РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2019, том 64, № 12, с. 1244–1252

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

# РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

© 2019 г. В. А. Сыровой*

*ВЭИ – филиал ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ,*
*ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация*

**E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 05.04.2018 г.
После доработки 05.04.2018 г.
Принята к публикации 25.04.2018 г.

Приведены точные трехмерные решения, описывающие нестационарные нерелятивистские электронные потоки в однородном магнитном поле, причем предпочтение при исследовании отдано осцилляционным режимам.

**DOI:** 10.1134/S0033849419100127

## ВВЕДЕНИЕ

Нестационарные нерелятивистские пучки в однородном магнитном поле $\vec{H}$ описываются следующей системой уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \nabla\varphi + \vec{v}\times\vec{H},$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0, \quad \Delta\varphi = \rho, \tag{1}$$
$$\vec{H} = \{H_x, H_y, H_z\},$$

где $\vec{v}$ – вектор скорости, $\varphi$ – потенциал электрического поля, $\rho$ – плотность пространственного заряда. Формулы (1) и последующие соотношения записаны в нормировке, устраняющей физические константы используемой системы единиц [1].

До последнего времени было известно всего два решения в элементарных функциях, описывающих пространственные электронные потоки с зависимостью от всех трех декартовых координат $x$, $y$, $z$ и притом не имеющих аксиальной симметрии. В работе [2] рассмотрено соленоидальное потенциальное течение в отсутствие магнитного поля с однородной плотностью пространственного заряда $\rho$ и вектором скорости

$$\vec{v} = \{u, v, w\} = \{ax, by, -(a+b)z\}, \tag{2}$$

траектории которого представляют собой пересечение двух семейств поверхностей

$$xyz = \text{const}, \quad x^b y^{-a} = \text{const}. \tag{3}$$

Здесь и ниже не поясняемые символы ($a$, $b$ в (2)) и символы с индексом нуль считаются константами.

В работе [3] движение по эллиптическим орбитам в плоскости $x$, $y$ в однородном магнитном поле $H_z$ развертывается в $z$-направлении со скоростью $w$, изменяющейся по закону укороченной циклоиды:

$$\vec{v} = \left\{\left(\Omega + \frac{1}{2}H_z\right)y, \left(\Omega - \frac{1}{2}H_z\right)x, w(z)\right\}, \tag{4}$$
$$\bar{z} = \tau - \gamma\sin\tau, \quad \bar{w} = 1 - \gamma\cos\tau, \quad \rho w = J_0,$$

где $\tau$ – параметр.

Течения (2), (4) являются моноэнергетическими, плотность пространственного заряда в (4) периодически меняется с изменением координаты $z$, причем в этих формулах использована удобная дополнительная нормировка ($\bar{z}, \bar{w}$) [1].

Число решений для пространственных стационарных пучков существенно увеличено в работе [4]. При их анализе оказалось удобным ввести понятия $z$-соленоидальных и $z$-потенциальных потоков, определяемых соответственно соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -H_z. \tag{5}$$

Структура компонент скорости для $z$-соленоидальных течений описывается выражениями

$$u = ay + J_1(z), \quad v = bx + J_2(z), \quad w = w(z), \tag{6}$$

для $z$-потенциальных потоков –

$$u = ax + by + J_1(z),\ \ v = cx + ay + J_2(z),$$
$$w = w(z), \tag{7}$$
$$b = \Omega + \frac{1}{2}H_z,\ \ c = \Omega - \frac{1}{2}H_z.$$

Плотность пространственного заряда в обоих случаях зависит от продольной координаты $z$, а траектории частиц являются пространственными кривыми.

В работе [5] на основе исследования групповых свойств уравнений нестационарного пучка проведено построение наиболее полного набора точных решений и выполнен предварительный анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают эти решения. Течения (6), (7) характеризуются аддитивным разделением переменных в выражениях для компонент скорости. В отличие от решений этого типа ниже рассмотрены потоки, для которых линейная аддитивная зависимость от $z$ сочетается с довольно произвольной зависимостью от двух других координат, в отдельных случаях сводящейся к мультипликативному разделению переменных. Решения для трехмерных нестационарных потоков в элементарных функциях приводятся, по-видимому, впервые.

## 1. РЕШЕНИЯ ПЕРВОГО ТИПА

Рассмотрим решения, определяемые формулами

$$u = U(t,x),\ \ v = V(t,x),$$
$$w = \frac{h'}{h}z + \exp(\nu y)W(t,x), \tag{8}$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{h''}{h}z^2 + \Phi(t,x),\ \ \rho = \rho(t,x);\ \ H_x = H_y = 0,$$

где $h = h(t)$ – произвольная функция времени.

1.1. При $h = \exp(at)$ имеем

$$u = xI_1(t),\ \ v = xI_2(t),$$
$$\varphi = \frac{1}{2}a^2z^2 + x^2I_4(t),\ \ \rho = I_5(t), \tag{9}$$

причем функции $I_k(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$I_1' + I_1^2 = 2I_4 + I_2H_z,\ \ I_2' + I_1I_2 = -I_1H_z,$$
$$I_5' + (I_1 + a)I_5 = 0,\ \ 2I_4 = I_5 - a^2; \tag{10}$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial x} + (a + \nu V)W = 0.$$

Полагая $I_1 = I'/I$, преобразуем систему (10) к следующим соотношениям:

$$I_2 = -H_z + \frac{V_0}{U},\ \ I_5 = \frac{\rho_0}{I}\exp(-at),\ \ I_4 = \frac{1}{2}\left(I_5 - a^2\right),$$
$$I'' + \omega^2 I = \rho_0\exp(-at) + V_0H_z,\ \ \omega^2 = a^2 + H_z^2, \tag{11}$$
$$W = \exp\left[-at - \nu\xi\int I_2dt\right]W(\xi),\ \ \xi = \frac{x}{I(t)},$$

где $W(\xi)$ – произвольная функция.

