РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2019, том 64, № 10, с. 984–990

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.372.542.2

ЦИФРОВЫЕ ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ СПЕКТРОВ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2019 г. К. А. Будунова[1, *], В. Ф. Кравченко[1, 2, 3, **], В. И. Пустовойт[2, 3]

[1]Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7

[2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5

[3]Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Российская Федерация, 117342 Москва, ул. Бутлерова, 15

*E-mail: 1917schw@mail.ru

**E-mail: kvf-ok@mail.ru

Поступила в редакцию 22.01.2019 г.
После доработки 10.02.2019 г.
Принята к публикации 15.02.2019 г.

Впервые предложен метод синтеза цифровых фильтров нижних частот (ФНЧ) на основе спектров атомарных функций $\mathrm{h}_a(x)$. Финитная функция $\mathrm{h}_a(x)$ является решением задачи о разложении единицы, что позволяет рассматривать сумму ее S сдвигов $\mathrm{h}_{S,a}(x)$ как идеальную частотную характеристику ФНЧ. Методом усечения спектра функции $\mathrm{h}_{S,a}(x)$ получены цифровые фильтры с быстро затухающими коэффициентами. Построены формулы оценки отклонений частотных характеристик в полосах пропускания и подавления. Рассмотрено применение новых фильтров в задачах многоскоростной обработки сигналов.

DOI: 10.1134/S0033849419100036

ВВЕДЕНИЕ

Цифровые частотно-избирательные фильтры широко используются в обработке сигналов. Наиболее известными методами синтеза цифровых фильтров нижних частот (ФНЧ) с конечной импульсной характеристикой (КИХ) являются методы оконного взвешивания, частотной выборки и оптимизационный [1]. Главными достоинствами методов оптимизации и частотной выборки является их гибкость, проявляющаяся в возможности синтеза ФНЧ с произвольной шириной переходной полосы частот и сколь угодно малыми отклонениями приближенной частотной характеристики (ЧХ) от идеальной [2]. В то же время разработка данных фильтров требует сравнительно большого объема вычислений.

Наиболее простым считается метод оконного синтеза, заключающийся в аппроксимации идеального ФНЧ, имеющего ЧХ

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases} \quad (1)$$

где ω_0 – частота среза. Синтез осуществляется путем усечения идеальной импульсной характеристики различными окнами. При этом оказывается невозможным получить фильтр, имеющий произвольную ширину переходной полосы. Вторым существенным недостатком метода является отсутствие затухания отклонений в полосах пропускания и подавления при применении конкретного окна с ростом числа коэффициентов фильтра [2].

Предлагаемый в данной работе новый метод синтеза КИХ-фильтров низких частот основан на замене идеальной характеристики (1) финитными бесконечно дифференцируемыми функциями – суммами S сдвигов атомарных функций (АФ) $\mathrm{h}_a(x)$ [3–6]. В случае $S = 1$ новая идеальная ЧХ имеет вид

$$H(j\omega) = \mathrm{h}_a(C\omega). \quad (2)$$

Параметр a в (2) позволяет задавать требуемые значения граничных частот фильтра. Вследствие бесконечной дифференцируемости функции $\mathrm{h}_a(x)$ ее коэффициенты Фурье быстро затухают. Эффективные КИХ-фильтры на основе (2) могут быть получены простым усечением импульсной характеристики прямоугольным окном. При этом отклонение приближенной ЧХ от идеальной (2) с ростом числа коэффициентов затухает быстрее, чем $1/N^r$, где N – число коэффициентов фильтра, r – любое положительное число [7].

1. АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ $\mathrm{h}_a(x)$ И РАЗЛОЖЕНИЕ КРАВЧЕНКО–КОТЕЛЬНИКОВА

Функция $\mathrm{h}_a(x)$ [3–6] определяется как финитное решение функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = \frac{a^2}{2}\left(y(ax+1) - y(ax-1)\right), \quad a > 1,$$

с условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)dx = 1.$$

Функция $\mathrm{h}_a(x)$ может быть представлена интегралом Фурье

$$\mathrm{h}_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_a(t)\exp(ixt)dt,$$

где $F_a(t)$ – спектр $\mathrm{h}_a(x)$,

$$F_a(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a^k}\right). \quad (3)$$

Носителем финитной функции $\mathrm{h}_a(x)$ является отрезок $\left[\frac{-1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right]$,

$$\mathrm{h}_a(x) \equiv 0, \quad |x| > 1/(a-1). \quad (4)$$

Атомарная функция $\mathrm{h}_a(x)$ при $a > 2$ на отрезке $\left[-\frac{a-2}{a(a-1)}, \frac{a-2}{a(a-1)}\right]$ равна константе

$$\mathrm{h}_a(x) \equiv \mathrm{const} = \frac{a}{2}, \quad |x| \le \frac{a-2}{a(a-1)}. \quad (5)$$

Функция $\mathrm{h}_a(x)$ – решение задачи о разложении единицы:

$$\frac{2}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{h}_a\left(x + \frac{2}{a}k\right) \equiv 1. \quad (6)$$

Свойства (4) и (5) позволяют использовать функции $F_a(t)$ и $\mathrm{h}_a(x)$ в качестве соответственно импульсной и частотной характеристик ФНЧ. Пусть функция $f(t)$ имеет финитный спектр $F(\omega)$, $\operatorname{supp} F(\omega) = [-\Omega, \Omega]$. Подвергнем $f(t)$ дискретизации с шагом

$$\Delta \le \frac{\pi}{\Omega}\frac{a-2}{a-1},$$

где $a > 2$. Полученный дискретный сигнал описывается выражением

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta)\delta(t - k\Delta). \quad (7)$$

Результатом воздействия на сигнал (7) фильтра с частотной характеристикой

$$\mathrm{h}_a\left(\frac{a-2}{\Omega a(a-1)}\omega\right)$$

является разложение функции $f(t)$ в ряд Кравченко–Котельникова [3–9]:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta)F_a\left(\frac{a\pi}{\Delta}(t - k\Delta)\right). \quad (8)$$

Ошибка усечения ряда (8) быстро затухает с ростом числа слагаемых усеченного ряда, причем наилучший результат обеспечивается при выборе параметра a близким к 2 [7]. При $a \to \infty$ ряд (8) совпадает с рядом Уиттекера–Котельникова–Шеннона (УКШ), погрешность усечения которого затухает со скоростью $1/N$.

2. КИХ-ФИЛЬТРЫ НИЖНИХ ЧАСТОТ НА ОСНОВЕ СПЕКТРОВ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ $\mathrm{h}_a(x)$

2.1. Построение КИХ-фильтров, удовлетворяющих заданным требованиям спецификации

Воспользуемся свойствами (3), (4) АФ $\mathrm{h}_a(x)$ и рассмотрим ее в качестве идеальной частотной характеристики ФНЧ. Построим фильтр, удовлетворяющий требованиям спецификации I:

Полоса пропускания $0 \le \omega \le \omega_0$.

Полоса подавления $\omega_1 \le \omega \le \pi$.

Отклонение в полосе пропускания и подавления δ.

Граничные частоты полос пропускания и подавления фильтра с частотной характеристикой вида $\mathrm{h}_a(C\omega)$ (C – произвольная постоянная) удовлетворяют соотношению

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{a-2}{a}.$$

Отсюда следует, что параметр a должен быть задан формулой

$$a = 2/(1 - \omega_0/\omega_1).$$

Преобразовывая аргумент функции $\mathrm{h}_a(\omega)$

$$\mathrm{h}_a\left(\omega_1\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_1 + \omega_0}\omega\right), \quad (9)$$

получим частотную характеристику, имеющую заданные спецификацией полосы пропускания и подавления. Коэффициенты импульсной характеристики соответствующего фильтра имеют вид

$$h(k) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi}F_a(k(a-1)\omega_1), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

