РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2019, том 64, № 11, с. 1122–1125

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 538.566.2;621.372.8

ОСЕВЫЕ И ВИНТОВЫЕ МЕТАЧАСТИЦЫ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

© 2019 г. В. В. Шевченко*

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация
**E-mail: sto@cplire.ru*

Поступила в редакцию 25.03.2019 г.
После доработки 17.04.2019 г.
Принята к публикации 19.04.2019 г.

Представлены свойства импульсных волновых полей осевых и винтовых метачастиц. Рассмотрен пример излучения таких метачастиц апертурным источником. Приведен расчет ширины поля и плотности энергии основной (нулевой) метачастицы в дальней зоне от излучающей апертуры.

DOI: 10.1134/S0033849419110238

1. В работе [1] были введены понятия метачастиц импульсных волновых полей (электромагнитного, акустического), направленно излученных апертурными источниками (антеннами, лазерами, акустическими мембранами) и распространяющихся в свободном пространстве и в однородных изотропных средах. Структурные функции полей метачастиц представлены в цилиндрических координатах r, φ, z (рис. 1). В работе [2] рассмотрен пример излучения метачастиц с осесимметричными, не зависящими от угла φ структурными функциями полей при излучении апертурным источником осесимметричного волнового импульса в направлении оси z.

В данной статье рассмотрены свойства и излучение волнового импульса с неосесимметричным полем, представленного здесь несколько иначе, чем в [1]: в виде набора осевых и винтовых метачастиц. При этом используются указанные упрощенные названия метачастиц: с осесимметричными полями – осевые метачастицы, а с неосесимметричными полями – винтовые метачастицы. Случай набора только осевых метачастиц, как сказано выше, рассмотрен в статье [2].

2. Функции полей осевых и винтовых метачастиц представим в виде

$$f_{lmn}(r,\varphi,z,t) = \bar{C}_l \bar{U}_l(z,t)\bar{C}_{mn}\bar{V}_n^{(m)}(r,\varphi,z)\times \times \exp[-i(kz-\omega t)], \tag{1}$$

где $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 0$ у осевых метачастиц, $m = 1, 2, 3\ldots$ у винтовых метачастиц, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\bar{C}_l$, $\bar{C}_{mn}$ – амплитудные константы, $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$, λ – длина волны, ω – круговая частота поля, v – скорость распространения импульсных волновых метачастиц, $v = c$ – для электромагнитных метачастиц в свободном пространстве, t – время.

Структурную функцию полей метачастиц $\bar{U}_l(z,t)$ представим с учетом внесенной в [2] поправки в виде

$$\bar{U}_l(z,t) = U_l(\zeta) = N_l^{-1}H_l(\zeta)\exp\left(-\zeta^2/2\right), \tag{2}$$

где $N_l = \left(2^l l!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}$, $H_l(\zeta)$ – полином Эрмита [3–10],

$$\zeta = (z-vt)/L = \delta_L(kz-\omega t),$$
$$\delta_L = \frac{1}{kL} = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{2L},\quad \delta_L^2 \ll 1 \quad \text{при} \quad \frac{\lambda}{2L} \le 1, \tag{3}$$

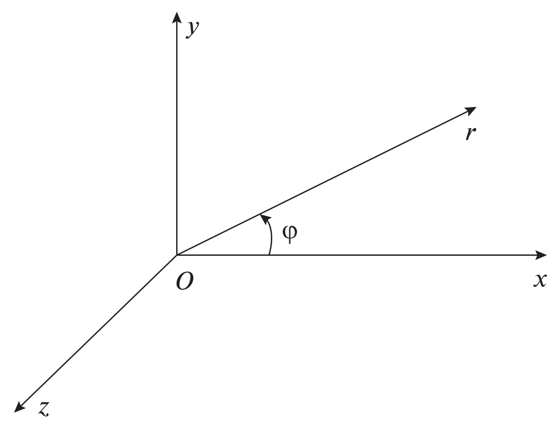

Рис. 1. Применяемая система координат.

