

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.86

КРАЕВЫЕ КАТАСТРОФЫ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

© 2019 г. А. С. Крюковский¹, *, Д. С. Лукин¹

¹Российский новый университет,
ул. Радио, 22, Москва, 105005 Российская Федерация

*E-mail: kryukovsky56@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.06.2019 г.

После доработки 18.06.2019 г.

Принята к публикации 25.06.2019 г.

Рассмотрено применение теории краевых волновых катастроф к асимптотическому решению задач дифракции на телах с криволинейными кромками. В качестве примера изучена дифракция сходящейся скалярной волны на криволинейном идеально проводящем экране в однородной среде, приводящая к формированию краевых катастроф C_4 и $K_4, 2$.

DOI: 10.1134/S0033849419110160

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач дифракции монохроматических волн в электродинамике и акустике применяются различные математические методы — как точные: разделение переменных, интегрирование в плоскости комплексной переменной, метод собственных колебаний, так и приближенные: вариационные, низкочастотная и высокочастотная асимптотики [1]. Данная работа посвящена вопросам применения волновой теории катастроф для асимптотического решения задач дифракции. Волновая теория катастроф позволяет описывать волновые процессы, в которых происходит фокусировка каустического типа и классифицировать структурно устойчивые типы таких фокусировок. Каустическая фокусировка возникает как при дифракции и распространении электромагнитных волн в регулярных средах [2, 3], так при распространении излучения в метаматериалах и нелинейных средах [4, 5].

На плоскости помимо гладкой каустики (A_2) устойчивой является двухпараметрическая особенность типа “клюв” (A_3) [2]. В трехмерном пространстве это одномерная фокусировка (катастрофа коранга один) “ласточкин хвост” (A_4) и двумерные фокусировки (катастрофы коранга два) — гиперболическая (D_4^+) и эллиптическая омбилики (D_4^-). Размерность пространства, в котором катастрофа устойчива, называется коразмерностью катастрофы. Поэтому особенности A_4, D_4^+ , D_4^- — это катастрофы коразмерности три. В четырехмерном пространстве к ним в качестве структурно-устойчивых особенностей добавляются ка-

тастрофы A_5 — “бабочка” и D_5 — параболическая омбилика. Обычно катастрофы образуют классы, обозначаемые буквами. Класс A это каспидные катастрофы, а класс D — омбилические [3, 6]. Индекс у символа катастрофы называется кратностью и показывает, сколько лучей сливаются в особой точке. Очевидно, что чем выше кратность, т.е. чем больше лучей сливаются в особой точке, тем сильнее фокусировка.

Согласно теории катастроф фазовая функция в окрестности особенности может быть представлена в виде универсальной деформации — суммы отрезков полиномов: нормальной формы и возмущений. Число возмущений равно размерности пространства, в котором катастрофа устойчива, т.е. коразмерности. Однако существует еще один параметр, который может присутствовать в самой нормальной форме. Это функциональный модуль. Его непрерывное изменение в определенных пределах не влияет на тип особенности. Самая простая модальная катастрофа без ограничений — это особенность P_8 , структурно-устойчивая в шестимерном пространстве. Она описывает трехмерную фокусировку и содержит один функциональный модуль. Особенности, не содержащие функциональные модули, называются простыми, а содержащие один функциональный модуль — унимодальными, два — бимодальными и т.д. Самая простая унимодальная катастрофа, которая описывает двумерную фокусировку это особенность X_9 . Она структурно устойчива в семимерном пространстве. Все катастрофы, описывающие одномерную фокусировку, являются простыми.

Следует отметить, что, хотя вероятность появления особенности более высокой размерности в пространстве меньшей размерности крайне мала, сечения такой особенности появляются очень часто и требуют адекватного математического описания [7, 8].

1. ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ КРАЕВЫХ КАТАСТРОФ

Обобщением волновой теории катастроф является волновая теория краевых катастроф, в рамках которой рассматриваются совместные фокусировки не только первичных лучевых семейств, но и вторичных лучевых семейств, порожденных первичными лучами на кромках. Такие сложные фокусировки возникают в задачах дифракции электромагнитных волн на проводящих телах с острыми кромками, а также при распространении радиоимпульсов в диспергирующих средах (например, в холодной плазме – ионосфере Земли). В первом случае источниками вторичных краевых лучей являются кромки тел, а во втором – конец или начало радиоимпульса. Простейшими краевыми катастрофами [6, 9] являются две каспоидные серии B_{N+1} и C_{N+1} . Серия B соответствует случаю, когда фокусируется только первичное поле, образуя каспоидную катастрофу серии A_N . При этом первичное лучевое семейство имеет ограничение, а каустика (огибающая) этого семейства точку обрыва. Краевые лучи в этом случае не фокусируются (что обозначается как A_1). Серия C соответствует случаю, когда, наоборот, фокусируются только краевые лучи и образованное ими поле (каспоидная катастрофа серии A_N), а первичное лучевое не формирует каустики, но имеется граница свет–тень (обозначается как A_1). Самая известная краевая катастрофа – это особенность B_2 или C_2 , что одно и то же, поскольку в данном случае фокусировки отсутствуют и имеет место лишь граница свет–тень. Такой случай соответствует дифракции Френеля.

Первая простейшая краевая катастрофа, которая описывает фокусировку как первичного, так и вторичного лучевых семейств – это особенность F_4 . Оба лучевых семейства образуют каустику A_2 , причем для первичного лучевого семейства каустика имеет обрыв. Особенность F_4 простая. Она структурно-устойчива в трехмерном пространстве. Учитывая изложенное выше, всякую краевую катастрофу можно записать как разложение по основным катастрофам. Например, особенность B_{N+1} это (A_N, A_1) , особенность $C_{N+1} = (A_1, A_N)$, а $F_4 = (A_2, A_2)$. Символы у индексов, стоящих в разложении, это кратности особенностей первичного и вторичного лучевых семейств и для особенностей, рассмотренных выше, их сумма равна индексу символа катастрофы [6, 9, 10].

Для применения теории катастроф к задачам дифракции и распространения волн необходимо в зависимости от типа особенности выбрать вид асимптотического решения (равномерную асимптотику), рассчитать специальные функции волновых катастроф (СВК) [3, 11] и установить связь между параметрами универсальной деформации и реальными параметрами физической задачи. Метод седловых точек, теоретически наиболее универсальный, имеет ограниченное применение [9], поскольку требует решения задачи “пристрелки”, сложной в вычислительном отношении. В работе на конкретном примере нами развивается метод локальной асимптотики, являющийся альтернативным методу седловых точек [12–14].

2. ДИФРАКЦИЯ СКАЛЯРНОЙ ВОЛНЫ НА ПРОВОДЯЩЕМ ЭКРАНЕ С ГЛАДКОЙ КРОМКОЙ

В качестве задачи, на примере которой проиллюстрируем применение теории краевых катастроф, рассмотрим дифракцию скалярной волны на идеально проводящем экране в однородной среде [15]. Предполагается, что волна падает на экран из области $X < 0$, а уравнение границы экрана имеет вид

$$\tilde{\eta}_1 = f(\tilde{\eta}_2), \quad f \in \mathbb{R}^\infty. \quad (1)$$

Равномерное асимптотическое решение в области $X > 0$ можно представить в виде интеграла Грина–Кирхгофа [16]:

$$U(\Lambda; \vec{\alpha}) = U(k, Z, Y, X) \cong \frac{k}{2\pi} \exp(-i\pi/2) \times \\ \times \iint_{\vec{G}} C(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, Z, Y, X) \frac{A(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{R} \times \\ \times \exp(ik(R + \Psi)) d\tilde{\eta}_1 d\tilde{\eta}_2, \quad (2)$$

в котором

$$U_0(k; \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) = A(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \exp(ik\Psi) \quad (3)$$

– поле падающей волны в плоскости экрана, $\vec{G} \in \tilde{\eta}_1 0 \tilde{\eta}_2$ – поверхность экрана, $\vec{G} = R^2/G$, $k = \omega/c$ – волновое число,

$$R = ((Z - \tilde{\eta}_2)^2 + (Y - \tilde{\eta}_1)^2 + X^2)^{1/2}, \quad (4)$$

c – скорость света, ω – круговая частота, а C – диаграмма гюйгенсовых источников излучения. Сделаем в (2) замену переменных:

$$\tilde{\eta}_2 = \eta_2; \quad \tilde{\eta}_1 = \eta_1 + f(\eta_2). \quad (5)$$