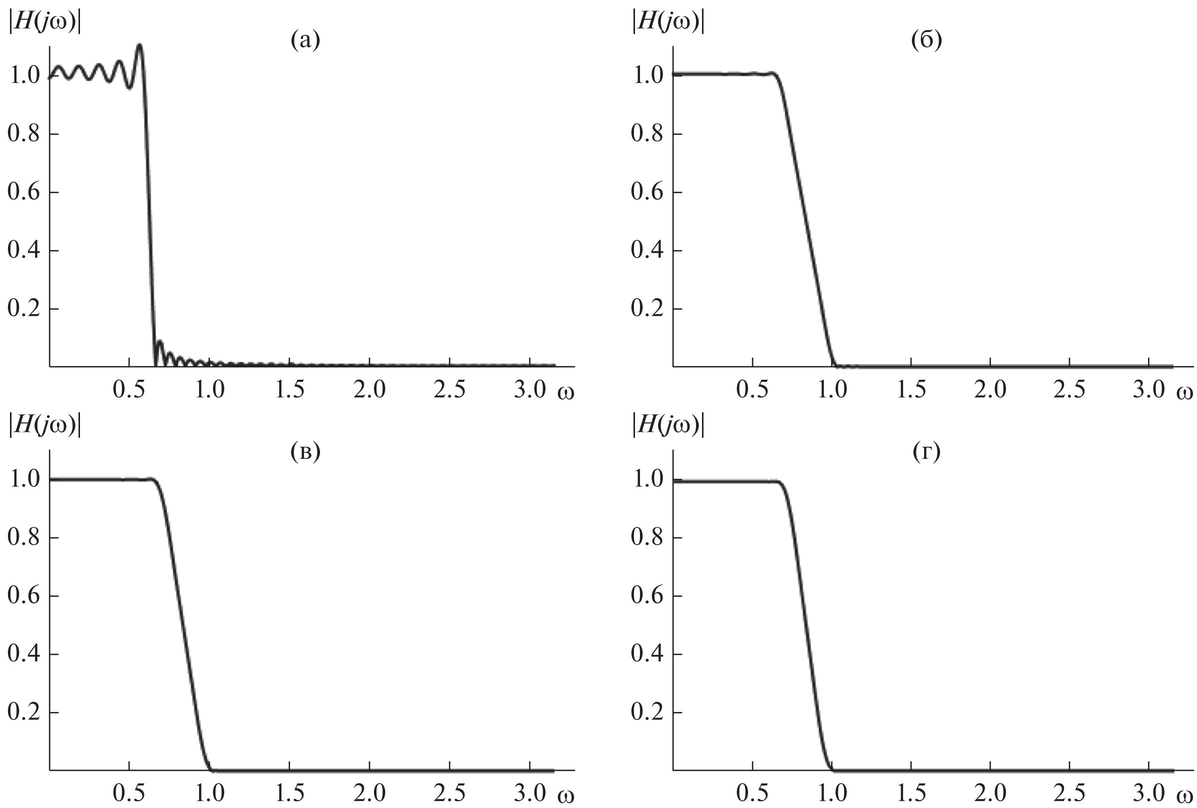

Рис. 1. Частотная характеристика фильтра с частотой среза $\omega_0 = \pi/5$, полученного усечением идеальной импульсной характеристики прямоугольным окном (а) при $N = 50$, и частотные характеристики фильтров, полученные при $\omega_0 = \pi/5$, $\omega_1 = \pi/3$, $N = 50$ по формулам (13) (б) и (23) для $S = 2$ (в) и $S = 3$ (г).

