

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 519.63:621.37

**ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОНОРМИРОВАННОГО БАЗИСА
НА ОСНОВЕ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО
К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ
ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

© 2019 г. В. Ф. Кравченко^{1, 2, 3, *}, В. И. Пустовойт², А. В. Юрин^{3, **}¹Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация²Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН,
ул. Бутлерова, 15, Москва, 117342 Российская Федерация³Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005 Российская Федерация

*E-mail: kvf_ok@mail.ru

**E-mail: yualex@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.03.2019 г.

После доработки 15.03.2019 г.

Принята к публикации 17.04.2019 г.

Предложена и обоснована методика ортонормирования атомарных функций. Показана эффективность применения полученной базисной системы для решения ряда краевых задач электродинамики методом R -функций. Численный эксперимент и анализ физических результатов показал, что метод R -функций в сочетании с базисными функциями является универсальным для волноводов и резонаторов произвольной формы.

DOI: 10.1134/S0033849419110147

Известно, что выбор базисной системы функций существенно влияет на качество решения краевых задач математической физики [1–4], так как от этого зависит обусловленность и другие характеристики матриц системы. Кроме того, элементы этих матриц являются интегралами или суммами с большим числом слагаемых по области Ω . Указанные трудности удается в значительной мере преодолеть, если в качестве базисных функций использовать атомарные функции (АФ) [1–3], которые являются удобным математическим аппаратом аппроксимации для широкого класса задач численного анализа, в том числе краевых задач электродинамики [1–3, 5, 6]. Они представляют собой финитные решения функционально-дифференциальных уравнений вида

$$Lf(x) = \lambda \sum_{k=1}^M c(k) f(ax - b(k)), \quad |a| > 1, \quad (1)$$

где L – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Среди АФ [1–3] выделим функции $up(x)$ и $fup_N(x)$, аппроксимационные свойства которых хорошо изучены. Сдвиги АФ образуют неортонормальный базис. Это обстоятельство приводит к тому, что при численной реализации на основе

АФ вариационных алгоритмов, полученные матрицы системы имеют n -блочную диагональную структуру (n зависит от конкретного выбора АФ), поэтому затраты машинного времени на вычисление элементов этих матриц достаточно велики. Для снижения времени численной реализации необходимо, чтобы было как можно меньше ненулевых элементов. Использование ортонормированного базиса позволяет существенно сократить число ненулевых элементов матриц системы. В связи с этим проведем ортонормирование АФ. Известно [7, 8], что целые сдвиги функции $\{\varphi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset H$ являются базисом Рисса, если существуют положительные постоянные A_1 и A_2 такие, что справедливо неравенство

$$A_1 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq A_2. \quad (2)$$

Согласно [7] система $\{\varphi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис Рисса тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1. \quad (3)$$

Для систем целых сдвигов АФ $\{up(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и $\{fup_N(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ соотношение (2) выполняется. Следовательно, они образуют базис Рисса, но не ортонормированный. Однако из системы АФ можно получить ортонормированный базис [1, 7, 8], если определить новую функцию

$$\hat{\varphi}^*(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) / \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2},$$

для которой выполняется условие (3). Отсюда следует, что сдвиги $\varphi^*(x) = F^{-1}[\hat{\varphi}^*(\omega)]$ порождают ортонормированный базис. Кроме того, $\varphi^*(x) = \sum_n c_n \varphi(x-n)$ – функция $\varphi^*(x)$ раскладывается в ряд по исходному базису $\varphi(\omega)$ [7]. Тогда поставленная задача сводится к нахождению коэффициентов разложения c_n . Рассмотрим АФ $up(x)$. Ее преобразование Фурье имеет следующий вид [1–3]:

$$\widehat{up}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{-k}\omega)}{2^{-k}\omega}. \quad (4)$$