Решение уравнений для $I$, $I_1$ имеет вид

$$I = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{\rho_0}{a^2 + \omega^2}\exp(-at) + \frac{V_0H_z}{\omega^2},$$
$$\omega^2 = a^2 + H_z^2;\ \ I_1 = \frac{I'}{I}, \tag{12}$$
$$I' = \omega(-A\cos\omega t + B\sin\omega t) - \frac{a\rho_0}{a^2 + \omega^2}\exp(-at).$$

Константы в формулах (12) можно подобрать так, чтобы функция $I$ никогда не обращалась в нуль. При $\exp(-at) \to \infty$, $W(\xi) = W_0\xi$ решение (9) выходит на стационарный режим:

$$u = -ax,\ \ v = -H_zx,$$
$$w = az + W_0x\exp\left[\nu\left(y - \frac{H_z}{a}x\right)\right], \tag{13}$$
$$\varphi = \frac{1}{2}a^2z^2 + \frac{1}{2}\left(a^2 + H_z^2\right)x^2,\ \ \rho = 2a^2 + H_z^2.$$

Траектории для потока (13) определены уравнениями

$$y - y_0 = \frac{H_z}{a}x,\ \ \frac{1}{2}W_0\exp(\nu y_0)x^2 + xz = \text{const}. \tag{14}$$

В координатах $\bar{x}$, $\bar{z}$, повернутых относительно $x$, $z$ на угол $\alpha$, они представляют собой гиперболы:

$$\left(\sqrt{\bar{W}_0^2 + 1} + \bar{W}_0\right)\bar{x}^2 - \left(\sqrt{\bar{W}_0^2 + 1} - \bar{W}_0\right)\bar{z}^2 = \text{const},$$
$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{1}{\bar{W}_0},\ \ \bar{W}_0 = \frac{1}{2}W_0\exp(\nu y_0). \tag{15}$$

1.2. При $h = \exp(at)$ существует трехмерное стационарное решение

$$u = U(x),\ \ v = V(x),$$
$$w = az + W_0\exp\left(\nu y - \int\frac{a + \nu V}{U}dx\right), \tag{16}$$
$$\varphi = \frac{1}{2}a^2z^2 + \Phi(x),\ \ \rho = \rho(x).$$

Функции из (16) удовлетворяют уравнениям

$$UU' = \Phi' + VH_z,\ \ V' = -H_z,$$
$$(\rho U)' + a\rho = 0,\ \ \Phi'' = \rho - a^2. \tag{17}$$

Полагая $U = dx/dt \equiv \dot{x}$, получаем

$$
\begin{gathered}
V = -H_z x + V_0, \quad \rho U = J_0 \exp(-at), \\
\Phi' = -\frac{J_0}{a}\exp(-at) - a^2 x + E_0, \\
\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{J_0}{a}\exp(-at) + E_0 + V_0 H_z, \qquad (18) \\
\omega^2 = a^2 + H_z^2, \\
\dot{\Phi} = \dot{x}\Phi' = -\frac{J_0}{a}\dot{x}\exp(-at) - \frac{1}{2}a^2\left(x^2\right)^{\cdot} + E_0\dot{x}.
\end{gathered}
$$

Решение уравнений (18) приводит к соотношениям

$$
\begin{gathered}
x = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \bar{J}_0\exp(-at) + \bar{E}_0, \\
U = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t) + a\bar{J}_0\exp(-at), \\
V = -H_z x + V_0, \quad w = az + W_0\exp(-at), \\
\varphi = \frac{1}{2}a^2 z^2 - \frac{1}{2}a^2\left(A^2 - B^2\right)\cos 2\omega t - \frac{1}{2}a^2 AB\sin 2\omega t + \\
+\frac{1}{2}\omega^2\bar{J}_0^2\exp(-2at) + \bar{J}_0\exp(-at)\times \qquad (19) \\
\times\left\{\left[-a\omega A + \left(a^2 - \omega^2\right)B\right]\sin\omega t + \right. \\
\left. + \left[a\omega B + \left(a^2 - \omega^2\right)A\right]\cos\omega t\right\} + \\
+ \left(E_0 - a^2\bar{E}_0\right)\left[-\bar{J}_0\exp(-at) + A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]; \\
\bar{J}_0 = \frac{J_0}{a\left(a^2 + \omega^2\right)}, \quad \bar{E}_0 = \frac{E_0 + V_0 H_z}{\omega^2}.
\end{gathered}
$$

Выражение, определяющее $x$ как функцию от $t$: $x = x(t)$ в (19), должно быть дополнено аналогичными зависимостями $y = y(t)$, $z = z(t)$ для параметрического описания траекторий:

$$
\begin{gathered}
y - y_0 = V_0 t - H_z \times \\
\times\left[\frac{1}{\omega}(A\sin\omega t - B\cos\omega t) + \frac{\bar{J}_0}{a}\exp(-at) + \bar{E}_0 t\right], \qquad (20) \\
z = C\exp(at) - \frac{W_0}{2a}\exp(-at).
\end{gathered}
$$

Рассматривая плоскость $x = 0$ в качестве стартовой поверхности с нулевыми начальными скоростями $u = v = 0$ и полем $\Phi' = 0$ ($E_0 = J_0/a$), получим

$$
\begin{gathered}
x = \bar{J}_0\left[\cos\omega t - \exp(-at)\right] + \\
+ \frac{J_0}{a\omega^2}(1 - \cos\omega t) - \frac{a}{\omega}\bar{J}_0\sin\omega t, \qquad (21) \\
\dot{y} = -H_z x, \quad V_0 = 0.
\end{gathered}
$$