При реализации вычислительных методов с использованием АФ $\mathrm{h}_a(x)$ обычно используют аппроксимации

$$F_a(t) \approx P_K(a,t),$$

$$\mathrm{h}_a(x) \approx (a-1)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{M} P_K(a,(a-1)\pi k)\cos\left((a-1)\pi kx\right)\right),$$

где

$$P_K(a,t) = \prod_{k=1}^{K}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a^k}\right). \qquad (11)$$

Заменим в (10) функцию $F_a(t)$ конечным произведением (11) и получим

$$h(k) = \frac{\omega_1+\omega_0}{2\pi}P_K(a,k(a-1)\omega_1), \quad k\in\mathbb{Z}. \qquad (12)$$

Граничные частоты полос пропускания и подавления фильтра с ИХ (12) определяются следующим образом:

$$\tilde\omega_0 = \omega_0\left(1+\frac{a^{-K+1}}{a-2}\right), \quad \tilde\omega_1 = \omega_1\left(1-\frac{1}{a^K}\right).$$

Коэффициенты (12) затухают быстрее коэффициентов идеального ФНЧ. Данное свойство позволяет получить КИХ-фильтр с хорошими характеристиками путем усечения импульсной характеристики (12) прямоугольным окном (рис. 1а, 1б)

$$h(k) = \frac{\omega_1+\omega_0}{2\pi}P_K(a,k(a-1)\omega_1), \quad k = -N,\ldots,N. \qquad (13)$$

Отклонение δ ЧХ такого фильтра от идеальной (9) в полосах пропускания и подавления подчиняется неравенству

$$\delta \le \max_{\omega\in[0,\pi]}\left|\frac{\omega_1+\omega_0}{\pi}\sum_{k>N}^{+\infty}P_K(a,(a-1)\omega_1 k)\cos(k\omega)\right|.$$

Используя результаты [7], легко получить оценку величины δ

$$\delta \le \frac{\omega_1+\omega_0}{2\pi}a^{(\eta-1)\eta/2}(a-1)^{1-\eta}\times$$

$$\times\,\omega_1^{1-\eta}(N+1)^{2-\eta}\left(\frac{1}{\eta-2}+(N+1)^{-1}\right), \qquad (14)$$

где

$$\eta \equiv \eta(N) = \begin{cases} [\log_a(a(a-1)\omega_1(N+1))], & \log_a((a-1)\omega_1(N+1)) \notin \mathbb{N}, \\ \log_a((a-1)\omega_1(N+1)), & \log_a((a-1)\omega_1(N+1)) \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

При этом числа K и N, определяющие соответственно число сомножителей частичного произведения $P_K(a,t)$ в (13) и длину фильтра, должны удовлетворять условиям

$$K \geq \log_a\left(\frac{\omega_1+\omega_0}{2}(N+1)\right), \quad N > \frac{2a}{\omega_1+\omega_0} - 1.$$

2.2. Частотные характеристики на основе сумм сдвигов функций $\mathrm{h}_a(x)$

Отклонение (14) быстро стремится к нулю при уменьшении параметра a. Воспользуемся этим свойством для построения эффективных фильтров. Будем рассматривать функции вида

$$\mathrm{h}_{S,a}(x) = \frac{1}{S}\sum_{k=0}^{S/2}\left(\mathrm{h}_a\left(x + \frac{2k+1}{a}\right) + \mathrm{h}_a\left(x - \frac{2k+1}{a}\right)\right), \quad S = 2n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$\mathrm{h}_{S,a}(x) = \frac{1}{S}\sum_{k=-(S-1)/2}^{(S-1)/2}\mathrm{h}_a\left(x + \frac{2k}{a}\right), \quad S = 2n-1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

представляющие собой соответственно сумму четного и нечетного чисел сдвигов АФ $\mathrm{h}_a(x)$. Построенные функции бесконечно дифференцируемы и финитны:

$$\operatorname{supp}\mathrm{h}_{S,a}(x) = \left[-\frac{S(a-1)+1}{a(a-1)}, \frac{S(a-1)+1}{a(a-1)}\right]. \tag{17}$$

