

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.372.22

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА
НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ НА ОСНОВЕ
ОБОБЩЕННОЙ ЛЕММЫ ЛОРЕНЦА

© 2019 г. А. С. Раевский^{1,*}, С. Б. Раевский¹, А. Ю. Седаков², А. А. Титаренко¹

¹Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

²Научно-исследовательский институт измерительных систем им. Ю.Е. Седакова,
Бокс-486, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

*E-mail: raeovsky_as@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2018 г.

После доработки 20.12.2018 г.

Принята к публикации 14.01.2019 г.

Предложен метод решения краевых задач для нерегулярных волноводов, объединяющий обобщенную запись леммы Лоренца с методом коллокаций, позволяющий сводить краевые задачи к системам интегро-дифференциальных уравнений, алгебраизация которых осуществляется отождествлением узлов коллокаций с точками размещения вспомогательных источников.

DOI: 10.1134/S0033849419110226

ВВЕДЕНИЕ

Исследование особенностей распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах приводит к решению краевых задач на системе уравнений Максвелла со сложными граничными условиями. В большинстве случаев такие задачи не имеют аналитических решений, в связи с чем возникает проблема построения приближенных решений, реализуемых, как правило, численно на ЭВМ.

Математические методы исследования нерегулярных волноводов зависят от характера нерегулярности. В тех случаях, когда нерегулярный волновод мало отличается от регулярного и удается выделить малый параметр нерегулярности, можно использовать асимптотические методы [1–3]. В частности, для волноводов с координатными нерегулярностями можно использовать метод частичных областей (МЧО) [4], для плавно-нерегулярных волноводов — метод поперечных сечений [5], а для волноводов с относительно малым пространственным периодом параметра нерегулярности — импедансный метод [6]. Строгая идеология исследования нерегулярных (в частности, гофрированных) волноводов предлагает обращаться к сложным строго обоснованным методам, например, к методу, использующему переход от нерегулярного волновода с изотропным заполнением к регулярному волноводу с анизотропным заполнением [7]. В данной работе для

расчета нерегулярных волноводов предложен метод интегральных уравнений, основанный на лемме Лоренца.

1. СОСТАВЛЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим пространство, ограниченное поверхностью S , описываемой непрерывной функцией $R(r, \phi, z)$, где r, ϕ, z — цилиндрические координаты (рис. 1). Соответствующая поверхности S продольная координата $z \subset (-\infty, \infty)$. Внутри указанного пространства расположены источники

$$\vec{J}_1^{e,m}, \vec{J}_2^{e,m}, \vec{J}_N^{e,m}, \quad (1)$$

которые создают поля

$$\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2, \dots, \vec{E}_N, \vec{H}_N. \quad (2)$$

Таким образом, имеем N неоднородных краевых задач, пространства которых объединены одной общей областью $S = \bar{S} + S_1 + S_2$, где \bar{S} — боковая поверхность выделенного объема, $S_{1,2}$ — торцевые поверхности (поперечные сечения волновода), ограничивающие с двух сторон объем V .

Все источники (1) находятся в конечной области V , под которой можно понимать либо продольно-нерегулярный волновод (в частности, периодически-нерегулярный), либо нерегулярный

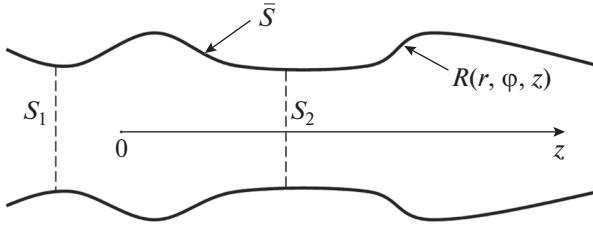


Рис. 1.

участок волноводного тракта, либо волноводный переход.

Если электромагнитные поля \vec{E}_i, \vec{H}_i удовлетворяют граничному условию

$$\vec{E}_\tau|_{\bar{S}} = 0, \quad (3)$$

то они соответствуют собственным волнам рассматриваемого волновода. Поля \vec{E}_i, \vec{H}_i , на которые не накладывают условие (3), удовлетворяют условию излучению на бесконечности.

Таким образом, волны \vec{E}_i, \vec{H}_i могут быть как направляемыми волноводными волнами, так и волнами, излучаемыми в открытое пространство, т.е. волны \vec{E}_i, \vec{H}_i могут соответствовать различным краевым задачам. При этом пространства, соответствующие различным краевым задачам, имеют одну общую область V , в которой распределены источники (1), создающие поля (2), т.е. указанные пространства объединяются областью источников.

Поля первого типа (обозначим их \vec{E}_k, \vec{H}_k), удовлетворяющие граничному условию (3), соответствуют собственным волнам нерегулярного экранированного волновода. Поля второго типа (обозначим их \vec{E}_n, \vec{H}_n), удовлетворяющие условию излучения, могут принимать на поверхности \bar{S} любые конечные значения. Поля \vec{E}_k, \vec{H}_k будем полагать искомыми решениями краевой задачи, поля \vec{E}_n, \vec{H}_n будем рассматривать как вспомогательные. Источники, создающие поля первого типа, обозначим $\vec{j}_k^{e,m}$, источники, создающие поля второго типа, обозначим $\vec{j}_n^{e,m}$.