Асимптотика решения (21) при малых $t$ определена формулами

$$
\begin{gathered}
x = \frac{1}{6}J_0 t^3 - \frac{1}{24}aJ_0 t^4 + \ldots, \\
t = \left(\frac{6}{J_0}\right)^{1/3} x^{1/3}\left[1 + \left(\frac{6}{J_0}\right)^{1/3}\frac{a}{12}x^{1/3} + \ldots\right], \\
\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{9J_0}{2}\right)^{2/3} x^{4/3}\left[1 - \left(\frac{6}{J_0}\right)^{1/3}\frac{a}{15}x^{1/3} + \ldots\right], \qquad (22) \\
y - y_0 = -H_z\left(\frac{1}{24}J_0 t^4 - \frac{1}{120}aJ_0 t^5 + \ldots\right), \\
z - z_0 = \left(z_0 + \frac{W_0}{a}\right)t + \frac{1}{2}z_0 a^2 t^2 + \ldots,
\end{gathered}
$$

из которых видно, что в плоскости ($x$, $y$) для функций $u$, $v$, $\Phi$ выполнены условия эмиссии в $\rho$-режиме, однако плоскость $x = 0$ не является поверхностью $\varphi = \mathrm{const}$: потенциал на ней меняется по параболическому закону с изменением координаты $z$. В соответствии с этим старт частиц происходит по касательной к плоскости $x = 0$ в направлении $z$.

## 2. РЕШЕНИЯ ВТОРОГО ТИПА

Решения второго типа в цилиндрических координатах $R$, $\psi$, $z$ с компонентами скорости $v_R$, $v_\psi$, $w$ определены формулами

$$
\begin{gathered}
v_R = RU(t,\psi), \; v_\psi = RV(t,\psi), \\
w = \frac{h'}{h}z + R^\nu W(t,\psi), \qquad (23) \\
\varphi = \frac{1}{2}\frac{h''}{h}z^2 + R^2\Phi(t,\psi), \quad \rho = \rho(t,\psi).
\end{gathered}
$$

2.1. Рассмотрим решение вида (23) при $h'/h = a$

$$
\begin{gathered}
v_R = RI_1(\xi), \quad v_\psi = RI_2(\xi), \quad w = az + R^\nu W(t,\psi), \\
\varphi = \frac{1}{2}a^2 z^2 + R^2 I_4(\xi), \quad \rho = I_5(\xi), \quad \xi = t - \beta\psi, \qquad (24)
\end{gathered}
$$

удовлетворяющее следующей системе уравнений:

$$
\begin{gathered}
(1 - \beta I_2)I_1' + I_1^2 - I_2^2 = 2I_4 + H_z I_2, \\
(1 - \beta I_2)I_2' + 2I_1 I_2 = -\beta I_4' - H_z I_1, \\
I_5' - \beta(I_2 I_5)' + (2I_1 + a)I_5 = 0, \qquad (25) \\
\beta^2 I_4'' + 4I_4 = I_5 - a^2; \\
\frac{\partial W}{\partial t} + V\frac{\partial W}{\partial\psi} + (a + \nu U)W = 0.
\end{gathered}
$$

Система (25) имеет частное решение

$$I_1 = -\frac{a}{2},\quad I_2 = -\frac{H_z}{2},\quad I_4 = \frac{1}{8}\left(a^2 + H_z^2\right),$$
$$I_5 = \frac{1}{2}\left(3a^2 + H_z^2\right), \tag{26}$$
$$W = W(\eta)\exp\left[a\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)t\right],\quad \eta = \psi + \frac{1}{2}H_z t,$$

где $W(\eta)$ – произвольная функция.

Формула (24) в этом случае принимает вид

$$v_R = -\frac{a}{2}R,\quad v_\psi = -\frac{H_z}{2}R,$$
$$\varphi = \frac{1}{2}a^2z^2 + \frac{1}{8}\left(a^2 + H_z^2\right)R^2,\quad \rho = \frac{1}{2}\left(3a^2 + H_z^2\right), \tag{27}$$
$$w = az + R^\nu \exp\left[a\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)t\right]W(\eta).$$

Если $a > 0$, $\nu < 2$ и $t \to \infty$, то течение (27) переходит в стационарный осесимметричный режим с гиперболоподобными трубками тока [6]. При $\nu = 2$ затухание по времени можно устранить, а $W(\eta)$ сделать периодической функцией, содержащей различные гармоники:

$$W = R^2\cos^3\eta = \frac{1}{4}R^2(\cos 3\eta + 3\cos\eta),$$
$$W = R^2\cos^5\eta = \frac{1}{16}R^2(\cos 5\eta + 5\cos 3\eta + 9\cos\eta). \tag{28}$$

В проекции на плоскость $z = \mathrm{const}$ частицы движутся по скручивающейся или раскручивающейся спирали

$$R = R_0\exp\left(a\psi/H_z\right). \tag{29}$$

## 3. РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ТИПА

Для решений третьего типа параметры пучка имеют вид

$$v_R = U(t,R),\quad v_\psi = V(t,R),$$
$$w = \frac{h'}{h}z + \exp(\nu\psi)W(t,R), \tag{30}$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{h''}{h}z^2 + \Phi(t,R),\quad \rho = \rho(t,R).$$