Суммы (15), (16) будут являться частотной характеристикой ФНЧ в случае, когда параметр a удовлетворяет неравенству

$$a > (S+1)/S. \tag{18}$$

Последнее неравенство позволяет уменьшить параметр a, не расширяя переходной полосы фильтра, и получить малые значения отклонений. При выполнении (18) имеет место свойство

$$\mathrm{h}_{S,a}(x) \equiv \frac{a}{2}, \quad |x| < \frac{S(a-1)-1}{a(a-1)}. \tag{19}$$

Спектр $H_{S,a}(\omega)$ функции $\mathrm{h}_{S,a}(x)$ задается выражением

$$H_{S,a}(\omega) = \frac{\sin(S\,\omega/a)}{S\sin(\omega/a)}F_a(\omega). \tag{20}$$

Функции $H_{S,a}(\omega)$ могут выступать в качестве базисных в обобщенном разложении УКШ. Формула восстановления сигнала $f(t)$ с финитным на отрезке $[-\Omega,\Omega]$ спектром

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta)H_{S,a}\left(\frac{a\pi}{S\Delta}(t-k\Delta)\right) \tag{21}$$

справедлива в случае, когда шаг Δ и параметр a удовлетворяют неравенствам

$$a > \frac{S+1}{S}, \quad 0 < \Delta \leq \frac{\pi}{\Omega}\frac{S(a-1)-1}{S(a-1)}.$$

Построим на основе функций $\mathrm{h}_{S,a}(x)$ цифровой КИХ-фильтр с заданными граничными частотами ω_0 и ω_1 полос пропускания и подавления. В соответствии с (17), (19) параметр a определяется выражением

$$a = \frac{(S-1)(1-\omega_0/\omega_1)+2}{S(1-\omega_0/\omega_1)}. \tag{22}$$

Заменяя бесконечное произведение $F_a(t)$ в формуле (20) конечным

$$H_{S,a}^*(t) = \frac{\sin(St/a)}{S\sin(t/a)}P_K(a,t)$$

и учитывая (19), получим коэффициенты импульсной характеристики искомого КИХ-фильтра

$$\frac{\omega_1+\omega_0}{2\pi}H_{S,a}^*\left(\frac{a(\omega_1+\omega_0)}{2S}k\right), \quad k = -N,\ldots,N. \tag{23}$$

Отклонение δ частотной характеристики в полосах пропускания и подавления можно оценить, используя неравенство

$$\delta \leq \frac{1}{\pi}a^{(\eta-1)(\eta-2)/2}(\omega_1+\omega_0)^{2-\eta}\left(\frac{N+1}{2S}\right)^{2-\eta} \times \left(\frac{1}{\eta-2} + (N+1)^{-1}\right), \tag{24}$$

где

$$\eta \equiv \eta(N) = \begin{cases} \left[\left[\log_a\left(a^2\frac{\omega_1+\omega_0}{2S}(N+1)\right)\right]\right], & \log_a\left(\frac{\omega_1+\omega_0}{2S}(N+1)\right) \notin \mathbb{N}, \\ \log_a\left(a\frac{\omega_1+\omega_0}{2S}(N+1)\right), & \log_a\left(\frac{\omega_1+\omega_0}{2S}(N+1)\right) \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

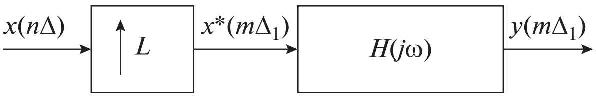

Рис. 2. Фильтр-интерполятор.