Для полей \vec{E}_k, \vec{H}_k и \vec{E}_n, \vec{H}_n в объеме V запишем лемму Лоренца в виде

$$\oint_S ([\vec{H}_k, \vec{E}_n], d\vec{S}) = \int_V (\vec{j}_k^e, \vec{E}_n - \vec{j}_n^e, \vec{E}_k - \vec{j}_k^m, \vec{H}_n + \vec{j}_n^m, \vec{H}_k) dV, \quad (4)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V .

При $S_{1,2} \rightarrow \pm\infty$ с учетом конечности площади поперечного сечения рассматриваемого нерегулярного волновода перепишем уравнение (4):

$$\begin{aligned} \int_S ([\vec{H}_k, \vec{E}_n], d\vec{S}) &= \\ &= \int_V (\vec{j}_k^e, \vec{E}_n - \vec{j}_n^e, \vec{E}_k - \vec{j}_k^m, \vec{H}_n + \vec{j}_n^m, \vec{H}_k) dV. \end{aligned} \quad (5)$$

В безграничном пространстве ($\bar{S} \rightarrow \infty$) источники $\vec{j}_k^{e,m}$ создадут поля расходящихся сферических волн, удовлетворяющих условию излучения, которые на поверхности $\bar{S} \rightarrow \infty$ обращаются в нуль. Обозначив эти поля \vec{E}_k^0, \vec{H}_k^0 , перепишем уравнение (5) в виде

$$\int_{V_\infty} (\vec{j}_k^e, \vec{E}_n - \vec{j}_n^e, \vec{E}_k^0 - \vec{j}_k^m, \vec{H}_n + \vec{j}_n^m, \vec{H}_k^0) dV = 0. \quad (6)$$

При этом интеграл по бесконечному объему в (6) тождественно совпадает с интегралом по конечной области источников в (5), т.е. $\int_{V_\infty} \equiv \int_V$.

Исключая из уравнения (5) с помощью соотношения (6) токи $\vec{j}_k^{e,m}$, получим

$$\begin{aligned} \int_S ([\vec{H}_k, \vec{E}_n], d\vec{S}) &= \\ &= \int_{V_\infty} [\vec{j}_n^e, (\vec{E}_k^0 - \vec{E}_k) - \vec{j}_n^m, (\vec{H}_k^0 - \vec{H}_k)] dV. \end{aligned} \quad (7)$$

Выбрав в качестве источников $\vec{j}_n^{e,m}$ элементарные диполи:

$$\vec{j}_n^{e,m} = \vec{I}_n^{e,m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{j_n^{e,m}}),$$

где $\vec{r}_{j_n^{e,m}}$ — координаты вспомогательных источников, и воспользовавшись свойством δ -функции, из соотношения (7) получаем

$$\begin{aligned} \int_S ([\vec{H}_k, \vec{E}_n], d\vec{S}) &= \\ &= I_n^e [E_k^0(\vec{r}_{j_n^e}) - E_k(\vec{r}_{j_n^e})] - I_n^m [H_k^0(\vec{r}_{j_n^m}) - H_k(\vec{r}_{j_n^m})]. \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнении (8) $E_k^0(\vec{r}_{j_n^e}), E_k(\vec{r}_{j_n^e}), H_k^0(\vec{r}_{j_n^m}), H_k(\vec{r}_{j_n^m})$ — проекции векторов на направления элементарных диполей $\vec{j}_n^{e,m}$.

Поля \vec{E}_k, \vec{H}_k в (8), удовлетворяющие граничным условиям

$$\vec{E}_{\parallel}|_{\bar{S}} = 0; \quad H_{\perp}|_{\bar{S}} = 0 \quad (9)$$

(E_{\parallel} — касательная составляющая электрического поля; H_{\perp} — нормальная составляющая магнитного поля), можно рассматривать как поля собственных волн в волноводе с идеально проводя-

щей экранирующей поверхностью \bar{S} . В решаемой задаче эти поля будут искомыми полями нерегулярного волновода. Поля $\vec{E}_k^0, \vec{H}_k^0, \vec{E}_n$ в (8) являются вспомогательными. Они создаются диполями $\vec{j}_{k,n}^{e,m}$ в неограниченном пространстве и стремятся к нулю при удалении от источников как поля расходящихся сферических волн.

Расположим излучатели $\vec{j}_{n}^{e,m}$ в сечении $z = 0$, а $\vec{j}_k^{e,m}$, как источники, создающие поля собственных волн рассматриваемого волновода, отнесем в сечение $z \rightarrow -\infty$. Поскольку \vec{E}_k^0, \vec{H}_k^0 – поля сферических волн, создаваемых источниками, отнесенными в бесконечность, то в сечении $z = 0$, где расположены диполи $\vec{j}_n^{e,m}$, их вклад пренебрежимо мал в силу неравенств

$$E_k^0(\vec{r}_{j_n^{e,m}}) \ll E_k(\vec{r}_{j_n^{e,m}}); \quad H_k^0(\vec{r}_{j_n^{e,m}}) \ll H_k(\vec{r}_{j_n^{e,m}}).$$

