РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2019, том 64, № 4, с. 396–408

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

О ВОЗМОЖНОСТИ ТРАНСПОРТИРОВКИ НЕПУЛЬСИРУЮЩЕГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ПРИ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ОТЛИЧНОМ ОТ БРИЛЛЮЭНОВСКОГО

П. И. Акимов[1, *], А. А. Гаврилин[1], А. П. Никитин[1], В. А. Сыровой[2]

[1]*АО НПП "Торий",*
Российская Федерация, 117332 Москва, ул. Обручева, 52
[2]*Всероссийский электротехнический институт,*
Российская Федерация, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 12
**E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 04.07.2017 г.
После доработки 04.12.2017 г.
Принята к публикации 17.06.2018 г.

Исследована возможность транспортировки непульсирующего электронного пучка при магнитном поле, отличном от бриллюэновского, за счет специальной системы формирующих электродов. Рассмотрены случаи релятивистских и нерелятивистских скоростей.

DOI: 10.1134/S0033849419040016

1. УРАВНЕНИЯ ПУЧКОВ РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Рассмотрим инжекцию в магнитное поле с заданным фронтом нарастания осесимметричного параксиального пучка, тонкого трубчатого (ленточного) пучка с криволинейной осью, пучка с прямой осью и эллиптическим сечением. Инжекция происходит параллельно оси z в плоскости $z = 0$, магнитное поле на катоде может быть ненулевым. Будем интересоваться условиями сохранения заданной на входе геометрии пучка.

Приводимые ниже соотношения записаны в безразмерных переменных (символы с чертой, которую в дальнейшем будем опускать), исключающих из уравнений все физические постоянные выбранной системы единиц; для системы СИ имеем

$$\bar{r} = \frac{r}{L_*},\ \ \bar{v} = \frac{v}{V_*},\ \ \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\eta V_*^2},$$
$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 V_*^2 / \left(\eta L_*^2\right)},\ \ \bar{J} = \frac{J}{\varepsilon_0 V_*^3 / \left(\eta L_*^2\right)}, \tag{1}$$
$$\bar{H} = \frac{H}{V_*/(\mu_0 \eta L_*)},\ \ \eta = e/m,\ \ \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2.$$

Величины в формулах (1) означают расстояние, скорость, потенциал электрического поля, плотность пространственного заряда, плотность тока эмиссии, напряженность магнитного поля соответственно; L_*, V_* – характерные значения длины и скорости, в релятивистском случае $V_* = c$, c – скорость света; для малых скоростей потенциал удобно нормировать на потенциал φ_A анода, $\bar{\varphi}_A = 1$, и связать характерную скорость V_* с этой величиной: $V_*^2 = \eta\varphi_A$; η, μ_0, ε_0 – удельный заряд электрона, магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума; ниже символом тильда отмечены члены, исчезающие в нерелятивистском пределе; нижний индекс нуль определяет значения соответствующих величин на катоде или оси пучка.

Уравнения асимптотической теории и теории эллиптических потоков. Уравнения осесимметричных параксиальных и трубчатых потоков сформулированы в монографии [1]. Параксиальный пучок с радиусом δ описывается уравнением

$$\sqrt{U\left(2+\tilde{U}\right)}\left[\sqrt{U\left(2+\tilde{U}\right)}\delta'\right]' + \left[\frac{1}{2}\left(1+\tilde{U}\right)U'' + \frac{1}{4}\Omega_z^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\Omega_{z0}^2\frac{\delta_0^4}{\delta^4} - \frac{1}{2}\frac{J\delta_0^2}{\delta^2}\frac{1}{\sqrt{U\left(2+\tilde{U}\right)}}\right]\delta = 0, \tag{2}$$
$$U' \equiv \frac{dU}{dz}.$$

Здесь U, Ω_z – потенциал и магнитное поле на оси.