Сумму $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{up}(\omega + 2\pi k)|^2$ находим путем разложения в ряд Фурье. Коэффициенты Фурье определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\omega n) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{up}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega n) |\widehat{up}(\omega)|^2 d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} up(x-n) \overline{up(x)} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как функция $up(x)$ финитная, то из (5) получим следующие значения коэффициентов c_n : $c_{-1} = 0.096$,

$c_0 = 0.809$, $c_1 = 0.096$. Тогда сумма в (3) для $up(x)$ принимает следующий вид:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{up}(\omega + 2\pi k)|^2 = 0.809 + 0.191 \cos \omega. \quad (6)$$

Таким образом, получим

$$\widehat{up}^*(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{-k}\omega)}{2^{-k}\omega} / (0.809 + 0.191 \cos \omega). \quad (7)$$

Ортонормированный базис, составленный из целых сдвигов функции $up^*(x)$, находится обратным преобразованием Фурье $\widehat{up}^*(\omega)$ в (7)

$$up^*(x) = F^{-1}[\widehat{up}^*(\omega)].$$

Функция $up^*(x)$ имеет некомпактный носитель. Поэтому для практического применения определим эффективный носитель из условия $\|\varphi - \varphi_{\text{эф}}\| \leq 10^{-5}$. Тогда $\text{supp}(up^*(x))_{\text{эф}} = [-2, 2]$.

Согласно предложенному подходу ортонормированная система $\{fup_1^*(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ определяется так

$$\begin{aligned} \widehat{fup_1^*}(\omega) &= \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \times \\ &\times \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{-k}\omega)}{2^{-k}\omega} / (0.621 + 0.376 \cos \omega + 0.003 \cos 2\omega), \end{aligned} \quad (8)$$

$$fup_1^*(x) = F^{-1}[\widehat{fup_1^*}(\omega)]. \quad (9)$$

Вид функции $fup_1^*(x)$ представлен на рис. 1а, а численная проверка ортонормированности системы $\{fup_1^*(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ представлена на рис. 1б, 1в.

Для $fup_2^*(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{fup_2^*}(\omega) &= \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^2 \times \\ &\times \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{-k}\omega)}{2^{-k}\omega} / (0.524 + 0.450 \cos \omega + 0.026 \cos 2\omega + 3 \times 10^{-5} \cos 3\omega), \end{aligned} \quad (10)$$

$$fup_2^*(x) = F^{-1}[\widehat{fup_2^*}(\omega)].$$

Рассмотрим применение базисной системы АФ для решения краевой задачи на собственные значения [1–4]

$$\Delta u + \alpha^2 u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2 \quad (11)$$

применительно к расчету критических длин волн $\lambda_c = 2\pi/\alpha$ для однородной волноводной структуры сложной формы поперечного сечения Ω (рис. 2) с условиями Дирихле [1] на границе $\partial\Omega$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (12)$$

Этот класс задач эффективно решается с помощью структурного метода R -функций [1, 2, 6]. Для краевого условия (12) структура решения имеет вид