Поэтому в правой части уравнения (8) эти поля можно опустить и переписать уравнение в следующем виде:

$$\int_{\bar{S}} ([\vec{H}_k, \vec{E}_n], d\vec{S}) = -I_n^e E_k(\vec{r}_{j_n^e}) + I_n^m H_k(\vec{r}_{j_n^m}). \quad (10)$$

Уравнение (10) является интегральным (в общем случае интегро-дифференциальным) уравнением относительно полей \vec{E}_k, \vec{H}_k . В тех случаях, когда вводится один вспомогательный источник (одного типа), из (10) получаем уравнения

$$\int_{\bar{S}} ([\vec{H}_k, \vec{E}_n], d\vec{S}) = -I_n^e E_k(\vec{r}_{j_n^e}), \quad (11a)$$

$$\int_{\bar{S}} ([\vec{H}_k, \vec{E}_n], d\vec{S}) = I_n^m H_k(\vec{r}_{j_n^m}). \quad (11b)$$

Амплитуды вспомогательных источников, входящие в обе части уравнений (11a) и (11b), в процессе решения уравнений сокращаются, поскольку $\vec{E}_n \sim I_n^{e,m}$.

Поскольку согласно решению задачи о возбуждении волн экранированного волновода источники $\vec{j}_k^{e,m}$ создают в общем случае бесконечные наборы собственных волн, поля \vec{E}_k и \vec{H}_k следует представить в виде

$$\vec{E}_k = \sum_{v=0}^{\infty} A_v \vec{E}_v; \quad \vec{H}_k = \sum_{v=0}^{\infty} B_v \vec{H}_v \quad (12)$$

для каждого фиксированного k , т.е. для каждого источника.

Уравнения (11a), (11b) можно свести к алгебраическим, если подставить в них поля в виде (12) и записать их в точках расположения вспомогательных источников, число которых выбирают в соответствии с числом членов в суммах (12). Поля

\vec{E}_v, \vec{H}_v в каждом сечении z записывают как поля волновода сравнивания, соответствующего этому сечению. Суммирование в (12) проводят по полям волновода сравнивания толщиной dz , удовлетворяющим в пределах этого волновода граничным условиям (9). Это обеспечивает выполнение граничных условий в целом. Непрерывность поля по продольной координате обеспечивается самими интегральными уравнениями (11a) и (11b). Каждому источнику $\vec{j}_k^{e,m}$ соответствует свой набор полей (12), определяющий k -ю волну нерегулярного волновода. Номер собственной волны нерегулярного волновода определяется порядковым номером корня трансцендентного дисперсионного уравнения.

2. НЕРЕГУЛЯРНЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Рассмотрим реализацию предлагаемого метода в частном случае, когда функция R , описывающая экранирующую поверхность нерегулярного волновода, зависит только от продольной координаты. При этом подход к решению краевой задачи не потеряет своей общности и в том случае, когда $R = R(\phi, z)$.

Выясним, в каком случае предлагаемая постановка задачи требует обращения лишь к одному из уравнений: (11a) или (11b), а в каком – к обоим. В том случае, когда функция $R(z)$ зависит только от одной продольной координаты, имеем дело с круглым гофрированным волноводом. Рассматривать такой волновод удобно в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) . Граничные условия (9) можно записать в виде

$$E_r = -E_z / R'(z), \quad (13a)$$

$$H_r = -H_z R'(z). \quad (13b)$$

Приведенные выше соотношения устанавливают связь между компонентами поля на поверхности \bar{S} волновода, которая используется в поверхностных интегралах (11a) и (11b), обеспечивая выполнение граничных условий задач Дирихле и Неймана на поверхности \bar{S} .

Если волны не имеют угловой зависимости поля, у них отсутствуют азимутальные компоненты: либо E_ϕ (E -волны), либо H_ϕ (H -волны). При этом для выполнения граничных условий (9) достаточно выполнения одного из условий: (13a) или (13b). В этом случае граничные условия указанных краевых задач выполняются при наличии одной из продольных компонент поля, т.е. волны, распространяющиеся в волноводе, классифицируются как E - и H -волны.

Выбор интегрального уравнения (11a) или (11b) определяется заданием вспомогательных

источников. Если задается электрический диполь, ориентированный вдоль оси z , то предполагается существование E -волны, для которой краевая задача является полной при наличии одного условия (13а). В этом случае нужно решать интегральное уравнение (11а) с граничным условием (13а), что соответствует краевой задаче о распространении в нерегулярном волноводе E -волны. Когда же в качестве вспомогательного источника задается магнитный диполь, ориентированный вдоль оси z , то отличной от нуля должна быть правая часть уравнения (11б), что свидетельствует о наличии у распространяющейся волны продольной компоненты магнитного поля. В этом случае полнота краевой задачи, соответствующей H -волнам, обеспечивается уравнением (11б) и граничным условием (13б).