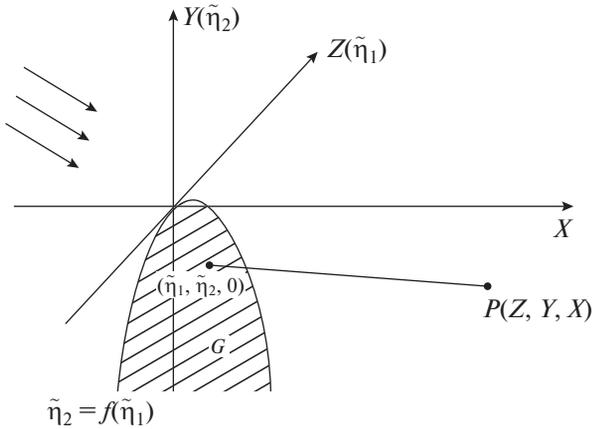


Рис. 1. Дифракция волны на проводящем экране. Геометрия задачи.

Теперь вместо (1) уравнение границы имеет вид: $\eta_1 = 0$, а фазовую функцию интеграла (2) можно записать как

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, Z, Y, X) = R + \Psi = \left((Z - \eta_2)^2 + (Y - \eta_1 - f(\eta_2))^2 + X^2 \right)^{1/2} + \Psi(\eta_1, \eta_2). \tag{6}$$

Фазовая функция Φ порождает два лучевых семейства (рис. 1): семейство геометрооптических (ГО) лучей, определенное равенствами:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= R^{-1}(\eta_1 + f - Y); \\ \Psi_2 &= R^{-1}(\eta_2 - Z + f_2(f - Y)); \end{aligned} \tag{7}$$

и семейство краевых лучей, для которого

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_1=0} &= \\ = R^{-1}(\eta_2 - Z + f_2(f - Y)) + \Psi_2 \Big|_{\eta_1=0} &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\Psi_j = \partial \Psi / \partial \eta_j$; $f_j = \partial f / \partial \eta_j$.

Так как семейство краевых лучей (8) однопараметрическое, то все его каустические особенности принадлежат каспоидной серии A_N . Пусть, например, $\Psi = \eta_1 \phi(\eta_1, \eta_2)$, где ϕ – аналитическая функция. Тогда (1) уравнение волнового фронта краевых лучей. Поэтому для семейства краевых лучей справедливы те же результаты, что и для ГО-лучей в двумерном случае [16]. Если ГО-поле при $X > 0$ не имеет каустик, то возникают сечения особенностей типа $C_{N+1} = (A_1, A_N)$. В частности, когда на экран нормально падает плоская волна, то центр особенности C_{N+1} оказывается на беско-

нечности. Если $f = \frac{1}{2} a (\tilde{\eta}_2)^2$, $a > 0$, то уравнение каустики имеет вид

$$a \left(Y - \frac{1}{a} \right)^3 = \frac{27}{8} Z^2. \tag{9}$$

Если теперь

$$f = \frac{1}{2} a (\tilde{\eta}_2)^2 + \frac{b}{24} (\tilde{\eta}_2)^4, \quad b > 0, \tag{10}$$

то при $b = 3a^3$ возникает особенность A_5 – “бабочка” [17]. При $b < 3a^3$ она переходит в каустическое острие, а при $b > 3a^3$ она трансформируется в характерную структуру с тремя точками заострения. При $b = 3a^3$ каустика уже не будет полукубической параболой. Приблизненно при малых Y ее уравнение имеет вид

$$Z^2 \approx \frac{2^{11}}{3 \times 5^5} a \left(Y - \frac{1}{a} \right)^5. \tag{11}$$

Если, наконец,

$$f = \frac{1}{2} a (\tilde{\eta}_2)^2 + \frac{b}{24} (\tilde{\eta}_2)^4 + \frac{d}{720} (\tilde{\eta}_2)^6, \tag{12}$$

то возникает особенность A_7 – “звезда”.

Возможны два принципиально различных случая: когда каустика краевых лучей лежит в области “света” ГО-лучей (граница экрана вогнутая кривая) и когда каустика краевых лучей лежит в области ГО-тени (граница экрана выпуклая кривая). В первом случае вклад краевых лучей на фоне сильного ГО-поля может быть незначителен, в то время как во втором случае он будет определяющим.