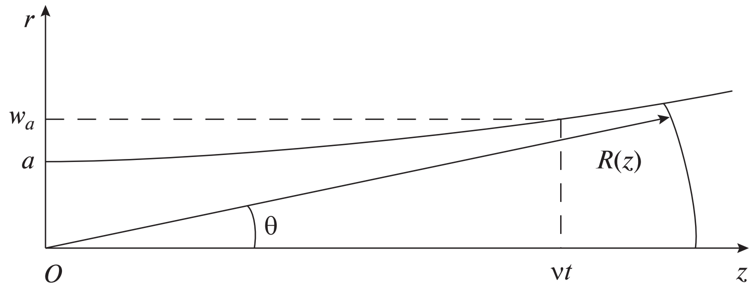

Рис. 2. Функция изменения эффективной полуширины (радиуса) поля метачастицы $w_a(z)$ при распространении метачастицы вдоль оси z [1], где предельный угол $\theta \le \mathrm{tg}\theta = \lim\limits_{z\to\infty}(w_a/z) = \delta_a = 1/(ka)$.

L – эффективная полудлина импульса поля метачастицы вдоль оси z, ω – средняя (несущая) частота узкой, при условии (3), полосы частот импульса метачастицы [2].

Аналогично представим функцию $\bar V_n^{(m)}(r,\varphi,z)$ в виде

$$\begin{gathered}\bar V_n^{(m)}(r,\varphi,z) = V_n^{(m)}(\rho,\varphi,z) = \\ = (\bar N_{mn})^{-1} W_n^{(m)}(\rho,z)\exp(-im\varphi),\end{gathered} \tag{4}$$

где $\bar N_{mn} = \sqrt{2\pi}\cos\sigma N_{mn}$, $N_{mn} = [(m+n)!/n!]^{1/2}$,

$$\begin{gathered}W_n^{(m)}(\rho,z) = \cos\sigma K_n^{(m)}(\rho)\times \\ \times\exp\left\{-\rho^2/2 + i\left[(1+m+2n)\sigma - u_z\rho^2/2\right]\right\},\end{gathered} \tag{5}$$

$K_n^{(m)}(\rho) = \rho^m L_n^{(m)}(\rho^2)$, $L_n^{(m)}(\rho^2)$ – обобщенный полином Лагерра [3–10], $\rho = r/w_a$, $w_a = a/\cos\sigma$, $\sigma = \mathrm{arctg}u_z$, $\cos\sigma = (1+u_z^2)^{-1/2}$, $u_z = \delta_a z/a = \delta_a^2 kz$,

$$\delta_a = \frac{1}{ka} = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{2a}, \quad \delta_a^2 \ll 1 \ \text{ при } \ \frac{\lambda}{2a} \le 1, \tag{6}$$

a – радиус круглой излучающей апертуры (рис. 2).

Для структурных функций (2), (4) выполняются условия ортонормировки [1, 2, 5]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_l(\zeta)U_{l'}(\zeta)\,d\zeta = \begin{cases}1 & \text{при } \ l = l', \\ 0 & \text{при } \ l \ne l',\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{\infty}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} V_n^{(m)}(\rho,\varphi,z)V_{n'}^{(m')*}(\rho,\varphi,z)\,d\varphi\right]2\rho d\rho = \\ = \begin{cases}1 & \text{при } \ m' = m,\ n' = n, \\ 0 & \text{при } \ m' \ne m, \\ 0 & \text{при } \ n' \ne n.\end{cases}\end{gathered} \tag{8}$$

Последнее выражение следует из того, что при этом выполняются соотношения [6–10]:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(-im\varphi)[\exp(-im'\varphi)]^* d\varphi = \\ = \frac{2\sin(m-m')\pi}{m-m'} = \begin{cases}2\pi & \text{при } \ m' = m, \\ 0 & \text{при } \ m' \ne m,\end{cases}\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{\infty} W_n^{(m)}(\rho,z)W_{n'}^{(m)*}(\rho,z)\,2\rho d\rho = \\ = \begin{cases}\cos^2\sigma N_{mn}^2 & \text{при } \ n' = n, \\ 0 & \text{при } \ n' \ne n.\end{cases}\end{gathered} \tag{10}$$

3. Условия ортонормировки (7), (8) дают возможность стандартным способом [1–5] вычислять амплитудные коэффициенты $\bar C_l$, $\bar C_{mn}$ при разложении в ряд по метачастицам поле волнового импульса, излученного источником, апертура которого расположена в плоскости $z = 0$ (см. рис. 2). Представим функцию поля такого импульса на апертуре в виде

$$f(r,\varphi,0,t) = M(\zeta,\rho)U(\zeta)V(\rho,\varphi)\exp(i\omega t), \tag{11}$$