$$u(x, y) = \omega(x, y) \sum_i c_i \varphi_i(x, y). \quad (13)$$

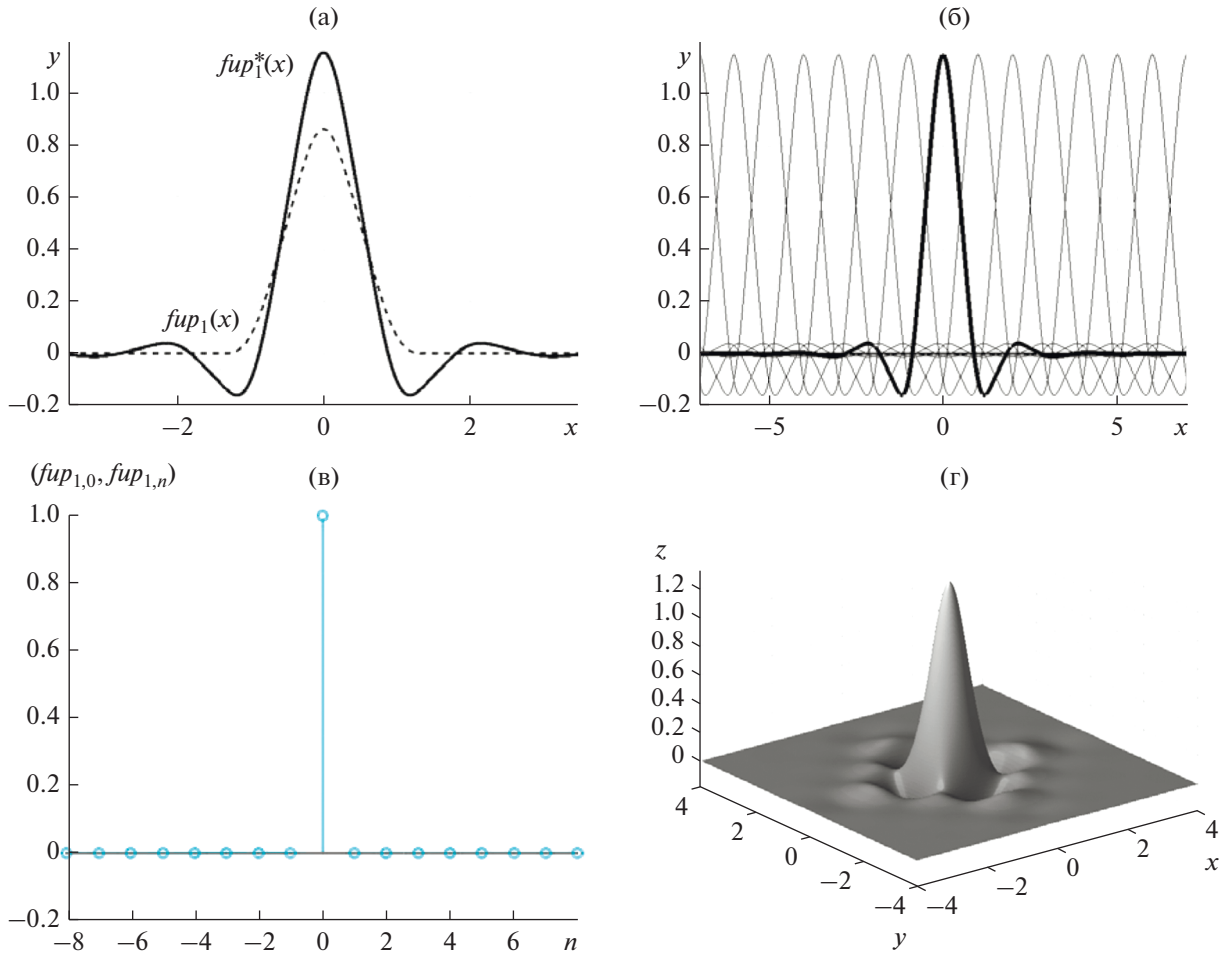


Рис. 1. Графики функций $fup_1(x)$ и $fup_1^*(x)$ (а), сдвигов функции $fup_{1,n}^*(x) = fup_1^*(x - n)$ (б), значений скалярного произведения $(fup_{1,0}, fup_{1,n})$ (в) и функции $fup_1^*(x, y) = fup_1^*(x)fup_1^*(y)$ (г).

Здесь $\omega(x, y)$ -функция обладает свойствами, изложенными в [1, 2]

$$\begin{aligned} \omega &= [-(\omega_1 \wedge \omega_3)] \wedge \omega_4, \quad \omega|_{\partial\Omega} = 0, \\ \omega(x, y) &> 0 \text{ внутри } \Omega, \quad \omega(x, y) < 0 \text{ вне } \Omega, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\left[\left(\frac{(2x + b - c)^2 - (b - 3c)^2}{4(b - 3c)} \right) \wedge \left(\frac{(2x - b + c)^2 - (b - 3c)^2}{4(b - 3c)} \right) \right], \\ \omega_2 &= \left(\frac{(a^2 - y^2)}{2a} \right) \wedge \left(\frac{(b^2 - x^2)}{2b} \right), \quad \omega_3 = y - (d - a). \end{aligned}$$

Двумерный ортонормированный базис образуется с помощью тензорного произведения функций $fup_1^*(x, y)$ (см. рис. 1г). Сдвиги базисных функций $\text{supp}[fup_1^*(x, y)] \cap \Omega \neq 0$ показаны на рис. 3а.