Если ГО-лучи фокусируются в области $X > 0$, то возникают также каустики ГО-лучей, которые совместно с границами “свет–тень” и каустиками краевых лучей образуют единые структуры. Это особенности серий F и K . Причем особенности $F_4, K^#, K_{N,2}, K_8^{**}$ отвечают одномерным каспоидным фокусировкам ГО-лучей, а особенности $F_{1,N}, K_{4,N}, F_8, K_{N,3}, K_8^*$ – двумерным омбилическим катастрофам [9]. Подробное описание краевых волновых катастроф также приведено в информационной системе “Волновые катастрофы в радиофизике, акустике и квантовой механике” (wavecat.rosnou.ru) [18].

Приведем два примера. Пусть

$$\Psi = -\frac{\eta_1}{\rho_1} - \frac{\eta_1 \eta_2}{\rho_3}, \quad f = -\frac{1}{2} a (\eta_2)^2, \quad a > 0, \tag{13}$$

что соответствует волне с искривленным фазовым фронтом, падающей под углом к плоскости параболического экрана. Краевые лучи образуют каустическую поверхность (9) с линией заостре-

ния: $Z = 0$; $Y = -\frac{1}{a}$; $X = [0, +\infty)$. В точке, где граница “свет–тень”^a пересекает линию заострения, имеем

$$\begin{aligned} Z = 0; \quad Y = -\frac{1}{a}; \quad X = \delta; \\ \delta = \left(\rho_1^2 - \frac{1}{a^2}\right)^{1/2}; \quad \rho_1 > \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $0 < \rho_3 < +\infty$ в этой точке возникает особенность $C_4 = (A_1, A_3)$. При $\rho_3 = +\infty$ каустическую поверхность краевых лучей пересекает каустическая ГО-поверхность, которая также имеет линию заострения.

Существует луч, который принадлежит одновременно как семейству ГО-лучей, так и семейству краевых лучей, причем на этом луче находится точка, которая является точкой острия как ГО-, так и краевой каустики. Поэтому эта точка является центральной точкой особенности $K_{4,2} = (A_3, A_3)$.

В случае $\Sigma = C_4$ равномерная асимптотика поля в окрестности особой точки определяется формулой [9]

$$\begin{aligned} U(\lambda, \bar{\alpha}) = e^{i\theta} \left\{ (l_1)_g I^{C_4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) + \right. \\ \left. + (l_1)_E I^{A_3}(\lambda_2, \lambda_3) + \sum_{k=2}^3 (l_k)_E \frac{\partial I^{A_3}}{\partial \lambda_k} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где I^{A_3} – СВК каспоидного типа $\Sigma = A_3$ – интеграл Т. Пирси [19].

$$I^{A_3}(\lambda_2, \lambda_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(\pm x^4 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\} dx, \quad (16)$$

а краевая СВК особенности C_4 имеет вид

$$\begin{aligned} I^{C_4}(\bar{\lambda}) = \int_0^{+\infty} dz \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(xz \pm x^4 + \lambda_1 z + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда методом локальной асимптотики находим [9, 12, 13]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \approx \frac{\rho_3}{\rho_1^3} \left(\frac{ka^2}{8\rho_1}\right)^{1/4} \delta \left[\left(Y + \frac{Z\rho_3}{2\rho_1}\right) \delta + \frac{X}{a} \right]; \\ \lambda_2 \approx -\left(\frac{2k}{\rho_1}\right)^{3/4} \frac{Z}{a^{1/2}}; \quad \lambda_3 \approx -\left(\frac{2k}{\rho_1}\right)^{1/2} \left(Y + \frac{1}{a}\right); \\ \theta \approx k \left(\frac{\delta}{\rho_1} - \frac{Y}{a\rho_1}\right); \quad (l_1^{(o)})_g = \frac{1}{2\pi} A_o(Z, Y, X), \end{aligned} \quad (18)$$

где A_o – амплитуда ГО-поля без учета влияния экрана.

Рассмотрим теперь случай, когда и ГО-, и краевые лучи образуют структурно-связанные каустики типа “каустическое острие”. Равномерная асимптотика поля в окрестности особой точки выражается через СВК особенности $K_{4,2}$ и функцию Пирси [19]. Краевая СВК имеет вид

$$\begin{aligned} I^{K_{4,2}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, a) = \int_0^{+\infty} dz \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(z^2 + ax^2 z \pm x^4 + \\ + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 z + \lambda_4 xz)\} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

При $a = 0$ и $\lambda_4 = 0$

$$I^{K_{4,2}} = F_r^+(\lambda_3) I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2), \quad (20)$$

где $F_r^+(\lambda_3)$ – интеграл Френеля:

$$F_r(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp\{i(x^2 + \lambda x)\} dx. \quad (21)$$

На рис. 2а и 2б приведен пример амплитудной и фазовой структур СВК особенности $K_{4,2}$ в координатах (λ_1, λ_2) [18]. При этом знак в нормальной форме “+”, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = -2$, $a = -1$.

