0;1,0}^{(1,1)}) (1 - G_{1,0;1,0}^{(2,2)}) - G_{1,0;1,0}^{(2,1)} G_{1,0;1,0}^{(1,2)}}, \quad (17)$$

$$a_{1,1} = \frac{a_{1,1}^{(0)} (1 - G_{1,1;1,1}^{(2,2)}) + b_{1,1}^{(0)} G_{1,1;1,1}^{(1,2)}}{(1 - G_{1,1;1,1}^{(1,1)}) (1 - G_{1,1;1,1}^{(2,2)}) - G_{1,1;1,1}^{(2,1)} G_{1,1;1,1}^{(1,2)}}, \quad (18)$$

$$b_{1,1} = \frac{a_{1,1}^{(0)} G_{1,1;1,1}^{(2,1)} + b_{1,1}^{(0)} (1 - G_{1,1;1,1}^{(1,1)})}{(1 - G_{1,1;1,1}^{(1,1)}) (1 - G_{1,1;1,1}^{(2,2)}) - G_{1,1;1,1}^{(2,1)} G_{1,1;1,1}^{(1,2)}}, \quad (19)$$

$$a_{1,-1} = \frac{a_{1,-1}^{(0)} (1 - G_{1,-1;1,-1}^{(2,2)}) + b_{1,-1}^{(0)} G_{1,-1;1,-1}^{(1,2)}}{(1 - G_{1,-1;1,-1}^{(1,1)}) (1 - G_{1,-1;1,-1}^{(2,2)}) - G_{1,-1;1,-1}^{(2,1)} G_{1,-1;1,-1}^{(1,2)}}, \quad (20)$$

$$b_{1,-1} = \frac{a_{1,-1}^{(0)} G_{1,-1;1,-1}^{(2,1)} + b_{1,-1}^{(0)} (1 - G_{1,-1;1,-1}^{(1,1)})}{(1 - G_{1,-1;1,-1}^{(1,1)}) (1 - G_{1,-1;1,-1}^{(2,2)}) - G_{1,-1;1,-1}^{(2,1)} G_{1,-1;1,-1}^{(1,2)}}. \quad (21)$$

Выражения (16)–(21) полностью определяют приближенное решение задачи и дают возможность вычислить все характеристики рассеяния. Подчеркнем, что полученные явные выражения для коэффициентов разложения диаграммы рассеяния применимы для тела вращения достаточно произвольной формы [18].

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим результаты использования полученных выше приближенных выражений на нескольких примерах. Будем характеризовать точность расчета интегральных характеристик величиной $\Delta(k^2\sigma_s)$, вычисляемой по формуле

$$\Delta(k^2\sigma_s) = |k^2\tilde{\sigma}_s - k^2\sigma_s| / k^2\sigma_s, \quad (22)$$

где $k^2\tilde{\sigma}_s$ – приближенное значение нормированного сечения рассеяния, определяемое соотношениями (16)–(21), $k^2\sigma_s$ – точное значение, полученное с помощью МДУ. При расчете σ_s порядков системы (7) выбирали таким образом, чтобы нормированная погрешность выполнения оптической теоремы не превышала 10^{-3} . На рис. 1а представлены зависимости относительной погрешности расчета нормированного сечения рассеяния $\Delta(k^2\sigma_s)$ от нормированного волнового числа kc для идеально проводящего сфероида при $\theta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Поверхность рассматриваемого сфероида в декартовой системе координат задается соотношением

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (23)$$

При расчете нормированного сечения рассеяния в дипольном приближении для рассматриваемой поляризации использовали следующее выражение [24]:

$$k^2\sigma_s = \frac{64\pi}{27} (ka)^4 (kc)^2 \frac{1 + n_z^2}{(1 - n_z^2)^2}, \quad (24)$$

где

$$n_z = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left(\ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right), \quad e = \sqrt{1 - a^2/c^2}. \quad (25)$$

Приведенные результаты показывают, что полученное в данной работе приближенное решение оказывается, как минимум, на два порядка точнее, чем дипольное приближение.