Структура (13) в сочетании с методом Галерки-на приводит к следующей обобщенной задаче на собственные значения относительно компонент неизвестного вектора C

$$AC = \alpha^2 BC. \tag{15}$$

Матрицы A и B будут разреженными с ненулевыми элементами, которые определяются так

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla(\omega fup_{1,i}^*) \nabla(\omega fup_{1,j}^*) dx dy, \\ b_{ij} &= \int_{\Omega} \omega^2 fup_{1,i}^* fup_{1,j}^* dx dy. \end{aligned} \tag{16}$$

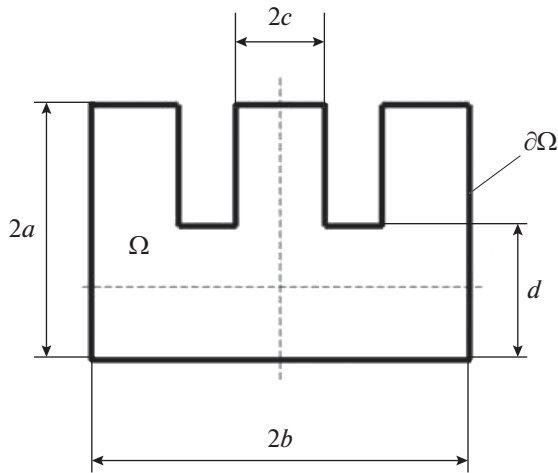


Рис. 2. Поперечное сечение Ш-образного волновода.

Матрицы системы имеют блочно-диагональный вид (рис. 3б). Следовательно, большую часть коэффициентов матриц вычислять не требуется.

Решение обобщенной алгебраической проблемы собственных значений (15) осуществляется методами линейной алгебры. Полученные собственные значения являются приближениями к точным значениям сверху $\alpha_i^{(N)} \geq \alpha_i$. Соответствующие линейно независимые собственные функции имеют вид

$$u_p^{(N)} = \sum_{i=0}^N c_i^{(p)} \varphi_i, \quad p = \overline{0, N}. \quad (17)$$

Расчетные характеристики определяли для следующих параметров: $a/c = 4$, $b/c = 7$, $d/c = 5$, $c = 6 \times 10^{-3}$ м. Учет особенностей в угловых точках осуществлялся с помощью почти R-функций [1, 2] системы R_α^ε . Численный эксперимент про-

водился с использованием различных систем базисных функций. Полученные параметры сравнивали с результатами расчетов методом конечных элементов (МКЭ). Значение критической длины волны λ_1 , а также оценка погрешностей приближенных решений

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \|u_{N_2} - u_{N_1}\|_{L_2(\Omega)} / \|u_{N_2}\|_{L_2(\Omega)}, \\ \varepsilon_2 &= \|u_{\text{МКЭ}} - u_{N_2}\|_{L_2(\Omega)} / \|u_{\text{МКЭ}}\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (18)$$

представлены в таблице 1. Вид первых трех собственных функций изображен на рис. 4.

Из данных таблицы следует, что применение новой базисной системы функций в сочетании с теорией R-функций позволяет получить высокую точность результатов.

Основываясь на результатах, приведенных выше, рассмотрим применение методов обобщенных собственных колебаний и R-функций на примере задачи дифракции в H-образном резонаторе со скошенными краями [1, 2, 5] и диэлектрической вставкой: $b = 2a$, $L = 3a$, $l/L = 0.2$, $\varepsilon = 4.33$, $f = 1$, $k = 2^{0.5}/a \times 10^3$ Гц, $a = 7.62 \times 10^{-3}$ м (рис. 5а).