Таким образом, уравнение (11а) описывает волны, у которых отсутствует азимутальное электрическое поле, уравнение (11б) – волны, у которых отсутствует азимутальное магнитное поле. Полнота краевой задачи, описывающей волны, имеющие все компоненты поля, обеспечивается двумя интегральными уравнениями, (11а), (11б), решаемыми при граничных условиях (13а), (13б). В этом случае, как следует из (13а), (13б), присутствуют обе продольные компоненты поля (E_z и H_z), через которые на поверхности \bar{S} должны быть выражены азимутальные компоненты. Соотношения (13а), (13б) не дают связи между указанными компонентами на поверхности \bar{S} . Этую связь следует устанавливать на основе уравнений Максвелла, из которых получаем

$$E_\varphi = \frac{i}{\omega\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial z} \right); \quad H_\varphi = -\frac{i}{\omega\epsilon} \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right). \quad (14)$$

Из (14) видно, что присутствие азимутальных компонент поля приводит к появлению в каждом из уравнений (11а), (11б) двух неизвестных функций: E_z и H_z . Таким образом волны, имеющие обе азимутальные компоненты, являются гибридными и расчет их полей требует совместного решения интегральных уравнений (11а), (11б) относительно двух неизвестных компонент E_z и H_z . Через указанные компоненты с использованием соотношений (13а), (13б), (14) можно выразить остальные компоненты:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{i}{\omega\epsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial r} + R'(z) \frac{\partial H_z}{\partial z} + R''(z) H_z \right], \\ H_\varphi &= -\frac{i}{\omega\mu} \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{R'(z)} \frac{\partial E_z}{\partial z} + E_z \frac{R''(z)}{[R'(z)]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, в общем случае, когда волны нерегулярного волновода гибридные и имеют все шесть компонент поля, необходимо решать систему двух интегральных уравнений (11а), (11б) относительно функций E_z и H_z . С учетом соотношений (13а), (13б)–(15) уравнения (11а), (11б)

следует рассматривать как интегро-дифференциальные. При этом в подынтегральных выражениях указанные функции определяются как

$$\vec{H}_k = \vec{H}_k(r, \varphi, z); \quad \vec{E}_n = \vec{E}_n(r, \varphi, z, r', \varphi', z'), \quad (16)$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты точек на экранирующей поверхности \bar{S} ; (r', φ', z') – цилиндрические координаты вспомогательных источников. Если последние размещены в сечении $z = 0$, то в (16) $z' = 0$. Тогда в правых частях уравнений (11а), (11б) имеем

$$E_k(\vec{r}_{j_n}) = E_k(r, \varphi, 0); \quad H_k(\vec{r}_{j_m}) = H_n(r', \varphi', 0), \quad (17)$$

где E_k и H_k – проекции полей на направления соответствующих диполей.

Продольные компоненты полей волн, распространяющихся в нерегулярном волноводе, представим в виде

$$\begin{aligned} E_{kz} &= \sum_{v=1}^{\infty} A_v^{(k)} \Psi_v^{(k)} [\alpha_v^e(z) r] \cos k\varphi \exp(-i\beta z); \\ H_{kz} &= \sum_{v=1}^{\infty} B_v^{(k)} \Psi_v^{(k)} [\alpha_v^m(z) r] \sin k\varphi \exp(-i\beta z), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\alpha_v^e(z)$ и $\alpha_v^m(z)$ – корни уравнений:

$$J_v [\alpha_v^e(z) R(z)] = 0, \quad (19a)$$

$$J_v' [\alpha_v^m(z) R(z)] = 0, \quad (19b)$$

соответствующих задачам Дирихле и Неймана, решаемым для каждого круга радиусом $R(z)$ в поперечном сечении $z = \text{const}$. Значения $\alpha_v^{e,m}(z)$ находятся из уравнений (19а), (19б) в том случае, когда радиальная зависимость поля в (18) описывается цилиндрическими функциями, т.е. когда каждому сечению $z = \text{const}$ соответствует цилиндрический волновод сравнения (ВС), радиус которого $R(z)$. В общем случае радиальная зависимость в (18) определяется краевыми задачами Дирихле (19а) и Неймана (19б) для ВС, соответствующими геометрии экранирующей поверхности волновода.

Суммирование в (18) производится по корням уравнений (19а), (19б). Азимутальная зависимость поля в рассматриваемом случае считается фиксированной. Каждой волне соответствует свое значение k , и она состоит из бесконечного набора волн фиксированной поляризации с индексами v .

Компоненты поля, представляемые на поверхности волновода выражениями (13а), (13б), (15), (18), далее подставляют в интегральные уравнения (11а), (11б). Эти уравнения, записанные в точках, где расположены вспомогательные источники (в узлах коллокаций), образуют систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_v^{(k)}$, $B_v^{(k)}$. Из условия нетривиальности ее решений получаем

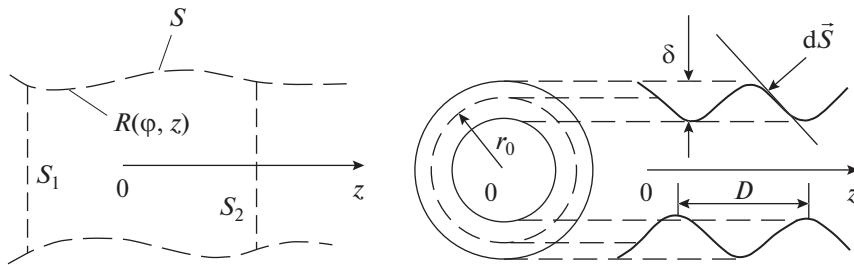


Рис. 2.