где $\zeta = -\nu t/L$, $\rho = r/a$ при $z = 0$,

$$M(\zeta,\rho) = \begin{cases}1 & \text{при } \ -1 \le \zeta \le 1,\ \rho \le 1, \\ 0 & \text{при } \ \zeta < -1,\ 1 < \zeta,\ 1 < \rho,\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}U(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty}\bar C_l U_l(\zeta), \\ V(\rho,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\bar C_{mn}V_n^{(m)}(\rho,\varphi,0).\end{gathered} \tag{13}$$

Тогда коэффициенты разложения поля излученного импульса равны

$$\begin{gathered}\bar C_l = \int\limits_{-1}^{1} U(\zeta)U_l(\zeta)\,d\zeta, \\ \bar C_{mn} = \int\limits_0^1\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} V(\rho,\varphi)V_n^{(m)*}(\rho,\varphi,0)\,d\varphi\right]2\rho d\rho,\end{gathered} \tag{14}$$

причем не только для разложения поля импульса на апертуре, т.е. в плоскости $z = 0$, но и в пространстве при $z > 0$:

$$\bar{U}(z,t) = U(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{C}_l U_l(\zeta),$$
$$\bar{V}(r,\varphi,z) = V(\rho,\varphi,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{mn} V_n^{(m)}(\rho,\varphi,z), \quad (15)$$

где $\zeta = (z - \nu t)/L$, $\rho = (r/a)\cos\sigma$.

В результате функцию поля импульса, излученного апертурным источником, можно представить в виде суммы функций полей метачастиц:

$$f(r,\varphi,z,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_{lmn}(r,\varphi,z,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{C}_l U_l(\zeta) \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{mn} V_n^{(m)}(\rho,\varphi,z) \times \exp[-i(kz - \omega t)], \quad (16)$$

где амплитудные коэффициенты $\bar{C}_l$, $\bar{C}_{mn}$ вычисляются по формулам (14).

При этом относительная (безразмерная [1, 2]) энергия, переносимая излученным импульсом, равна сумме долей энергии, переносимых метачастицами:

$$\bar{Э} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{Э}_{lmn}, \quad (17)$$

где соответствующие доли энергии метачастиц равны

$$\bar{Э}_{lmn} = \bar{C}_l^2 \bar{C}_{mn}^2. \quad (18)$$

4. Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции $U(\zeta)$, $V(\rho,\varphi)$ в выражении (11) для поля на апертуре источника, т.е. при $z = 0$, имеют вид

$$U(\zeta) = e\left(\sqrt[4]{\pi}/2\right)\exp\left(-\zeta^2/2\right),$$
$$V(\rho,\varphi) = \left(e\sqrt{2/\pi}\right)\exp\left[-\left(\rho^2 + i\varphi\right)/2\right]. \quad (19)$$

Тогда для четных и нечетных l: $l = 2\upsilon$, $l = 2\upsilon - 1$, получим, как в работе [2]:

$$\bar{C}_{\upsilon=0} = 2, \quad \bar{C}_{2\upsilon} = \mp\frac{1}{\sqrt{(2\upsilon)!}}, \quad \bar{C}_{2\upsilon-1} = 0, \quad (20)$$

где $\upsilon = 1, 2, 3\ldots$, а на основании [6–10] и изложенного выше получим

$$\bar{C}_{mn} = C_m C_{mn}, \quad (21)$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$C_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(m - 1/2)\varphi]\,d\varphi = \frac{2\sin[(2m-1)\pi/2]}{\pi(2m-1)} = \frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}, \quad (22)$$

$$C_{mn} = \frac{e}{N_{mn}}\int_0^1 \exp\left(-\rho^2\right) K_n^{(m)}(\rho)\,2\rho\,d\rho = \frac{e}{N_{mn}}\int_0^1 \exp(-x)\,x^{m/2} L_n^{(m)}(x)\,dx = \frac{e}{[(m+n)!\,n!]^{1/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+n+k)!(-1)^k}{(m/2+k+1)(m+k)!\,k!}, \quad (23)$$

$$C_{00} = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!} = e - 1, \quad C_{01} = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k)!} = 1,$$
$$C_{10} = 2e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+3)k!}, \quad C_{11} = e\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(-1)^k}{(2k+3)k!}, \quad (24)$$

и аналогично остальные C_{mn}. Здесь представлены первые четыре коэффициента, имеющие наибольшие значения величины модуля.