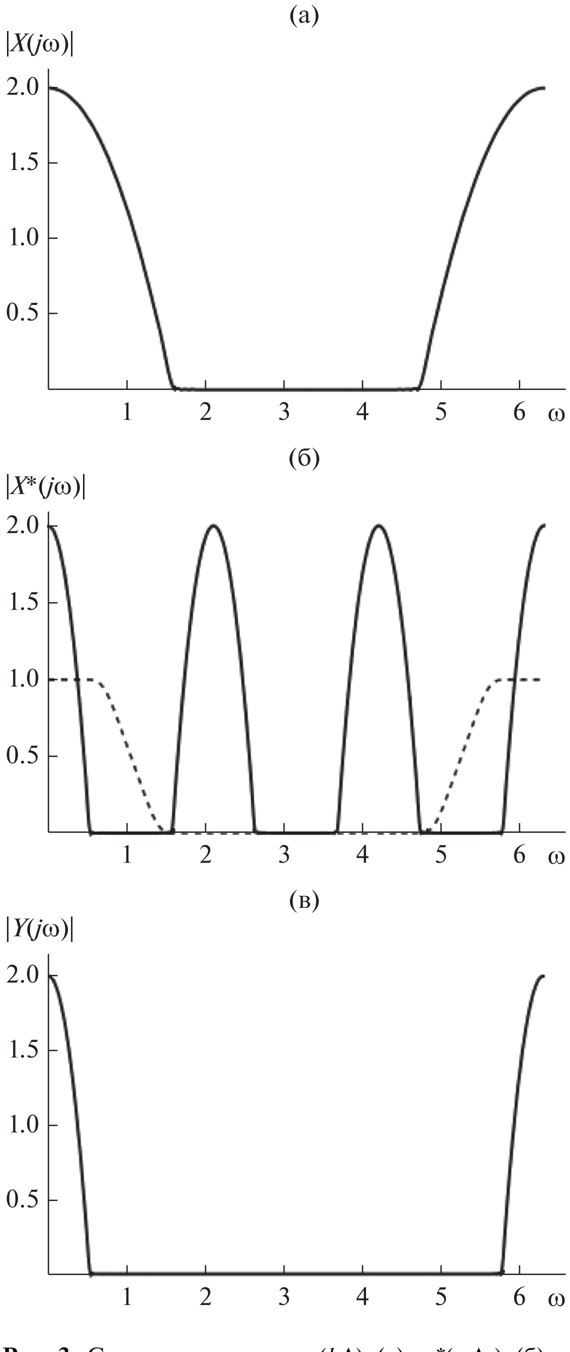

Рис. 3. Спектры сигналов: $x(k\Delta)$ (а), $x^*(m\Delta_1)$ (б) и $y(m\Delta_1)$ (в). Штриховой линией показана ЧХ (25).

На числа K и N налагаются следующие ограничения:

$$K \geq \log_a\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2S}(N+1)\right), \quad N > \frac{2aS}{\omega_1 + \omega_0} - 1.$$

Вследствие уменьшения параметра a с увеличением числа S оценка (24) для фильтра (23) затухает быстрее оценки (14):

S	Оценка (24)
1	5.06×10^{-4}
2	1.53×10^{-4}
3	6.9×10^{-5}
4	4.07×10^{-5}

при $\omega_0 = \pi/5$, $\omega_1 = \pi/2$, $N = 60$. Частотные характеристики КИХ-фильтров (23) представлены на рис. 1. Полученные ФНЧ легко могут быть преобразованы в фильтры верхних частот, а также режекторные и полосовые фильтры.

3. ФИЛЬТРАЦИЯ НИЖНИХ ЧАСТОТ В ДЕЦИМАТОРАХ И ИНТЕРПОЛЯТОРАХ ПРИ МНОГОСКОРОСТНОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Методы многоскоростной обработки сигналов (МОС) находят применение в радиотехнике, телекоммуникационных системах и биомедицине. Главные операции МОС – интерполяция и децимация – осуществляют соответственно увеличение или уменьшение частоты дискретизации преобразуемого сигнала. Возможность изменения частоты дискретизации сигналов в процессе обработки позволяет снизить требования к вычислительной производительности цифровых систем [2, 10].