трансцендентное дисперсионное уравнение волн HE_{kq} (EH_{kq}), где q — порядковый номер корня указанного дисперсионного уравнения.

Возможен другой вариант сведения интегральных уравнений к алгебраическим, если для сечения, в котором расположены вспомогательные источники, можно сформулировать краевую задачу Штурма–Лиувилля. В этом случае координаты точек указанного сечения можно отождествить с точками, по которым непрерывно распределены вспомогательные источники. Применяя условия ортогональности собственных функций краевой задачи для указанного поперечного сечения, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений полей волн нерегулярного волновода и поля в сечении, в котором расположены вспомогательные источники. Условие нетривиальности решений этой системы также приводит к дисперсионному уравнению волн рассматриваемого нерегулярного волновода.

3. КРУГЛЫЙ ГОФРИРОВАННЫЙ ВОЛНОВОД

В качестве примера реализации предлагаемого метода рассмотрим расчет дисперсии симметричной волны магнитного типа в круглом гофрированном волноводе (рис. 2), уравнение поверхности которого имеет вид

$$a(z) = r_0 [1 + \Delta \cos(2\pi z/D)],$$

где $\Delta = \delta/2r_0$, δ — глубина гофра, r_0 — средний (по глубине гофра) радиус волновода.

В качестве вспомогательного источника возьмем продольный магнитный диполь. Симметричные H -волны будут описываться уравнением (11б), решение которого представим в виде

$$H_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m J_0(\alpha_m r) \exp(-i\beta_m z), \quad (20)$$

где $\alpha_m = \sqrt{\epsilon\mu\omega^2 - \beta_m^2}$, $\beta_m = \beta_0 + \frac{2\pi m}{D}$, D — период гофра, $m = 0; 1; 2, \dots$, $J_0(\alpha_m r)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Ввиду периодичности направляющей структуры поле (20) представляется набором пространственных гармоник. В m -м приближении имеем $2m + 1$ неизвестных амплитудных коэффициентов. При $m \rightarrow \infty$ решение рассматриваемой задачи становится инвариантным по отношению к размещению вспомогательных источников. Перемещая последние в сечении $z = 0$ (используя коллокацию по вспомогательным источникам), запишем уравнение (11б) в $(m + 1)$ точках (r, ϕ) . В результате получаем систему $(2m + 1)$ линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_m . Запись условия нетривиальности её решений дает дисперсионное уравнение симметричных H -волн, решаемое в плоскости (ω, β_0) .

Решение уравнения (11б) в виде (20) соответствует симметричным волнам H_{0q} круглого периодически нерегулярного волновода. Для волноводов с другими поперечными сечениями общий вид записи решения сохранится. Изменятся лишь базисные функции поперечных координат. Так, в эллиптическом волноводе [4, 8] это будут функции Матье, в прямоугольном — тригонометрические функции. В том случае, когда поперечное сечение волновода не “вписывается” ни в одну из ортогональных систем координат (т.е. границы сечения не совпадают с координатными линиями), определить базис, по которому нужно проводить разложение искомого поля, значительно сложнее. Для этого предварительно необходимо решить, например, с помощью МЧО задачу о распространении поля в соответствующем, в общем случае, зависящем от продольной координаты, волноводе сравнения.

Подставив решение (20) в уравнение (11б), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} J_0[\alpha_m a(z)] z \sin \varphi a(z) \cos \gamma \times \\ & \times \sqrt{a^2(z) \cos^2 \varphi + z^2} \exp(-i\beta_m z) \times \\ & \times (p^2 + ik_0 p) \sin \Theta' \exp(-ik_0 r') dz d\varphi = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где α_m – поперечное волновое число волновода сравнения, соответствующее m -й пространственной гармонике;

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= 1/\sqrt{1 + [a'(z)]^2}, \\ p &= 1/\sqrt{r^2 + z^2 + a^2(z) - 2ra(z)\sin\phi}, \\ r' &= \sqrt{a^2(z) + r^2 + z^2 - 2a(z)r\sin\phi}, \\ \varphi &= \arccos\left[z/\sqrt{z^2 + a^2(z)\cos^2\phi}\right], \\ \Theta' &= \arccos\left[a(z)\sin\phi - r]/\sqrt{a^2(z) + r^2 + z^2 - 2a(z)r\sin\phi}\right],\end{aligned}$$

$k_0 = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$; r – радиальная координата вспомогательного источника, расположенного в плоскости $z = 0$ цилиндрической системы координат (r, ϕ, z) , связанной с волноводом; $\tilde{k} = k_0 r_0$.

В нулевом приближении ($m = 0$), располагая вспомогательный источник вдоль оси волновода, после разделения в (21) действительной и мнимой частей получаем систему двух уравнений:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} J_0[\alpha a(z)] B(\beta, z) \frac{a^2(z)}{a^2(z) + z^2} dz &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} J_0[\alpha a(z)] C(\beta, z) \frac{a^2(z)}{a^2(z) + z^2} dz &= 0,\end{aligned}\quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}B(\beta, z) &= k_0 \cos(\beta z + k_0 \sqrt{a^2(z) + z^2}) - \\ &- \left(\sin(\beta z + k_0 \sqrt{a^2(z) + z^2}) \right) / \sqrt{r^2 + z^2}, \\ C(\beta, z) &= k_0 \sin(\beta z + k_0 \sqrt{a^2(z) + z^2}) + \\ &+ \left(\cos(\beta z + k_0 \sqrt{a^2(z) + z^2}) \right) / \sqrt{r^2 + z^2}.\end{aligned}$$

Выразив поперечное волновое число через продольное, решаем систему уравнений (22) при заданной частоте в плоскости (α, β) .