3.1. Рассмотрим электростатический поток при $h = t^c$, определяемый выражениями

$$v_R = t^\alpha I_1(\xi),\quad v_\psi = t^\alpha I_2(\xi),$$
$$w = \frac{c}{t}z + \exp(\nu\psi)t^\beta I_3(\xi),$$
$$\varphi = \frac{c(c-1)}{t^2}z^2 + t^{2\alpha}I_4(\xi),\quad \rho = \frac{1}{t^2}I_5(\xi), \tag{31}$$
$$\xi = Rt^{-\alpha-1}.$$

Функции в (31) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$[I_1 - (\alpha+1)\xi]I_1' + \alpha I_1 - \frac{1}{\xi}I_2^2 = I_4',$$
$$[I_1 - (\alpha+1)\xi]I_2' + \alpha I_2 + \frac{1}{\xi}I_1I_2 = 0,$$
$$[I_1 - (\alpha+1)\xi]I_3' + \left(\beta + c + \frac{\nu}{\xi}I_2\right)I_3 = 0, \tag{32}$$
$$(I_1I_5)' - (\alpha+1)\xi I_5' + (c-2)I_5 + \frac{1}{\xi}I_1I_5 = 0,$$
$$I_4'' + \frac{1}{\xi}I_4' = I_5 - c(c-1).$$

Построим частное решение системы (32) при $I_2 = \mathrm{const}$:

$$I_2 = V_0,\quad I_1 = -\alpha\xi,\quad I_4' = -\frac{V_0^2}{\xi} + \alpha(\alpha+1)\xi. \tag{33}$$

Используя выражение для $I_4'$ в последнем уравнении (32), получим

$$I_5 = c(c-1) + 2\alpha(\alpha+1). \tag{34}$$

Уравнение для $I_5$ в (34) устанавливает связь параметров $\alpha$ и $c$:

$$c = 2(\alpha+1),\quad I_5 = 6\alpha^2 + 8\alpha + 2. \tag{35}$$

Из уравнений для $I_3$ в (32) и $I_4'$ в (33) находим

$$I_3 = W_0\xi^\mu\exp\left(-\frac{\nu V_0}{2\alpha+1}\frac{1}{\xi}\right),\quad \mu = \frac{\beta + 2\alpha + 2}{2\alpha+1},$$
$$I_4 = -V_0^2\ln\xi + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\xi^2 + \Phi_0. \tag{36}$$

В окончательном виде решение описывается формулами

$$v_R = -\frac{\alpha}{t}R,\quad v_\psi = V_0t^\alpha,\quad w = \frac{2(\alpha+1)}{t}z +$$
$$+ W_0t^{\beta-(\alpha+1)\mu}R^\mu\exp\left(\nu\psi - \frac{\nu V_0}{2\alpha+1}\frac{t^{\alpha+1}}{R}\right),$$
$$\varphi = \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{t^2}z^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2}R^2 + \tag{37}$$
$$+ t^{2\alpha}\left[-V_0^2\ln\left(Rt^{-\alpha-1}\right) + \Phi_0\right],$$
$$\rho = \frac{6\alpha^2 + 8\alpha + 2}{t^2}.$$

Решение (37) справедливо при $\psi < 2\pi$, однако это не препятствует его использованию в качестве эталона при тестировании.

## 4. РЕШЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ТИПА

Решения четвертого типа описываются формулами

$$\begin{gathered} v_R = RU(t,\psi), \quad v_\psi = RV(t,\psi), \\ w = az + RW(t,\psi), \\ \varphi = \frac{1}{2}a^2z^2 + R^2\Phi(t,\psi) + aH_\psi Rz, \quad \rho = \rho(t,\psi). \end{gathered} \tag{38}$$

Компоненты магнитного поля в системах $x$, $y$ и $R$, $\psi$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered} H_R = H_x\cos\psi + H_y\sin\psi, \\ H_\psi = -H_x\sin\psi + H_y\cos\psi. \end{gathered} \tag{39}$$

4.1. Рассмотрим стационарное решение с функциями из (38) вида

$$\begin{gathered} U = U(\psi), \; V = V(\psi), \; W = W(\psi), \\ \Phi = \Phi(\psi), \;\; \rho = \rho(\psi), \end{gathered} \tag{40}$$

удовлетворяющее следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} VU' + U^2 - V^2 = 2\Phi + VH_z - WH_\psi, \\ VV' + 2UV = \Phi' - UH_z + WH_R, \\ VW' + (a+U)W = UH_\psi - VH_R, \\ (\rho V)' + (a+2U)\rho = 0, \quad \Phi'' + 4\Phi = \rho - a^2. \end{gathered} \tag{41}$$

Построим частное решение системы (41) при $V = 0$. В этом случае

$$\begin{gathered} U = -\frac{a}{2}, \quad \Phi' = -\frac{a}{2}H_z - H_RW, \\ 2\Phi = \frac{a^2}{4} + WH_\psi, \quad W = -H_\psi. \end{gathered} \tag{42}$$

Учитывая связи

$$H_R' = H_\psi, \quad H_\psi' = -H_R, \tag{43}$$

обнаруживаем, что уравнения для $\Phi$ в (42) совместны при $H_z = 0$. В результате получаем

$$\begin{gathered} \Phi = \frac{a^2}{8} - \frac{1}{2}H_\psi^2, \quad \Phi' = H_RH_\psi, \\ \Phi'' = H_\psi^2 - H_R^2, \quad \rho = \frac{3}{2}a^2 - \left(H_x^2 + H_y^2\right). \end{gathered} \tag{44}$$

Вытекающее из нормировок условие $\rho > 0$ требует соответствующего соотношения между параметром $a$ и величиной магнитного поля.