На рис. 1б приведены зависимости относительной погрешности расчета нормированного сечения рассеяния $\Delta(k^2\sigma_s)$ от нормированного волнового числа kc для идеально проводящего сфероида при $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. Для рассматриваемой поляризации в дипольном приближении для расчета нормированного сечения рассеяния использовали следующее выражение [24]:

$$k^2\sigma_s = \frac{8\pi}{27} (ka)^4 (kc)^2 \frac{1 + 2n_z + 5n_z^2}{n_z^2 (1 + n_z)^2}. \quad (26)$$

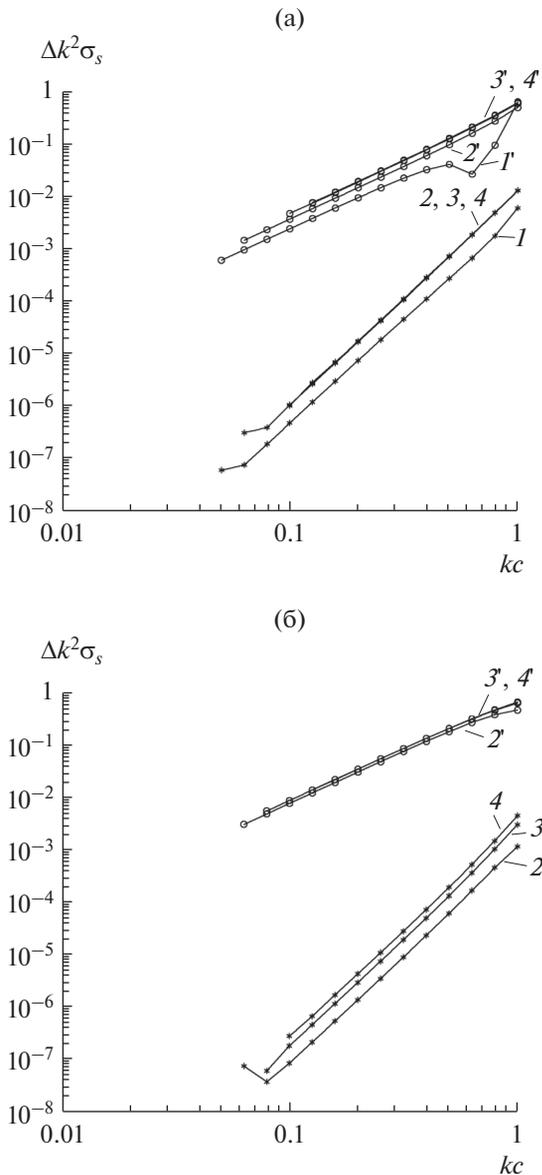


Рис. 1. Зависимость относительной погрешности расчета нормированного сечения рассеяния $\Delta k^2 \sigma_s$ от нормированного волнового числа kc для идеально проводящего сфероида при $\theta_0 = 0$ (а) и $\theta_0 = \pi/2$ (б), $\phi_0 = 0$. Кривые 1–4 получены с помощью “приближенного” МДУ, при $N = 1$, кривые 1’–3’ – расчеты в дипольном (рэлеевском) приближении; $c/a = 1$ (1), 2 (2,2), 4 (3,3’) и 8 (4,4’).

Приведенные на рис. 1б результаты показывают, что для данной поляризации приближенное решение, построенное с помощью МДУ, дает несколько более точный, чем в предыдущем случае (см. рис. 1а), результат: из сопоставления кривых на обоих рисунках, видно, что погрешность вычисления нормированного сечения рассеяния для второй поляризации приблизительно вдвое меньше.

На рис. 2а представлены результаты расчета зависимости погрешности нормированного сечения рассеяния $\Delta(k^2 \sigma_s)$ от нормированного волнового числа kc для идеально проводящего вытянутого суперэллипсоида при $\theta_0 = 0, \phi_0 = 0$. Поверхности суперэллипсоида определялась соотношением

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^q + \left| \frac{z}{c} \right|^{2q} = 1. \quad (27)$$

На рис. 2б представлены соответствующие результаты, полученные для сплюснутого суперэллипсоида.