При $\delta \rightarrow 0$, т.е. при переходе к гладкому волноводу, систему (22) можно преобразовать к уравнению

$$J_1\left(\sqrt[k_0^2 - \beta^2]{r_0}\right) = 0. \quad (23)$$

Так как в гладком круглом волноводе волновые числа связаны соотношением $\alpha^2 + \beta^2 = k_0^2$, то уравнение (23) – обычное уравнение для определения поперечных волновых чисел α симметричных H -волн: $J'_0(\alpha r_0) = 0$.

На рис. 3 приведены результаты расчета дисперсии ($\tilde{\beta} = \beta_0$), полученные из решения системы (22), сплошная кривая соответствует гофрированному волноводу с $\Delta = 0.08$, а штриховая – гладкому волноводу ($\Delta = 0$).

Полоса пропускания периодической замедляющей системы ограничена значением продольного волноводного числа

$$\tilde{k}_{\text{пред}} = \pi/\tilde{D}, \quad (24)$$

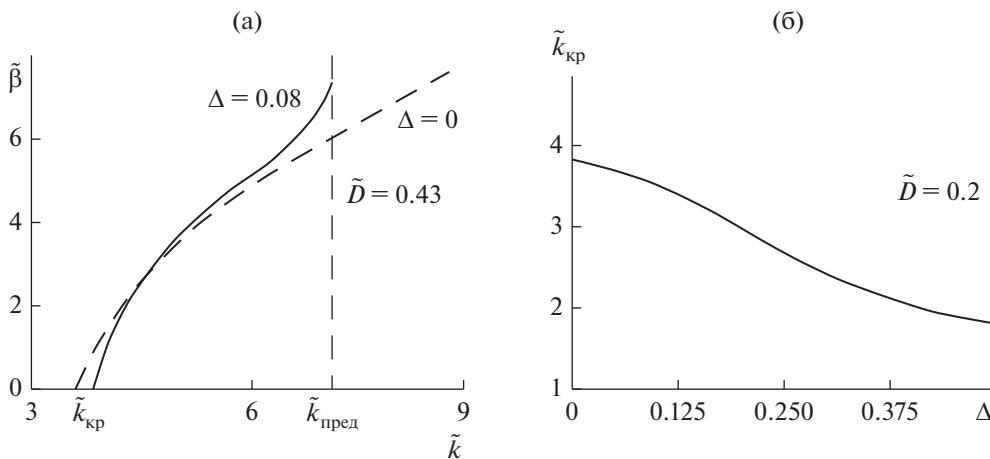


Рис. 3.

где $\tilde{D} = D/r_0$, r_0 – средний радиус гофра (см. рис. 2). Например, при периоде гофра $\tilde{D} = 0.43$ получаем, что $\tilde{k}_{\text{пред}} = 7.3$.

Расчеты дисперсионных характеристик на основе решения системы (22) дали значение $\tilde{k}_{\text{пред}}$ несколько большее, чем значение, полученное с использованием выражения (24). Это объясняется тем, что расчеты проводили без учета пространственных гармоник, а соотношение (24) строго справедливо лишь для диафрагмированного волновода с периодом \tilde{D} .

На рис. 3б приведены результаты расчета на основе (22) критических частот ($\tilde{k}_{\text{kp}} = \tilde{k}$ при $\tilde{\beta} = 0$) волны H_{01} в зависимости от глубины гофра для случая $\tilde{D} = 0.2$.

Сравнение с [7] показывает, что при $\Delta = 0.08$ и $\tilde{D} = 0.43$ погрешность в вычислении критических частот по отношению к результатам этой работы, полученным в 7-м приближении, составляет $\sim 0.1\%$; по отношению к результатам, полученным в 13-м приближении, $\sim 0.8\%$. Результаты работы [7] в силу их теоретически обоснованной точности можно рассматривать как эталонные.

Таким образом, интегральное уравнение (11б) относительно поля в продольно-нерегулярном волноводе с использованием граничных условий (13) на экранирующей поверхности, описывающей аналитической функцией, дает хорошие результаты уже при достаточно низких приближениях. Инвариантность решения задачи по отношению к месту расположения вспомогательных источников, имеющая место в высоких приближениях, делает метод теоретически обоснованным.

4. РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

Предлагаемый метод может быть использован для расчета характеристик передачи нерегулярных участков волноводных трактов. Рассмотрим процедуру расчета характеристик передачи скачкообразной нерегулярности в круглом экранированном волноводе. Рассматриваемая структура изображена на рис. 4. На стык двух волноводов из $z \rightarrow -\infty$ со стороны волновода I падает волна H_{01} единичной амплитуды. В результате дифракции этой волны на стыке в волноводе I образуется бесконечный набор симметричных отраженных волн магнитного типа с коэффициентами отражения R_m , в волноводе II – бесконечный набор прошедших волн того же типа с коэффициентами прохождения B_r .