Внутри диэлектрика $\Omega^+ \subset \Omega$ решение U удовлетворяет уравнению [1, 9]

$$\Delta U + k^2 \varepsilon U = f, \quad (19)$$

а в области $\Omega^- = \Omega/\Omega^+$

$$\Delta U + k^2 U = f. \quad (20)$$

На границе диэлектрика должны выполняться условия сопряжения

$$U^+ - U^-|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad \left(\frac{\partial U^+}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial U^-}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{\partial\Omega^+} = 0. \quad (21)$$

На краях резонатора $\partial\Omega$ заданы граничные условия

$$U|_{\partial\Omega} = 0. \quad (22)$$

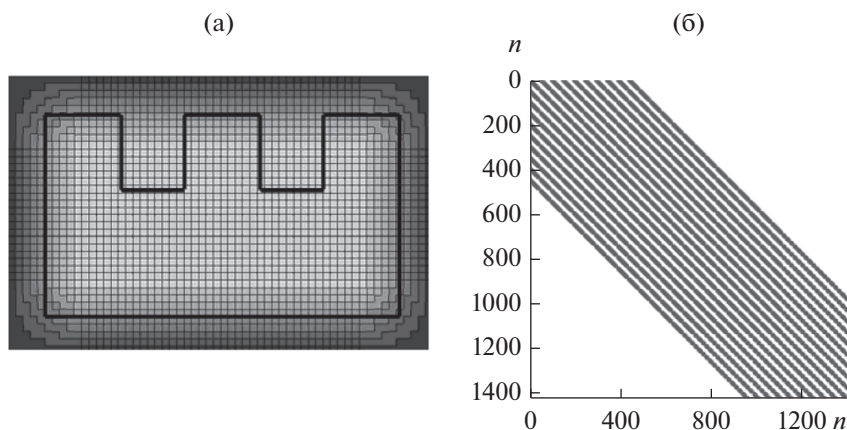


Рис. 3. Сдвиги базисных функций $\text{supp}(fup_1^*) \cap \Omega \neq \emptyset$ (а); ненулевые элементы матрицы A (б).

Таблица 1. Расчетные данные

Базисные функции	$\lambda_1, \text{мм}$	$\varepsilon_1 \times 10^{-5}$	$\varepsilon_2 \times 10^{-3}$
Метод <i>R</i> -функций			
Глобальные, $N_1 = 21, N_2 = 36$			
cos	58.391	3	3.3
X^n	58.045	3	7.5
L	58.611	5	4.8
T	58.492	8	6.1
Финитные, $N_1 = 390, N_2 = 448$			
fup_1	59.480	9	3.1
fup_1^*	59.559	6	5.3
МКЭ			
$N_{\text{КЭ}} = 497$	59.556	–	–

Нормализованная функция $\omega(x, y)$ области Ω (см. рис. 5б) определяется так

$$\omega = [(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge (\omega_3 \wedge \omega_4)] \wedge (-\omega_5 \vee \omega_6), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{bL - Lx - (b-a)y}{\sqrt{L^2 + (b-a)^2}}, & \omega_2 &= \frac{bL - Lx + (b-a)y}{\sqrt{L^2 + (b-a)^2}}, \\ \omega_3 &= \frac{bL + Lx - (b-a)y}{\sqrt{L^2 + (b-a)^2}}, & \omega_4 &= \frac{bL + Lx + (b-a)y}{\sqrt{L^2 + (b-a)^2}}, \\ \omega_5 &= (x^2 - a^2)/2a, & \omega_6 &= (l^2 - y^2)/2l. \end{aligned}$$