3.1. Интерполяция

Рассмотрим ФНЧ (13), (23) в задаче интерполяции низкочастотных сигналов. Общая структурная схема фильтра-интерполятора приведена на рис. 2. Будем предполагать, что шаг дискретизации Δ исходного сигнала $x(n\Delta)$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta \leq \frac{\pi}{\Omega}\frac{S(a-1)-1}{S(a-1)}.$$

В этом случае спектр $X(j\omega)$ сигнала $x(n\Delta)$ не имеет частотных составляющих при $|\omega - \pi| < \dfrac{\pi}{S(a-1)}$ (рис. 3а). Сигнал подается на экспандер, добавляющий $L-1$ нулевых отсчетов между каждой парой отсчетов сигнала $x(n\Delta)$. Положим $\Delta_1 = \Delta/L$. Последовательность $x^*(m\Delta_1)$ на выходе экспандера определяется по формуле

$$x^*(m\Delta_1) = \begin{cases} x(n\Delta), & m = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, & \text{при других } m. \end{cases}$$

Ее спектр $X^*(j\omega)$ представляет собой сжатые в L раз копии спектра сигнала $x(n\Delta)$ (рис. 3б). Далее сигнал $x^*(m\Delta_1)$ проходит через ФНЧ, идеальная ЧХ которого имеет вид

$$H(j\omega) = \mathrm{h}_{S,a}\left(\frac{SL}{a\pi}\omega\right), \tag{25}$$

формирующий на выходе последовательность $y(m\Delta_1)$ с требуемой частотой дискретизации (рис. 3в). Во временной области отсчеты сигнала $y(m\Delta_1)$ представляют собой дискретную свертку

$$y(m\Delta_1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k\Delta_1) H_{S,a}\left(\frac{a\pi(m-k)}{LS}\right).$$

При практической реализации системы МОС наиболее часто используются фильтры с конечной импульсной характеристикой. Будем использовать КИХ-фильтр (23). Выходная последовательность $y(m\Delta_1)$ в этом случае вычисляется по формуле

$$y(m\Delta_1) = \sum_{k=-N}^{N} x^*(k\Delta_1) H^*_{S,a}\left(\frac{a\pi(m-k)}{LS}\right). \tag{26}$$

3.2. Децимация

Задача децимации цифрового сигнала $x(n\Delta)$ предполагает его прореживание в M раз. Структурная схема фильтра-дециматора представлена на рис. 4. Чтобы отбрасывание лишних отсчетов не приводило к неразличимости сигнала, входную последовательность $x(n\Delta)$ подвергают низкочастотной фильтрации. Полученный сигнал $y(n\Delta)$ подается на вход компрессора, удаляющего лишние отсчеты. Выходная последовательность $y(m\Delta_1)$ с шагом дискретизации $\Delta_1 = M\Delta$ в общем случае является сверткой вида

$$y(m\Delta_1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x((Mm-k)\Delta) h(k).$$

Цифровой ФНЧ дециматора должен удовлетворять требованиям спецификации II [2]:

Полоса пропускания $0 \le \omega \le \omega_p$.

Полоса подавления $\omega_s/(2M) \le \omega \le \omega_s/2$.

Неравномерность в полосе пропускания δ_p.

Неравномерность в полосе подавления δ_s.

Коэффициенты фильтра (23), имеющего указанные спецификацией II полосы пропускания и подавления, определяются формулой

$$h(k) = \frac{\omega_p + \omega_s/(2M)}{2\pi} H^*_{S,a}\left(\frac{a(\omega_p + \omega_s/(2M))}{2S} k\right),$$
$$k = -N, \ldots, N,$$

где

$$a = \frac{S-1}{S} + \frac{2}{S(1 + 2M\,\omega_p/\omega_s)}.$$

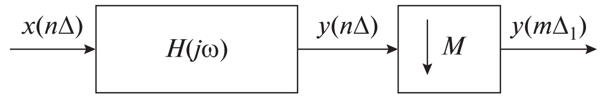

Рис. 4. Фильтр-дециматор.