На рис. 2а хорошо видна интерференционная квазипериодическая структура, характеризующаяся системой убывающих по амплитуде максимумов и нулей (минимумов), образующих нерегулярную решетку. Вблизи границы свет–тень располагается главный максимум, а непосредственно в его окрестности между первым и вторым рядом – минимум с нулем амплитуды. На рис. 2б минимумам соответствуют точки дислокации фазы СВК, поскольку в таких точках фаза не определена. Из этих точек, как из узлов, выходят линии фазы всех возможных значений, от 0 до 2π .

Равномерная асимптотика $U(\Lambda, \bar{\alpha})$ в случае катастрофы $K_{4,2}$ состоит из шести слагаемых

$$\begin{aligned} U(\lambda, \bar{\alpha}) = \\ = \exp(i\theta) \left\{ (l_1)_g I^{K_{4,2}} + (l_2)_g \frac{\partial I^{K_{4,2}}}{\partial \lambda_3} + (l_3)_g \frac{\partial I^{K_{4,2}}}{\partial \lambda_4} + \right. \\ \left. + (l_1)_E I^{A_3} + (l_2)_E \frac{\partial I^{A_3}}{\partial \lambda_1} + (l_3)_E \frac{\partial I^{A_3}}{\partial \lambda_2} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Фаза θ и коэффициенты универсальной деформации по-прежнему определяются формулами (18):

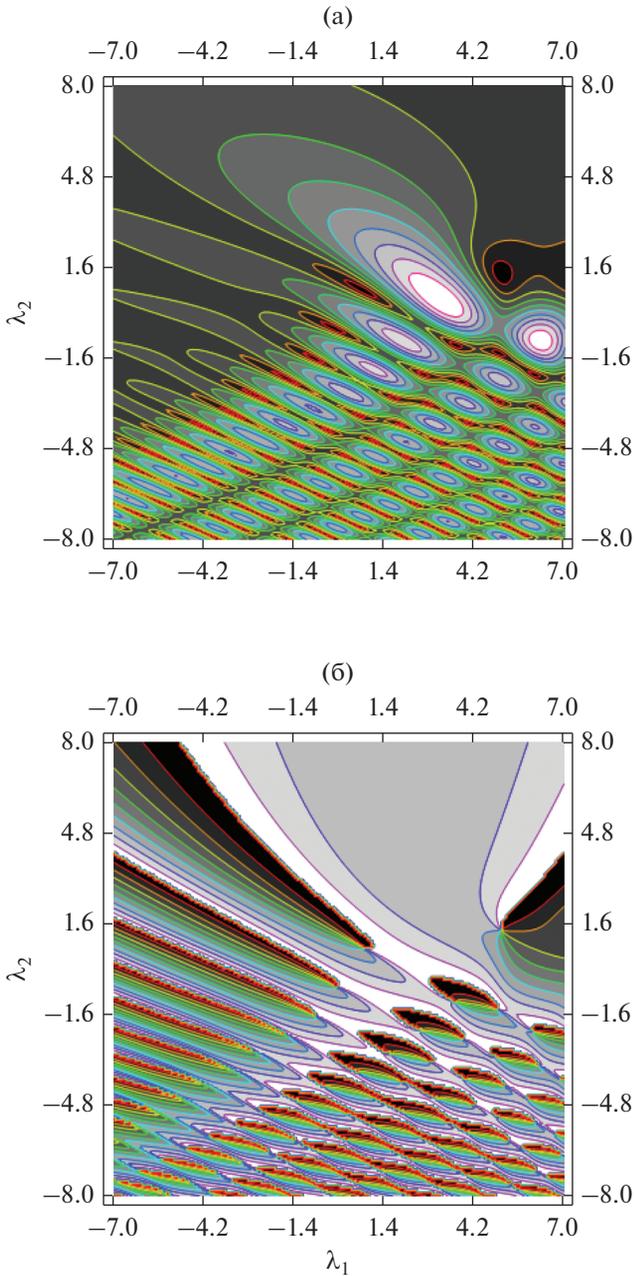


Рис. 2. Амплитудная (а) и фазовая (б) структуры СВК.