Решение будем искать ε -методом [9] в виде ряда

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n, \quad (24)$$

где U^0 – поле, удовлетворяющее во всем резонаторе уравнению

$$\Delta U^0 + k^2 U^0 = f \quad (25)$$

с краевыми условиями (22). Решение (25) имеет вид

$$U^0 = \sum_n B_n v_n,$$

где

$$B_n = \frac{1}{k^2 - k_n^2} \left(\int_{\Omega} f v_n d\sigma / \int_{\Omega} v_n^2 d\sigma \right), \quad (26)$$

а v_n и k_n – собственные функции и собственные значения однородной задачи Дирихле

$$\Delta v_n + k_n^2 v_n = 0, \quad v_n|_{\partial\Omega} = 0. \quad (27)$$

Решение (27) ищем в виде структуры (13) [1, 2].

В (24) u_n являются собственными функциями вспомогательной однородной задачи в областях Ω^+ и Ω^- соответственно

$$\Delta u_n + k^2 \varepsilon_n u_n = 0, \quad (28)$$

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0 \quad (29)$$

с условиями сопряжения

$$u_n^+ - u_n^-|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_n^+}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u_n^-}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{\partial\Omega^+} = 0 \quad (30)$$

и краевыми условиями (22). Собственными значениями последней задачи являются числа ε_n [9]. Эта задача описывает собственное колебание (поле без источников), происходящее в системе резонатор-диэлектрическое тело. Для определения ε_n минимизируем функционал вида

$$L(u) = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\sigma - k^2 \int_{\Omega^-} u^2 d\sigma - k^2 \varepsilon \int_{\Omega^+} u^2 d\sigma. \quad (31)$$

Подставив в (31) структуру Дирихле (13), путем минимизации функционала методом Ритца решим обобщенную задачу на собственные значения

$$\sum_m a_{ml} C_m^{(n)} = \varepsilon_n \sum_m b_{ml} C_m^{(n)}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ml} &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_l d\sigma - k^2 \int_{\Omega^-} \varphi_m \varphi_l d\sigma, \\ b_{ml} &= k^2 \int_{\Omega^+} \varphi_m \varphi_l d\sigma. \end{aligned} \quad (33)$$

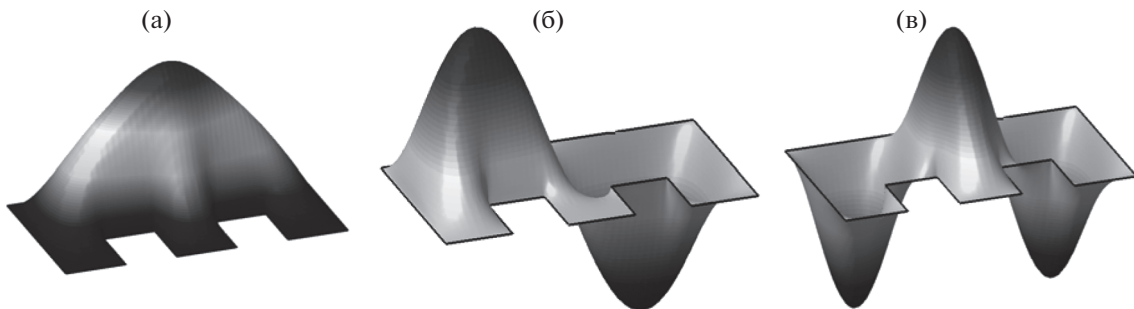


Рис. 4. Собственные функции $u_p^{(N)}(x, y)$ (колебания E_{nm}) при $p = 1$ (а), $p = 2$ (б) и $p = 3$ (в).