Представленные на рис. 2а результаты показывают, что предложенные в данной статье приближенные формулы дают вполне удовлетворительную точность расчета полного поперечника рассеяния даже для достаточно больших значений параметра суперэллиптичности. Отметим, что для суперэллипсоидов явные формулы для тензора поляризуемости отсутствуют. Компоненты тензора поляризуемости могут быть получены только с помощью численных методов, что, в принципе, является довольно сложной проблемой, сопоставимой по трудоемкости с решением исходной задачи дифракции [8, 11].

Для большого числа практических приложений характерные нормированные значения размеров сфероида составляют $kc \cong 0.1 \dots 0.01$ [4, 5]. Как показывают представленные выше результаты, предлагаемый в данной работе подход обладает достаточно высокой точностью в указанном диапазоне параметров задачи.

Выше уже отмечалось, что использование дипольного приближения не дает необходимой точности выполнения энергетического баланса. Как указано в работе [10], при использовании рэлеевского приближения в рассматриваемом случае имеем

$$\text{Im} \left(\vec{F}^E \cdot \vec{g} \Big|_{\theta=\theta_0, \phi=\phi_0} \right) = 0, \quad (28)$$

и, следовательно, оптическая теорема не выполняется. Предложенный в данной работе подход свободен от указанного недостатка. На рис. 3, 4 представлены результаты расчета, демонстрирующие точность выполнения оптической теоремы для рассмотренных выше случаев. Представленные на данных рисунках результаты показывают, что в рассмотренных примерах относительная погрешность выполнения оптической теоремы близка к относительной погрешности расчета полного сечения рассеяния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено рассеяние электромагнитной волны на малых идеально проводящих телах вра-

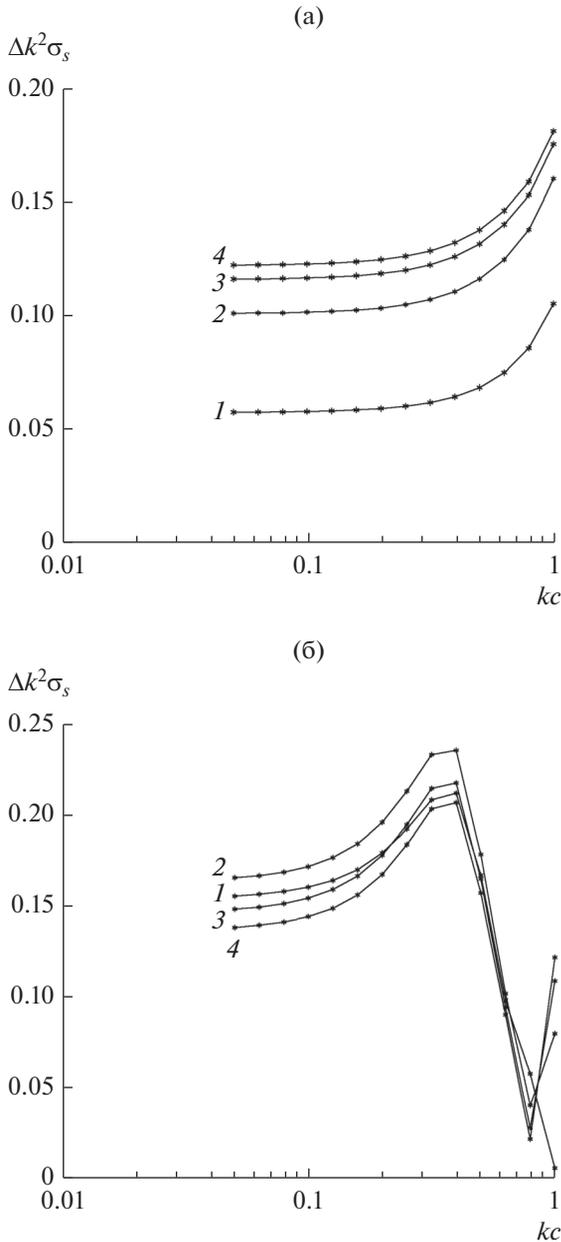


Рис. 2. Зависимость погрешности расчета $\Delta k^2 \sigma_s$ нормированного сечения рассеяния от нормированного волнового числа kc для идеально проводящего суперэллипсоида при $\theta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Кривые, помеченные звездочками – результаты, полученные с помощью “приближенного” МДУ, при $N = 1$. Кривые построены при $c/a = 2$ (а) и 0.5 (б), $q = 2$ (1), 4 (2), 6 (3) и 8 (4).