$\lambda_1(K_{4,2}) = \lambda_2(C_4)$, $\lambda_2(K_{4,2}) = \lambda_3(C_4)$, а λ_3 , λ_4 и функциональный модуль a_f локально равны:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &\approx \left(2 \frac{k}{\rho_1^3}\right)^{1/2} \left(\frac{X}{a} + Y\delta\right); \\ \lambda_4 &\approx (8\rho_1 k)^{1/4} \delta^{-1} \left(\frac{1}{a\rho_1^2} + \frac{a}{4}\right) Z; \\ a_f &\approx a_f^o = -2\rho_1 \delta^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Коэффициент $(I_1^{(o)})_g$ асимптотики (22) в особой точке равен

$$\begin{aligned} k^{1/4} (I_1^{(o)})_g &\approx k^{1/4} (I_1^c)_g = \\ &= \exp(-i\pi/2) \frac{k}{2\pi\rho_1} A(0,0) \times \\ &\times C(0;0;0;-a^{-1};\delta) \left. \frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} \frac{\partial\eta_2}{\partial x_2} \right|_{\eta_1=0, \eta_2=0}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если в (2) положить $C = X/R$ и учесть, что

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2} = \left(\frac{8\rho_1}{ka^2}\right)^{1/4}; \quad \frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} = \delta^{-1} \left(2 \frac{\rho_1^3}{k}\right)^{1/2}, \quad (25)$$

то

$$(I_1^{(o)})_g \approx (I_1^c)_g = \exp\{-i\pi/2\} \frac{1}{\pi a^{1/2}} \left(\frac{2}{\rho_1}\right)^{1/4} A(0,0). \quad (26)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрена задача о дифракции волны на искривленном экране. Если граница экрана прямая линия, а падающее поле имеет такой начальный волновой фронт, что при $X > 0$ возникает фокусировка ГО-лучей, то практически при любом расположении экрана краевые лучи также будут фокусироваться. Случай, когда задача имеет цилиндрическую симметрию и может быть сведена к двумерной, а краевые лучи не фокусируются и образуют цилиндрическую расходящуюся волну, рассмотрен нами в [20]. В данной же работе исследована дифракция сходящейся волны на проводящей полуплоскости и сопоставлены результаты расчета амплитудной структуры поля в окрестности краевых катастроф серии $B_{N+1} = (A_N, A_1)$ различными асимптотическими методами: неравномерной геометрической теории дифракции (ГТД) [21], физической теорией дифракции (метод краевых волн), физической оптикой (приближение Грина–Кирхгофа) и равномерными методами волновой теории катастроф (равномерная ГТД). Были рассмотрены как локальная, так и глобальная асимптотики.

Краевые особенности возникают также в задачах о рассеянии проводящих тел вогнутыми поверхностями. В этом случае образуются волны “шепчущей галереи” [22].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-02-00544-а, № 17-02-01183-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982.
2. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
3. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982.
4. Крюковский А.С., Орлов А.В. // РЭ. 2010. Т. 55. № 3. С. 292.
5. Крюковский А.С., Сарен Ю.В. // РЭ. 2002. Т. 47. № 1. С. 63.
6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Ч. I. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
7. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. // РЭ. 2006. Т. 51. № 10. С. 1155.
8. Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V. // Russ. J. Mathem. Phys. 2009. V. 16. № 2. P. 232.
9. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013.
10. Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 1998. Т. 43. № 9. С. 1044.
11. Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 2003. Т. 48. № 8. С. 912.
12. Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 1981. Т. 26. № 6. С. 1121.
13. Крюковский А.С. // РЭ. 1996. Т. 41. № 1. С. 59.
14. Карепов С.Л., Крюковский А.С. // РЭ. 2001. Т. 46. № 1. С. 40.
15. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции: Учебное пособие. М.: МФТИ, 1999.
16. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. // Труды X школы-семинара по дифракции и распространению волн. 7–15.02.1993. М.: МФТИ, 1993. С. 36.
17. Балыкина А.М., Крюковский А.С. // РЭ. 2010. Т. 55. № 5. С. 531.
18. Дорохина Т.В., Крюковский А.С., Лукин Д.С. // Электромагн. волны и электрон. системы. 2007. Т. 12. № 8. С. 71.
19. Pearcey T. // Philos. Mag. 1964. V. 37. P. 311.
20. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. // РЭ. 1994. Т. 39. № 4. С. 538.
21. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
22. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1973.