Окончательный вид решения описывается формулами

$$\begin{gathered} v_R = -\frac{a}{2}R, \quad v_\psi = 0, \quad w = az - RH_\psi, \\ \varphi = \frac{1}{2}a^2z^2 + aRzH_\psi + \frac{1}{2}R^2\left(\frac{a^2}{4} - H_\psi^2\right), \\ \rho = \frac{3}{2}a^2 - \left(H_x^2 + H_y^2\right). \end{gathered} \tag{45}$$

Течение (45) является вихревым и немоноэнергетическим со следующими компонентами ротора обобщенного импульса $\vec{P}$ и полной энергией $\mathscr{H}$:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\vec{P} = \operatorname{rot}\left(\vec{v} + \vec{A}\right) = \left\{2H_R, 2H_\psi, 0\right\}, \\ \mathscr{H} = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \varphi = RH_\psi\left(RH_\psi - 2az\right). \end{gathered} \tag{46}$$

Решение (45) соответствует слоистому потоку с отсутствием перетекания между плоскостями $\psi = \mathrm{const}$ в силу $v_\psi = 0$ при наличии азимутальных зависимостей у продольной компоненты скорости и потенциала.

## 5. РЕШЕНИЯ ПЯТОГО ТИПА

Параметры течения этого вида описываются формулами

$$\begin{gathered} u = -\frac{h'}{h}x + U(t,y), \quad v = V(t,y), \\ w = \frac{h'}{h}z + W(t,y), \quad \varphi = \frac{1}{2}\frac{h''}{h}\left(z^2 - x^2\right) + \frac{h'^2}{h^2}x^2 + \\ + \frac{h'}{h}\left(H_yx - H_xy\right)z - \frac{h'}{h}H_zxy + \Phi(t,y), \\ \rho = \rho(t,y). \end{gathered} \tag{47}$$

5.1. При $H_x = H_z = 0$, $h = \exp(at)$ рассмотрим решение

$$\begin{gathered} u = -ax + U(t,y), \quad v = V(y), \quad w = az + W(t,y), \\ \varphi = \frac{1}{2}a^2\left(x^2 + z^2\right) + aH_yxz + \Phi(y), \; \rho = \rho(y), \end{gathered} \tag{48}$$

функции $V$, $\Phi$, $\rho$ для которого удовлетворяют уравнениям

$$VV' = \Phi', \quad \rho V = J_0, \quad \Phi'' = \rho - 2a^2, \tag{49}$$

а для компонент скорости $u$, $w$ справедливы уравнения в частных производных

$$\begin{gathered} \frac{\partial U}{\partial t} + V\frac{\partial U}{\partial y} = aU - H_yW, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + V\frac{\partial W}{\partial y} = H_yU - aW. \end{gathered} \tag{50}$$

Система (49) сводится к уравнению, формально совпадающему с уравнением для плоского магнетрона с магнитным полем $H_z^2 = 2a^2$, хотя в нашем случае частота $\omega$ связана не с магнитным полем, а с параметром $a$:

$$\begin{gathered} V = \frac{dy}{d\tau} \equiv \dot{y}, \quad \ddot{y} = \Phi', \quad (\Phi')^{\boldsymbol{\cdot}} = J_0 - 2a^2\dot{y}, \\ \Phi' = J_0\tau - 2a^2y + E_0, \\ \rho V = J_0, \quad \ddot{y} + 2a^2y = J_0\tau + E_0. \end{gathered} \tag{51}$$

Решение системы (49) описывается формулами

$$y = A\cos\omega\tau + B\sin\omega\tau + \frac{J_0}{\omega^2}\tau + \frac{E_0}{\omega^2},\quad \omega^2 = 2a^2,$$
$$V = \omega\left(-A\sin\omega\tau + B\cos\omega\tau\right) + \frac{J_0}{\omega^2}, \tag{52}$$
$$\Phi = \frac{1}{2}V^2,\ \rho = \frac{J_0}{V}.$$

Уравнения (50) могут быть проинтегрированы в двух случаях. В первом случае при $U = U(t)$, $W = W(t)$ имеем

$$U'' + \Omega^2 U = 0,\ \ \Omega^2 = a^2 - H_y^2,\ \ H_y \neq 0,$$
$$U = C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t,$$
$$W = \frac{1}{H_y}\times \tag{53}$$
$$\times\left[(aC_1 - \Omega C_2)\cos\Omega t + (aC_2 + \Omega C_1)\sin\Omega t\right];$$
$$U = U_0\exp(at),\ \ W = W_0\exp(-at),\ \ H_y = 0.$$

На стационарное течение между плоскостями $y = \mathrm{const}$, описываемое уравнениями (52), накладываются зависящие от времени и координат $x$, $z$ сносовые скорости по этим осям:

$$u = -ax + U(t),\ v = V(y),\ w = az + W(t),$$
$$\varphi = \frac{1}{2}a^2\left(x^2 + z^2\right) + aH_y xz + \Phi(y),\ \rho = \rho(y). \tag{54}$$

Второй случай решения уравнений (50) связан с рассмотрением трехмерного стационарного потока. При $U = U(y), W = W(y)$ получаем

$$VU' = aU - H_y W,\ \ VW' = H_y U - aW. \tag{55}$$

В этом случае параметр $\tau$ в (51) тождествен $t$ и аргумент $t$ в (53), как и $\tau$ в (51), является функцией $y$: $t = t(y)$. Решение определено формулами

$$u = -ax + U(y),\ \ v = V(y),\ w = az + W(y),$$
$$\varphi = \frac{1}{2}a^2\left(x^2 + z^2\right) + aH_y xz + \Phi(y),\ \rho = \rho(y). \tag{56}$$