шения. Установлено, для расчета характеристик рассеяния тел, размеры которых сопоставимы с длиной волны первичного поля, достаточно учесть первые три слагаемых в разложении диаграммы рассеяния по векторному сферическому базису. Проанализирована точность полученных приближенных решений в зависимости от поля-

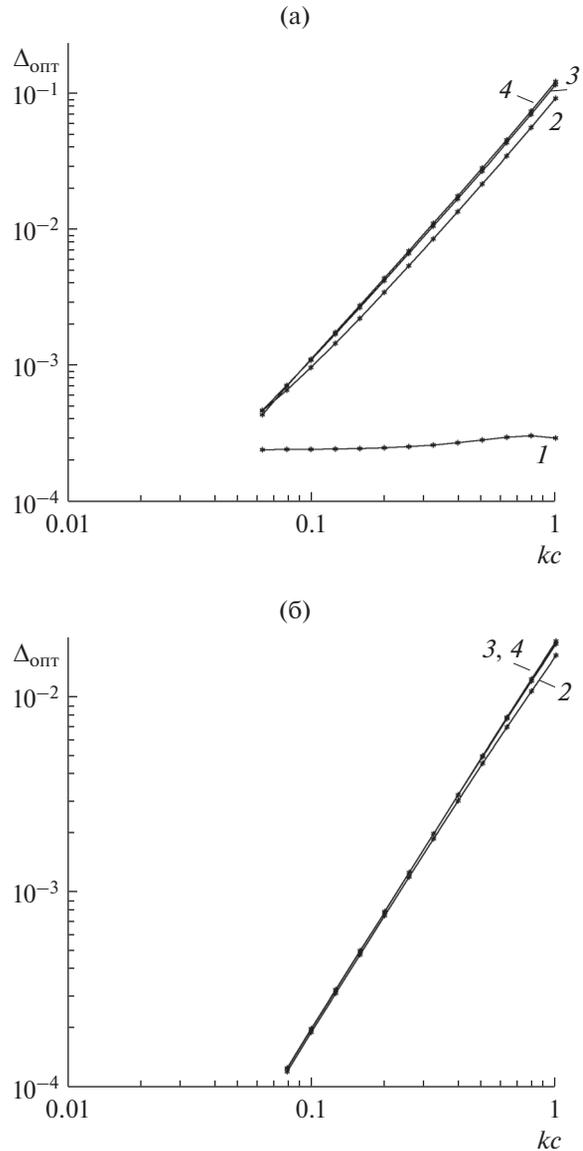


Рис. 3. Зависимость нормированной погрешности выполнения оптической теоремы $\Delta_{\text{опт}}$ от нормированного волнового числа kc для идеально проводящего сфероида при $\theta_0 = 0$ (а) и $\theta_0 = \pi/2$ (б), $\varphi_0 = 0$. Результаты получены с помощью “приближенного” МДУ, при $N = 1$, кривые построены при $c/a = 1$ (1), 2 (2), 4 (3) и 8 (4).