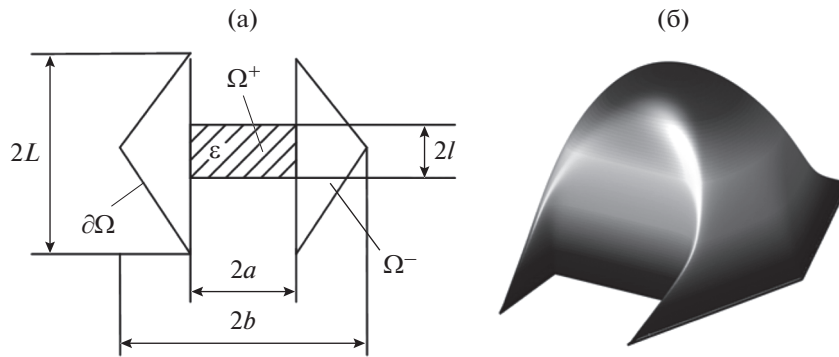


Рис. 5. Плоский резонатор сложной формы (а); аксонометрическая проекция $\omega(x, y)$ (б).

Коэффициенты A_n из (24) определим по формуле

$$A_n = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_n} \frac{1 - \varepsilon}{k^2(1 - \varepsilon_n)} \left(\int_{\Omega} u_n f d\sigma / \int_{\Omega^+} u_n^2 d\sigma \right). \quad (34)$$

Сходимость метода Ритца определялась численно путем сравнения результатов полученных для различного числа базисных функций

$$\|u_{N_2} - u_{N_1}\|_{L_2(\Omega)} = 0.004.$$

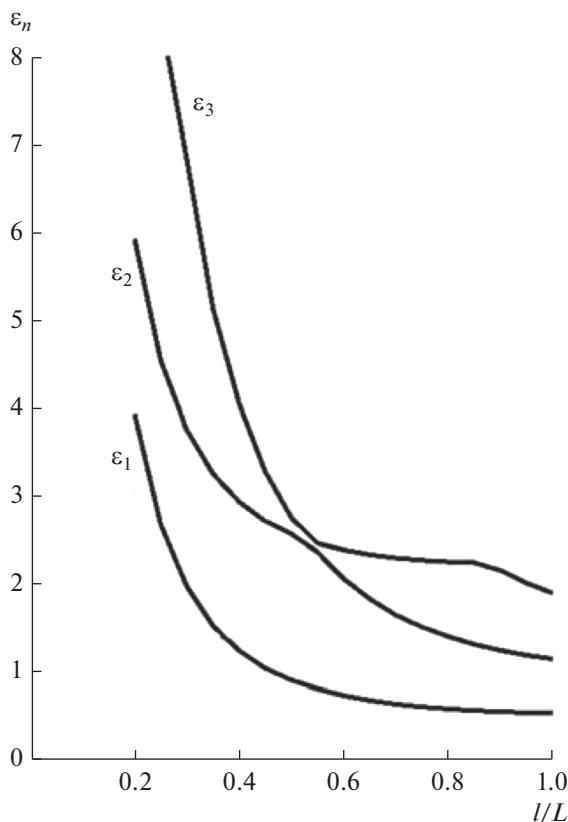


Рис. 6. Зависимость собственных значений ε_n от геометрии резонатора.

На рис. 6 показана зависимость первых трех собственных значений ε_n от относительной ширины диэлектрической вставки l/L .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численный эксперимент и анализ физических результатов показал, что метод R-функций в сочетании с базисными функциями является универсальным для волноводов и резонаторов произвольной формы. Таким образом, предложенная и обоснованная методика может быть распространена на широкий класс краевых задач электродинамики.

Работа посвящается 100-летию со дня рождения выдающегося ученого Бориса Захаровича Каценеленбаума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: Техносфера, 2018.
2. Кравченко В.Ф., Рвачёв В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006.
3. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника, 2003.
4. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
5. Kravchenko V.F., Yurin A.V. // Proc. 3rd Conf. on Mathematical Modeling of Wave Phenomena, 20th Nordic Conf. on Radio Science and Communication. Vaxjo, Sweden. 13–19 June 2008. P. 18.
6. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И., Чуриков Д.В., Юрин А.В. // РЭ. 2015. Т. 60. № 11. С. 1113.
7. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.
8. Battle G.A. // Comm. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 601.
9. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний. М.: Наука, 1977.