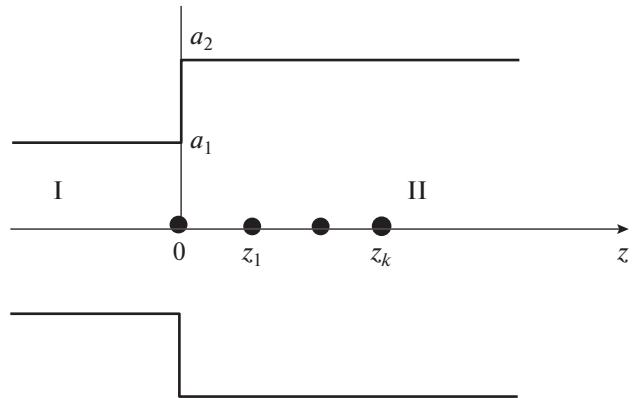


Рис. 4.

Продольные компоненты векторов Герца, через которые выражаются поля в регулярных волноводах I и II, запишем в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{z_1}^h &= J_0(\alpha_1 r) \exp(-i\beta_n z) + \\ &+ \sum_{m=1} R_m J_0(\alpha_m r) \exp(i\beta_m z), \\ \Pi_{z_2}^h &= \sum_{n=1} B_n J_0(\alpha_n r) \exp(-i\beta_n z) \times \\ &\times \beta_{m,n}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \alpha_{m,n}^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где α_m – m -й корень уравнения $J'_0(\alpha_m r_1) = 0$, α_n – n -й корень уравнения $J'_0(\alpha_n r_2) = 0$; $r_1 = a_1$; $r_2 = a_2$.

Выражая компоненты поля через векторы Герца (25) и подставляя их в уравнение (11б), получаем интегральное уравнение

$$\int_S ([\vec{E}, \vec{H}_{I,II}], d\vec{S}) = -(\vec{I}_2^m, \vec{H}_{I,II}(r_j, z_j)), \quad (26)$$

которое связывает искомые поля $\vec{H}_{I,II}$ в стыкуемых волноводах с полями \vec{E} , создаваемыми вспомогательными магнитными источниками \vec{j}_2^m , имеющими амплитуду I_2^m . Интегрирование в (26) проводят по всей поверхности S исследуемой структуры. Если в качестве вспомогательных источников выбрать элементарные магнитные диполи, расположенные вдоль оси волноводов в точках с координатами z_k , то создаваемое ими поле можно записать в виде [6]

$$E_\phi = (ik_0 + 1/r) \sin \Theta \exp(-ik_0 r)/(4\pi r),$$

где $k_0 = \omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, $\sin \Theta = r / \sqrt{r^2 + (z - z_k)^2}$.

После интегрирования (26), где в качестве $\vec{H}_{I,II}$ были подставлены поля, выражаемые через векторы Герца (25), получим систему из k алгебраических уравнений (k – число вспомогатель-

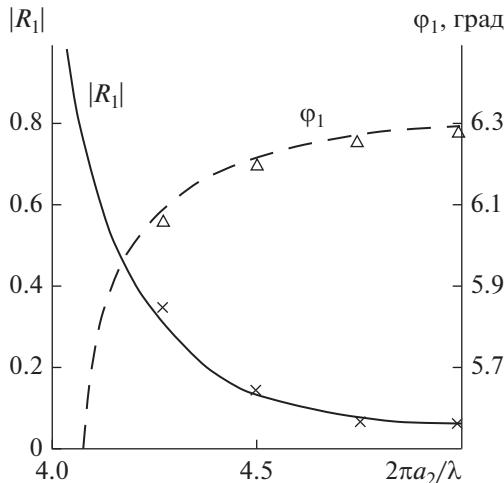


Рис. 5.

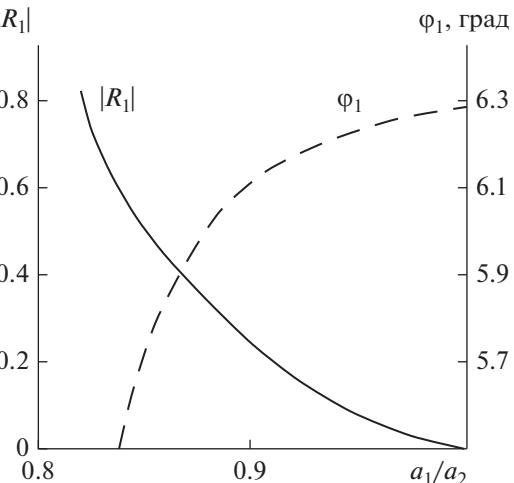


Рис. 6.