Оценочный численный расчет энергии рассматриваемого импульса проведем приближенно по формулам (20)–(24), учитывая только старшие (существенные по величине модулей) коэффициенты $\bar{C}_{2\upsilon}$, $\bar{C}_{mn}$ в разложении поля излученного импульса. Для первых восьми метачастиц получим $\bar{C}_{2\upsilon}$: $\bar{C}_0 = 2$, $\bar{C}_2 = -1/\sqrt{2}$; C_m: $C_0 = 2/\pi$, $C_1 = 2/\pi$; C_{mn}: $C_{00} = e - 1$, $C_{11} = 1.07$, $C_{01} = 1$, $C_{10} = 0.88$. Доли энергии метачастиц при этом равны: $\bar{Э}_{000} = 4.79$, $\bar{Э}_{011} = 1.85$, $\bar{Э}_{001} = 1.62$, $\bar{Э}_{010} = 1.27$, $\bar{Э}_{100} = 0.60$, $\bar{Э}_{111} = 0.23$, $\bar{Э}_{101} = 0.20$, $\bar{Э}_{110} = 0.16$. Суммарная же относительная энергия составляет $\bar{Э}(\Sigma = 8) = 10.72$. Поскольку первые четыре метачастицы имеют энергию $\bar{Э}(\Sigma = 4) = 9.53$, то оказывается, что эти метачастицы (две осевые с $m = 0$ и две винтовые с $m = 1$) переносят около 90% энергии рассматриваемого импульса, так как $\bar{Э}(\Sigma = 4)/\bar{Э}(\Sigma = 8) \approx 0.9$.

5. В заключение приведем оценочный расчет размера ширины поля и плотности энергии нулевой (000) метачастицы в общем случае и отдельно для дальней зоны от излучающей апертуры.

Эффективный размер полуширины (радиуса) поля нулевой метачастицы (см. п. **2**) равен

$$w_a = a\left[1 + \left(\frac{\delta_a z}{a}\right)^2\right]^{1/2} \quad \text{и} \quad w_a \approx \delta_a z = \frac{\lambda z}{2\pi a} \quad (25)$$

при $(\delta_a z/a)^2 \gg 1$. При следующих параметрах: радиусы апертуры источника света $a = 5$; 0.5 и 0.05 м, длина волны $\lambda = 0.4 \times 10^{-6}$ м и расстояние от Земли до Луны $z \approx 400 \times 10^6$ м [11], приведем в качестве примера размеры светового пятна на поверхности Луны: $2w_a \approx 10\sqrt{2}$, 100 и 1000 м.

Средняя за период колебания плотность энергии метачастицы изменяется вдоль оси z от значения $\Pi_a = \bar{Э}_{000}/V_a$ в области апертуры до $\Pi_w = \bar{Э}_{000}/V_w$, где отношение эффективных объемов поля метачастицы $V_w/V_a = a^2/w_a^2$.

Отсюда имеем

$$\frac{\Pi_w}{\Pi_a} = \left(\frac{a}{w_a}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{\delta_a z}{a}\right)^2\right]^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{\Pi_w}{\Pi_a} \approx \left(\frac{2\pi a^2}{\lambda z}\right)^2 \quad (26)$$

при $(\delta_a z/a)^2 \gg 1$. Для отношения указанных плотностей энергии метачастицы вблизи поверхности Луны и в области около апертуры источника на Земле в приведенном выше примере получим $\Pi_w/\Pi_a \approx 0.5$, 10^{-4}, 10^{-6}.

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шевченко В.В.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 9. С. 899.
2. *Шевченко В.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 3. С. 265.
3. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
4. *Katsenelenbaum B.Z.* High-frequency Electrodynamics. Weinheim: Wiley-VCH, 2006.
5. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Дрофа, 2006.
6. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1964.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
8. Справочник по специальным функциям. Сб. статей / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979.
9. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
10. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
11. *Шевченко В.В.* Луна. Физическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1990. Т. 2. С. 613.