ризации падающего поля и формы частицы. Таким образом, показано, что высокая скорость сходимости МДУ дала возможность получить явные формулы для интегральных характеристик рассеяния, применимые для трехмерных рассеивателей сложной формы. Отметим, что в отличие от работ [6, 25] приведенные нами выражения получены из строго обоснованных уравнений для диаграммы направленности рассеянного поля. На нескольких примерах выполнено сравнение результатов приближенного подхода с точными

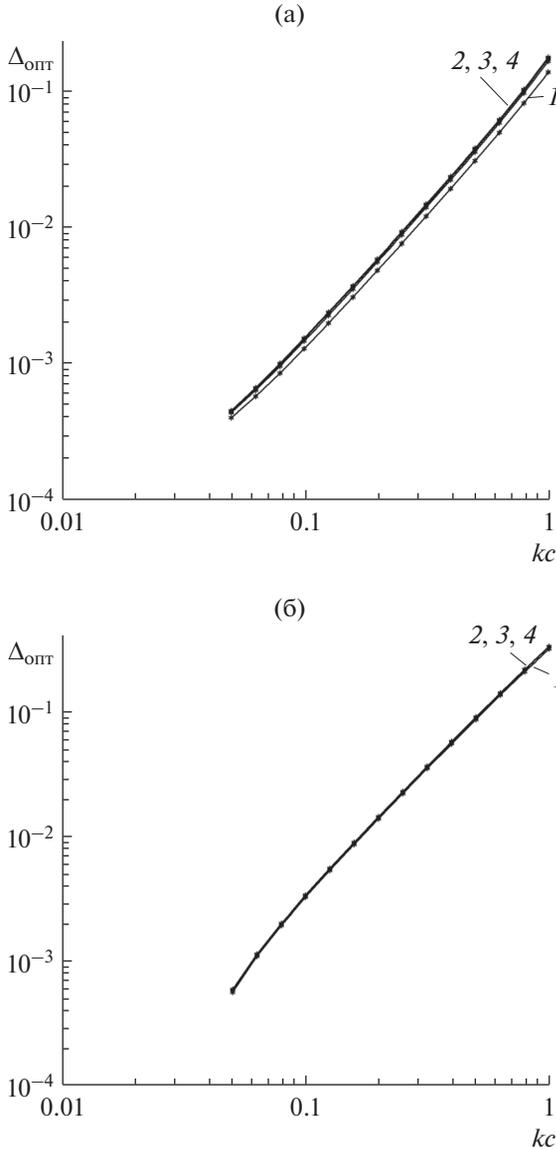


Рис. 4. Зависимость нормированной погрешности выполнения оптической теоремы $\Delta_{\text{опт}}$ от нормированного волнового числа для идеально проводящего суперэллипсоида вращения при $\theta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Результаты получены с помощью “приближенного” МДУ, при $N = 1$. Кривые построены при $c/a = 2$ (а) и $1/2$ (б) и $q = 2$ (1), 4 (2), 6 (3) и 8 (4).

данными, полученными с помощью МДУ. Для широкого диапазона параметров задачи показано, что точность вычислений, контролируемая посредством вычисления баланса потоков мощностей для падающей и рассеянной волн (проверка выполнения “оптической теоремы”) вполне достаточна для практики.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-02-00247 А).

Приведем соотношения для элементов матриц $G_{n,m;q,m}^{(l,j)}$, использованные при расчетах (подробный вывод данных соотношений приведен в работах [18, 19]):

$$G_{n,m;q,p}^{(1,1)} = -\frac{\zeta}{4\pi} N_{nm} \int_S (\vec{n} \times \vec{H}_{q,p}^e) \vec{e}_{n,m}^e ds, \quad (\text{П.1})$$

$$G_{n,m;q,p}^{(1,2)} = -\frac{\zeta}{4\pi} N_{nm} \int_S (\vec{n} \times \vec{H}_{q,p}^h) \vec{e}_{n,m}^e ds, \quad (\text{П.2})$$

$$G_{n,m;q,p}^{(2,1)} = -\frac{\zeta}{4\pi} N_{nm} \int_S (\vec{n} \times \vec{H}_{q,p}^e) \vec{h}_{n,m}^e ds, \quad (\text{П.3})$$

$$G_{n,m;q,p}^{(2,2)} = -\frac{\zeta}{4\pi} N_{nm} \int_S (\vec{n} \times \vec{H}_{q,p}^h) \vec{h}_{n,m}^e ds, \quad (\text{П.4})$$

$$a_{n,m}^{(0)} = -\frac{\zeta}{4\pi} N_{nm} \int_S (\vec{n} \times \vec{H}_{q,p}^0) \vec{e}_{n,m}^e ds, \quad (\text{П.5})$$

$$b_{n,m}^{(0)} = -\frac{\zeta}{4\pi} N_{nm} \int_S (\vec{n} \times \vec{H}_{q,p}^h) \vec{h}_{n,m}^e ds, \quad (\text{П.6})$$

$$N_{n,m} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \quad (\text{П.7})$$