Траектории течения, определяемого уравнениями (56), при начальных условиях $t = 0$, $y = \dot{y} = U = 0$ описываются соотношениями

$$x = \frac{\beta}{a^2 + \Omega^2}(a\sin\Omega t - \Omega\cos\Omega t) + C_1\exp(-at),$$
$$y = \frac{E_0}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) + \frac{J_0}{\omega^3}(\omega t - \sin\omega t), \tag{57}$$
$$z = C_2\exp(at) - \frac{\beta}{H_y}\sin\Omega t.$$

При малых значениях параметра $t$ эти функции имеют следующие асимптотики:

$$x - x_0 = -ax_0 t,\ \ y = \frac{1}{2}E_0 t^2 + \frac{1}{6}J_0 t^3,$$
$$z - z_0 = \left(az_0 - \frac{\beta\Omega}{H_y}\right)t. \tag{58}$$

Плоскость $y = 0$ можно трактовать как виртуальный эмиттер в $T$-режиме, касательные компоненты скорости на котором отличны от нуля.

5.2. Решение с произвольной функцией $\Psi(t)$

$$u = -ax + U(t, y),\ \ v = \Psi(t),\ \ w = az + W(t, y),$$
$$\varphi = \frac{1}{2}a^2\left(x^2 + z^2\right) + aH_y xz + \Psi' y,\ \ \rho = \rho(t) \tag{59}$$

имеет место при постоянной плотности $\rho = 2a^2$ и уравнениях (50) для функций $U$, $W$. Последние допускают решение вида

$$U = \exp(\alpha y)\bar{U}(t),\ \ W = \exp(\alpha y)\bar{W}(t),$$
$$\bar{U}' + \alpha\Psi\bar{U} = a\bar{U} - H_y\bar{W}, \tag{60}$$
$$\bar{W}' + \alpha\Psi\bar{W} = H_y\bar{U} - a\bar{W},$$

уравнения для которого могут быть сведены к уравнению второго порядка

$$\bar{U}'' + (a + 2\alpha\Psi)\bar{U}' +$$
$$+\left(\alpha\Psi' - \alpha^2\Psi^2 + H_y^2 - a^2\right)\bar{U} = 0. \tag{61}$$

При $\Psi = \Psi_0 = \mathrm{const}$ решение уравнения (61) определено формулой

$$\bar{U} = t^{-a/2 - \alpha\Psi_0}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right),$$
$$\Omega^2 = -\frac{5}{4}a^2 - \alpha\Psi_0(1 + 2\alpha\Psi_0) + H_y^2 > 0. \tag{62}$$

Окончательная форма решения имеет вид

$$u = -ax + t^{-a/2 - \alpha\Psi_0}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)\exp(\alpha y),$$
$$v = \Psi_0,\ \ w = az + \frac{1}{H_y}t^{-a/2 - \alpha\Psi_0}\left[\left(\frac{a/2 + \alpha\Psi_0}{t} + a - \alpha\Psi_0\right)\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) + \right. \tag{63}$$
$$\left. + \,\Omega\left(A\sin\Omega t - B\cos\Omega t\right)\right]\exp(\alpha y),\ \ \varphi = \frac{1}{2}a^2\left(x^2 + z^2\right) + aH_y xz,\ \rho = 2a^2.$$

5.3. Рассмотрим решение с $h'/h = c/t$, $\vec{H} = 0$ и следующей специализацией функций в (47):

$$u = -\frac{c}{t}x + t^{\beta}I_1(\xi),\ v = t^{\alpha}I_2(\xi),\ w = \frac{c}{t}z + t^{\gamma}I_3(\xi),$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{c}{t^2}\left[(c+1)x^2 + (c-1)z^2\right] + t^{2\alpha}I_4(\xi), \quad (64)$$
$$\rho = \frac{1}{t^2}I_5(\xi),\ \xi = yt^{-\alpha-1}.$$

Функции из (64) описываются уравнениями

$$[I_2 - (\alpha+1)\xi]I_1' + (\beta - c)I_1 = 0,$$
$$[I_2 - (\alpha+1)\xi]I_2' + \alpha I_2 = I_4',$$
$$[I_2 - (\alpha+1)\xi]I_3' + (\gamma + c)I_3 = 0, \quad (65)$$
$$[I_2 - (\alpha+1)\xi]I_5' + \left(I_2' - 2\right)I_5 = 0,$$
$$I_4'' = I_5 - 2c^2.$$

Построим частное решение для случая $I_1 \equiv 0$. Введем вместо $\xi$ новую переменную $\tau(\xi)$, определив ее уравнением

$$I_2 - (\alpha+1)\xi = \frac{d\xi}{d\tau} \equiv \dot{\xi}. \quad (66)$$

При этом система (65) с учетом соотношения

$$I_2' - (\alpha+1) = \frac{d\dot{\xi}}{d\xi} = \frac{1}{\dot{\xi}}\frac{d\dot{\xi}}{d\tau} = \frac{\ddot{\xi}}{\dot{\xi}} \quad (67)$$

примет вид

$$\dot{I}_2 + \alpha I_2 = I_4',\ \ \dot{I}_3 + (\gamma + c)I_3 = 0,$$
$$\dot{I}_5 + \left(\frac{\ddot{\xi}}{\dot{\xi}} - 2\right)I_5 = 0,\ \ I_4'' = I_5 - 2c^2. \quad (68)$$

В результате для функций $I_3$, $I_5$ получаем

$$I_3 = W_0\exp[-(\gamma + c)\tau],\ \ I_5 = \frac{\rho_0}{\dot{\xi}}\exp(2\tau). \quad (69)$$