Заданные значения отклонений δ_s и δ_p можно получить путем изменения длины фильтра, используя оценку (24).

3.3. Численный эксперимент

Рассмотрим применение фильтров на основе функций $F_a(t)$ в задаче повышения частоты дискретизации в L раз. Исходную последовательность $x(k\Delta)$ определим выражением

$$x(k\Delta) = \begin{cases} 4(\sin(k\Delta)/(k\Delta)^3 - \cos(k\Delta)/(k\Delta)^2), \\ |k| > 0, \\ 4/3, \quad k = 0. \end{cases}$$

Произведем интерполяцию с коэффициентом $L = 2,3,5$ последовательности $x(k\Delta)$ полифазным методом [9]. Будем рассматривать новые фильтры (13) (h_1) и (23) при $S = 2,3,4$ (h_2, h_3 h_4), оптимальный фильтр Чебышева (h_5), а также фильтры, полученные методом оконного взвешивания идеальной импульсной характеристики весовыми функциями Хэмминга (h_6), Блэкмана (h_7) и Кайзера (h_8) при $\beta = 8.96$ [1, 2]. В таблице 1 приведены величины абсолютной погрешности интерполяции $\varepsilon = \max_k |x(k\Delta_1) - y(k\Delta_1)|$. Погрешность интерполяции для новых фильтров при $S = 2,3$ на порядок ниже погрешности для фильтров $h_6,\ldots,h_8$ на основе окон. Наилучшие резуль-

Таблица 1. Абсолютная погрешность интерполяции $\varepsilon = \max_k |x(k\Delta_1) - y(k\Delta_1)|$ для фильтров $h_1,\ldots,h_8$ при $N = 20$, $L = 2,3,5$

Фильтры	L		
	2	3	5
h_1	1.66×10^{-5}	1.52×10^{-5}	1.64×10^{-5}
h_2	2.31×10^{-6}	3.15×10^{-6}	2.88×10^{-6}
h_3	9.69×10^{-7}	1.21×10^{-6}	1.18×10^{-6}
h_4	4.31×10^{-7}	5.22×10^{-7}	5.12×10^{-7}
h_5	1.73×10^{-7}	6.61×10^{-8}	7.75×10^{-7}
h_6	9.05×10^{-4}	7.93×10^{-4}	8.66×10^{-4}
h_7	7.62×10^{-6}	6.43×10^{-6}	7.25×10^{-6}
h_8	8.02×10^{-6}	1.01×10^{-5}	9.63×10^{-6}

таты получены при применении фильтров (23) с $S = 4$ и оптимальных фильтров Чебышева.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые рассмотрены цифровые фильтры низких частот на основе функций $F_a(t)$. Частотные характеристики новых фильтров аппроксимируют атомарные функции. Предложенный метод синтеза отличается простотой и эффективностью. Коэффициенты определяются в явном виде без применения численных методов. Приведенные в работе оценки отклонений позволяют синтезировать фильтр с любой заданной точностью. Рассмотрено применение построенных фильтров в задачах децимации и интерполяции цифровых сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гадзиковский В.И.* Методы проектирования цифровых фильтров. М.: Горячая линия—Телеком, 2007.
2. *Айфичер Э.С., Джервис Б.У.* Цифровая обработка сигналов. М.: ИД “Вильямс”, 2008.
3. *Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В.* Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами / Под ред. Кравченко В.Ф. М.: Техносфера, 2018.
4. *Кравченко В.Ф., Кравченко О.В.* Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в физике и технике / Под ред. Кравченко В.Ф. М.: Техносфера, 2018.
5. *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
6. *Кравченко В.Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника, 2003.
7. *Будунова К.А., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 9. С. 935.
8. *Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Басараб М.А.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 4. С. 461.
9. *Кравченко В.Ф., Юрин А.В.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 9. С. 971.
10. *Витязев В.В.* Многоскоростная обработка сигналов. М.: Горячая линия—Телеком, 2018.