при

$$\vec{n} = \frac{1}{\kappa} (\vec{i}_r \rho \sin \theta - \vec{i}_\theta \rho'_\theta \sin \theta - \vec{i}_\varphi \rho'_\varphi), \quad (\text{П.8})$$

$$ds = \kappa \rho d\theta d\varphi,$$

$$\kappa = \sqrt{\left[\rho^2 + (\rho'_\theta)^2 \sin^2 \theta + (\rho'_\varphi)^2 \right]}, \quad (\text{П.9})$$

где $r = \rho(\theta, \varphi)$ – уравнение поверхности S в сферических координатах.

$$\vec{e}_{n,m}^e = \nabla \times \nabla \times (r \chi_n^m), \quad \vec{h}_{n,m}^e = \frac{ik}{\zeta} \nabla \times (r \chi_n^m), \quad (\text{П.10})$$

$$\chi_n^m = j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (\text{П.11})$$

j_n – сферические функции Бесселя, P_n^m – присоединенные функции Лежандра [26], черта означает знак комплексного сопряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bohren C.F., Huffman D.R.* Absorption and Scattering of Light by Small Particles. New York: John Wiley and Sons, 1998.
2. *Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D.* Light Scattering by Nonspherical Particles. San Diego: Academic Press, 2000.
3. *Климов В.В.* Наноплазмоника. М.: Физматлит, 2010. 480 с.
4. *Boyack R., Le Ru E.C.* // Phys. Chem. Chem. Phys. 2009. V. 11. P. 7398.

5. *Li X., Xie L., Cheng X.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2012. V. 113. P. 251.
6. *Kuwata H., Eumi K., Miyano K.* // Appl. Phys. Lett. 2003. V. 83. № 22. P. 4625.
7. *Cai X., Zhu R., Hu G.* // Metamaterials. 2008. V. 2. № 4. P. 220.
8. *Фарафонов В.Г.* // Оптика и спектроскопия. 2000. Т. 88. № 3. С. 492.
9. *Фарафонов В.Г.* // Оптика и спектроскопия. 2001. Т. 90. № 5. С. 826.
10. *Collin R.E.* // IEEE Trans. 1981. V. AP-29. № 9. P. 795.
11. *Фарафонов В.Г., Устимов В.И.* // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 122. № 2. С. 287.
12. *Кюркчан А.Г.* // Докл. АН. 1992. Т. 325. № 2. С. 273.
13. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: ИД Медиа Паблшер, 2014.
14. *Кюркчан А.Г., Клеев А.И.* // РЭ. 1995. Т. 40. № 6. С. 897.
15. *Демин Д.Б., Клеев А.И., Кюркчан А.Г.* // Т-Comm. Телекоммуникации и транспорт. 2016. Т. 10. №10. С. 38.
16. *Demin D.B., Kleev A.I., Kyurkchan A.G.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2017. V. 187. № 1. P. 287.
17. *Демин Д.Б., Клеев А.И., Кюркчан А.Г.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 6. С. 507.
18. *Кюркчан А.Г.* // РЭ. 2000. Т. 45. № 9. С. 1078.
19. *Кюркчан А.Г., Демин Д.Б.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 2. С. 24.
20. *Carney P.S., Schotland J.C., Wolf E.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. № 3. P. 036611.
21. *Venkatapathi M.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2012. V. 113. P. 1705.
22. *Mitri F.G.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2015. V. 166. P. 81.
23. *Eremin Yu., Wriedt T.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2016. V. 185. P. 22.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005.
25. *Karam M.A., Levine D.M., Antar Y.M., Stogryn A.* // IEEE Trans. 1995. V. AP-43. № 7. P. 681.
26. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И.М. М.: Наука, 1979.