Домножив последнее уравнение в (68) на $\dot{\xi}$ и используя первое уравнение этой системы, приходим к уравнению второго порядка относительно переменной $\xi$

$$\dot{\xi}I_4'' = \dot{\xi}I_5 - 2c^2\dot{\xi},\ \left(I_4'\right)^{\cdot} = \rho_0\exp(2\tau) - 2c^2\dot{\xi},$$
$$I_4' = \frac{1}{2}\rho_0\exp(2\tau) - 2c^2\xi + \Phi_0,\ \ \dot{I}_2 = \ddot{\xi} + (\alpha+1)\dot{\xi}, \quad (70)$$
$$\ddot{\xi} + (2\alpha+1)\dot{\xi} + \left[\alpha(\alpha+1) + 2c^2\right]\xi =$$
$$= \frac{1}{2}\rho_0\exp(2\tau) + \Phi_0.$$

Линейное уравнение из (70) имеет следующее решение:

$$\xi = \xi_0 + (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\exp\left[-\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\tau\right] +$$
$$+ \bar{\rho}_0\exp(2\tau),\ \bar{\rho}_0 = \rho_0\Big/\left[2\left(\alpha^2 + 5\alpha + 6 + 2c^2\right)\right], \quad (71)$$
$$\xi_0 = \Phi_0\Big/\left[\alpha(\alpha+1) + 2c^2\right],$$
$$\Omega^2 = 2c^2 - 1/4 > 0.$$

Из первого уравнения в (68) находим

$$\dot{I}_4 = \dot{\xi}I_4' = \dot{\xi}\left(\dot{I}_2 + \alpha I_2\right) =$$
$$= \dot{\xi}\ddot{\xi} + (2\alpha+1)\dot{\xi}^2 + \alpha(\alpha+1)\xi\dot{\xi}, \quad (72)$$
$$I_4 = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\xi^2 + \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + (2\alpha+1)\int\dot{\xi}^2 d\tau.$$

Подсчет функций $I_2$, $I_4$ из (70), (72) сводится к алгебраическим операциям и легко берущемуся интегралу. В результате функция $I_4$ содержит линейные комбинации следующих агрегатов:

$$\exp(4\tau),\ \exp[(-\alpha + 3/2)\tau]\times$$
$$\times(C_1\cos\Omega\tau + C_2\sin\Omega\tau), \quad (73)$$
$$\exp[-(2\alpha+1)\tau](C_3 + C_4\cos 2\Omega\tau + C_5\sin 2\Omega\tau).$$

Константы решения не удается подобрать так, чтобы оно выходило на стационарный режим с $\rho \ne 0$, с течением времени пространство в осцилляционном режиме освобождается от пространственного заряда. Полный набор параметров потока описывается формулами

$$u = -\frac{c}{t}x,\ \ v = t^{\alpha}I_2(\xi),$$
$$w = \frac{c}{t}z + W_0t^{\gamma}\exp[-(\gamma + c)\tau],$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{c}{t^2}\left[(c+1)x^2 + (c-1)z^2\right] + t^{2\alpha}I_4(\xi), \quad (74)$$
$$\rho = \frac{\rho_0}{t^2}\frac{\exp(2\tau)}{\dot{\xi}},\ \ \tau = \tau(\xi),\ \xi = yt^{-\alpha-1}.$$

5.4. Решение следующей структуры:

$$u = -ax + \exp(\beta t)I_1(\xi),\ \ v = \exp(\alpha t)I_2(\xi),$$
$$w = az + \exp(\beta t)I_3(\xi),$$
$$\varphi = \frac{1}{2}a^2\left(x^2 + z^2\right) + aH_yxz + \exp(2\alpha t)I_4(\xi), \quad (75)$$
$$\rho = I_5(\xi),\ \ \xi = y\exp(-\alpha t)$$

удовлетворяет уравнениям

$$(I_2 - \alpha\xi)I_1' + (\beta - a)I_1 = -H_yI_3,$$
$$(I_2 - \alpha\xi)I_2' + \alpha I_2 = I_4',$$
$$(I_2 - \alpha\xi)I_3' + (\beta - a)I_3 = H_yI_1, \quad (76)$$
$$(I_2 - \alpha\xi)I_5' + I_2'I_5 = 0,$$
$$I_4'' = I_5 - 2a^2.$$

Подобно предыдущему случаю введем новую переменную $\tau(\xi)$, определяемую соотношением

$$I_2 - \alpha\xi = \frac{d\xi}{d\tau} \equiv \dot{\xi}. \tag{77}$$

Перейдем к этой переменной в уравнениях системы (76)

$$\begin{gathered}\dot{I}_1 + (\beta - a) I_1 = -H_y I_3, \quad \dot{I}_2 + \alpha I_2 = I_4', \\ \dot{I}_3 + (\beta - a) I_3 = H_y I_1, \quad \dot{I}_5 + I_2' I_5 = 0, \\ \left(I_4'\right)^{\cdot} = \dot{\xi}\left(I_5 - 2a^2\right).\end{gathered} \tag{78}$$

Уравнения для функций $I_1$, $I_3$ трансформируются в уравнение второго порядка

$$\begin{gathered}\ddot{I}_1 + 2(\beta - a)\dot{I}_1 + \left[(\beta - a)^2 + H_y^2\right] I_1 = 0, \\ I_1 = (A\cos\omega\tau + B\sin\omega\tau)\exp\left[-(\beta - a)\tau\right], \\ \omega = H_y, \\ I_3 = -(B\cos\omega\tau - A\sin\omega\tau)\exp\left[-(\beta - a)\tau\right].\end{gathered} \tag{79}$$