ных источников). При этом часть интегралов в левой части (26) берется аналитически; к остальным применяется численное интегрирование. В случае конечного числа вспомогательных источников их координаты z_k выбирают из условия наилучшего выполнения закона сохранения энергии. При одномодовом режиме рассеяния на ступеньке, который имеет место при выполнении неравенства $3.832(a_1/a_2) < (2\pi a_2)/\lambda < 7.016$, закон сохранения энергии записывается в виде

$$1 + R_i^2 = B_i^2 N, \quad (27)$$

где N – коэффициент, учитывающий различие площадей поперечных сечений стыкуемых волноводов. На рис. 5, 6 приведены результаты расчета модуля $|R_i|$ и фазы ϕ_i коэффициента отражения волны H_{01} от стыка для случая, когда в стыкуемых волноводах учитывается по две волны. На рис. 5 приведены зависимости $|R_i|$ и ϕ_i от частоты при $a_1/a_2 = 0.95$, на рис. 6 – от высоты ступеньки a_1/a_2 при $(2\pi a_2)/\lambda = 5.0$. Крестиками на рисунках показаны значения $|R_i|$, а треугольниками – значения ϕ_i , взятые из работы [9]. Как видно из рисунков, расхождения между этими значениями и результатами, полученными в данной работе, не значительны и не превышают несколько процентов. При этом следует отметить, что результаты [9] достаточно точные, поскольку задачу там решали на основе метода полуобращений в высоких приближениях, когда в стыкуемых волноводах учитывали большое число волн – более десяти в каждом волноводе.

Таким образом, метод интегральных уравнений, основанный на лемме Лоренца, позволяет производить расчет характеристик ступенчатых нерегулярностей с высокой точностью уже в низ-

ших приближениях. При этом точки, где располагаются вспомогательные источники, отождествляются с узлами коллокаций интегральных уравнений (11а), (11б).

Поскольку запись интегральных уравнений (11а), (11б) в узлах коллокаций является строгой, точность результатов зависит от числа учитываемых волн высших типов и сходимости разложений (22), которая определяется величиной скачка a_1/a_2 параметров волноводов.

Рассмотренная задача, разумеется, является тестовой и может быть решена более строго [9], в частности, и в рамках предлагаемого метода. Рассматривая вспомогательные источники непрерывно по радиальной координате в пределах поперечного сечения $z = 0$, переход от интегральных уравнений к алгебраическим можно осуществить на основе процедуры Галеркина, поскольку стыкуемые волноводы имеют координатные границы и для них известны строгие решения задач Дирихле и Неймана. В общем случае (при произвольной поверхности нерегулярного участка) для такого перехода может быть использована общая теория Фредгольма [10]. Первоначально идеология предлагаемого метода была сформулирована в работе [11]. Метод хорошо зарекомендовал себя при расчете характеристик передачи нерегулярных участков волноводных трактов [12–17]. В предлагаемом варианте он обобщен на произвольное число источников в интегральной записи леммы Лоренца.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе обобщенной записи леммы Лоренца предложена формулировка метода интегральных уравнений для расчета нерегулярных экранированных волноводов. Обобщение леммы Лоренца заключается в объединении в ее записи

нескольких краевых задач: для волн, направляемых экранированной структурой, и волн, создаваемых вспомогательными источниками в открытом пространстве, удовлетворяющих условию излучения. Метод является универсальным, пригодным для расчета как неограниченных продольно-нерегулярных экранированных направляющих структур, так и отдельных нерегулярных (плавных и скачкообразных) участков волноводного тракта, в том числе и неоднородно заполненных. Сведение интегральных уравнений к алгебраическим осуществлено на основе метода коллокаций, который в данном случае является физически обоснованным, поскольку в качестве узлов коллокаций выбраны точки, в которых расположены вспомогательные источники.

Для демонстрации практического использования предлагаемого метода решены две тестовые задачи: о расчете круглого гофрированного волновода и стыка двух регулярных круглых волноводов с различными размерами поперечных сечений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01628).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов Ю.Г., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я., Худякова В.А. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1973. Т. 16. № 8. С. 44.
2. Белов Ю.Г., Раевский С.Б. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1975. Т. 18. № 11. С. 98.
3. Белов Ю.Г. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1977. Т. 20. № 2. С. 114.
4. Иларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Расчет гофрированных и частотно-заполненных волноводов. М.: Сов. радио, 1980.
5. Каценеленбаум Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
6. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966.
7. Альховский Э.А., Ильинский А.С., Трошин Г.И. // РЭ. 1974. Т. 19. № 6. С. 1136.
8. Иларионов Ю.А., Раевский А.С., Раевский С.Б., Седаков Ю.А. Устройства СВЧ- и КВЧ-диапазонов. Методы расчета. Алгоритмы. Технологии изготовления. М.: Радиотехника, 2013.
9. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Рудь Л.А. Резонансное рассеяние волн. Киев: Наук. думка, 1986.
10. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
11. Белов Ю.Г., Раевский С.Б. // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 10. С. 1523.
12. Данилов И.Н., Майстренко В.К. // Антенны. 2013. № 11. С. 37.
13. Гаранин С.М., Данилов И.Н., Майстренко В.К. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 2. С. 18.
14. Данилов И.Н., Майстренко В.К. // Антенны. 2015. № 2. С. 35.
15. Данилов И.Н., Майстренко В.К. // РЭ. 2015. Т. 60. № 2. С. 149.
16. Гаранин С.М., Данилов И.Н. // Антенны. 2017. № 4. С. 55.
17. Гаранин С.М., Данилов И.Н., Новоселова Н.А., Раевский С.Б. // Антенны. 2017. № 11. С. 50.