Из уравнений (78) следует выражение для функции $I_5$:

$$I_2' = \frac{1}{\dot{\xi}}\dot{I}_2 = \frac{\ddot{\xi}}{\dot{\xi}} + \alpha, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{\dot{\xi}}\exp(-\alpha\tau). \tag{80}$$

Теперь поддается интегрированию и уравнение для $I_4$

$$\begin{gathered}\left(I_4'\right)^{\cdot} = \rho_0\exp(-\alpha\tau) - 2a^2\dot{\xi}, \\ I_4' = -\frac{\rho_0}{\alpha}\exp(-\alpha\tau) - 2a^2\xi + E_0, \\ \dot{I}_4 = -\frac{\rho_0}{\alpha}\dot{\xi}\exp(-\alpha\tau) - 2a^2\xi\dot{\xi} + E_0\dot{\xi}, \\ I_4 = -a^2\xi^2 + E_0\xi - \frac{\rho_0}{\alpha}\int\exp(-\alpha\tau)\dot{\xi}d\tau.\end{gathered} \tag{81}$$

Уравнение для $I_2$ в (78) позволяет установить зависимость $\xi = \xi(\tau)$

$$\begin{gathered}\ddot{\xi} + 2\alpha\dot{\xi} + \left(\alpha^2 + 2a^2\right)\xi = -\frac{\rho_0}{\alpha}\exp(-\alpha\tau) + E_0, \\ \Omega^2 = 2a^2, \\ \xi = \left(-\frac{\rho_0}{\alpha\Omega^2} + C\cos\Omega\tau + D\sin\Omega\tau\right)\exp(-\alpha\tau) + \\ + \frac{E_0}{\alpha^2 + \Omega^2}.\end{gathered} \tag{82}$$

Функция $I_4$ описывается выражением

$$\begin{gathered}I_4 = -a^2\exp(-2\alpha\tau)\left[\frac{\rho_0^2}{\alpha^2\Omega^4} + \frac{1}{2}\left(C^2 + D^2\right) - \right. \\ - \frac{2\rho_0}{\alpha\Omega^2}(C\cos\Omega\tau + D\sin\Omega\tau) + \\ \left. + \frac{1}{2}\left(C^2 - D^2\right)\cos 2\Omega\tau + CD\sin 2\Omega\tau\right] + \\ + \exp(-3\alpha\tau)\left\{\frac{1}{3}\frac{\rho_0^2}{\alpha^2\Omega^2} + \frac{\rho_0}{9\alpha^2 + \Omega^2}\times\right. \\ \times\left[-\left(3\alpha^2 + \Omega^2\right)C + 2\Omega D\right]\cos\Omega\tau - \\ \left. - \frac{\rho_0}{9\alpha^2 + \Omega^2}\left[2\Omega C + \left(3\alpha^2 + \Omega^2\right)D\right]\sin 2\Omega\tau\right\} + \\ + \frac{2\alpha^2 E_0}{\alpha^2 + \Omega^2}\exp(-\alpha\tau)\left(-\frac{\rho_0}{\alpha\Omega^2} + C\cos\Omega\tau + D\sin\Omega\tau\right).\end{gathered} \tag{83}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Роль точных решений как эталонов при тестировании приближенных и численных моделей хорошо известна [5]. Несмотря на необходимость обеспечения ошибки на уровне десятых долей процента [7] при расчетах электронно-оптических систем для современных приборов СВЧ, в которых используются пучки с высокой компрессией, до сих пор остается открытой проблема физического тестирования на наборах эталонных точных решений для пакетов траекторного анализа, включая их коммерческие варианты. Известны две работы [8, 9] с тестированием программ предыдущего поколения, в которых на отдельных точных решениях выявлена ошибка в 7 и 3%, вполне устроившая их авторов. Приближенные геометризованные модели прошли тестирование на полном наборе эталонных решений с аддитивным и мультипликативным разделением переменных [10], причем одновременно с ними исследовалась параксиальная модель трубчатых пучков классической теории. Последние разработки численных алгоритмов [11] в области с исключенной проблемой сингулярной окрестности катода (куб, вырезанный из плоского диода с током, изменяющимся по закону $3/2$) приближаются к указанной выше желаемой ошибке порядка $10^{-3}$.

Рабочие режимы работы приборов СВЧ связаны с осцилляционными процессами, однако примеры соответствующих тестовых исследований неизвестны автору. Следует заметить, что решения нестационарных уравнений пучка в элементарных функциях, особенно удобные для этих целей, в литературе отсутствовали. Приведенные выше результаты, описывающие трехмерные нестационарные потоки, могут заполнить этот пробел. Среди трехмерных стационарных решений обнаружен пример, соответствующий эмиссии с неэквипотенциального катода в $\rho$-режиме, а также вариант инжекции по касательной с плоскости, на которой выполнены условия эмиссии, ограниченной температурой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Сыровой В.А.* Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. *Meltzer B.* // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62. № 360B. P. 813.
3. *Kent G.* // Communic. Electr. 1960. V. 79. № 48. P. 144.
4. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 9. С. 1110.
5. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2003. Т. 48. № 3. С. 362.
6. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 6. С. 752.
7. *Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А.* // Электронная техника. Сер. 1. СВЧ-техника. 2018. № 1. С. 32.
8. *Birtles A.B., Dirmikis D.* // Int. J. Electronics. 1975. V. 38. № 1. P. 49.
9. *Мануилов В.Н., Райский Б.В., Цимринг Ш.Е., Солуянова Е.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. № 9/10. С. 846.
10. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
11. *Козырев А.Н., Свешников В.М.* // Прикл. физика. 2018. № 1. С. 30.