Трубчатый пучок с криволинейной осью $R = R_0(l)$, $Z = Z_0(l)$, l – длина дуги оси, и толщиной f определен уравнением (рис. 1)

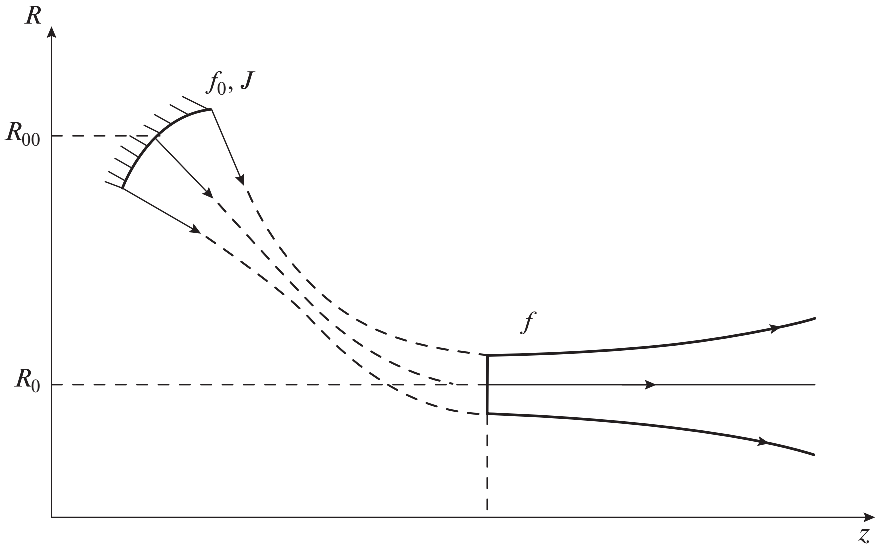

Рис. 1. Схематическое изображение эволюции трубчатого пучка от катода до плоскости инжекции z_0..

$$\sqrt{U\left(2+\tilde{U}\right)}\left[\sqrt{U\left(2+\tilde{U}\right)}f'\right]' - f_0R_{00}\Omega_{l0} \times \\ \times\left[\frac{2}{R_0^2}\left(1+\tilde{U}\right)V_\psi + \frac{\Omega_l}{R_0}\right] = \left\{\frac{f_0R_{00}J}{fR_0\left(1+\tilde{U}\right)V_l} - \right. \\ - \left(1+\tilde{U}\right)U'' - \frac{2}{R_0^2}\left(1+\tilde{U}\right)^2V_\psi^2 - \Omega_l^2 - \\ - \frac{2}{R_0}\left(1+\tilde{U}\right)V_\psi\Omega_l + \left(1+\tilde{U}\right)V_\psi\Omega_s' + \tilde{V}_\psi^2 \times \\ \left.\times\left[\frac{1}{R_0}\left(1+\tilde{U}\right)V_\psi + \Omega_l\right]^2\right\}f, \quad U' \equiv \frac{dU}{dl}. \tag{3}$$

Здесь V_l, V_ψ – продольная и азимутальная компоненты скорости; Ω_l, Ω_s – продольная и нормальная к оси компоненты напряженности магнитного поля. В качестве базовой трубки тока в релятивистском случае выбрана внутренняя поверхность пучка с нулевым собственным азимутальным магнитным полем. При $R_0 \to \infty$, $R_{00}/R_0 \to 1$ получаем уравнения криволинейного ленточного пучка.

Пучки с эллиптическим сечением, полуосями a, b и прямой осью в системе координат, связанной с трубками тока, рассмотрены в работах [2–5]:

$$\left(1+\tilde{U}\right)\left[\frac{1}{ab}\left(abU'\right)' + U\left(2+\tilde{U}\right)\left(\frac{a''}{a}+\frac{b''}{b}\right)\right] + \\ + \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{2a^2b^2\left(a^2+b^2\right)^2}\left[\left(ab\Omega_z\right) - \left(ab\Omega_z\right)_0\right]^2 + \\ + \frac{1}{2a^2b^2}\left[\left(ab\Omega_z\right)^2 - \left(ab\Omega_z\right)_0^2\right] = \frac{\left(ab\right)_0 J}{ab\sqrt{U\left(2+\tilde{U}\right)}}. \tag{4}$$

В отличие от потоков с прямой осью трубчатый пучок подходит к плоскости инжекции с предысторией, выражающейся в закрутке с азимутальной скоростью

$$V_\psi = \frac{1}{R_0}\int_0^l R_0\Omega_s dl, \tag{5}$$

где интегрирование ведется от катода до плоскости $z = 0$. По этой причине общую ситуацию с трубчатым пучком следует рассмотреть отдельно.

Уравнения пучков с неизменным сечением. Требование сохранения начальных параметров сечения потока $\delta, f, a, b = \mathrm{const}$ для параксиального и эллиптического пучков, а также для трубчатого пучка, формируемого исключительно электростатическими полями, приводит уравнения (2)–(4) к единой форме

$$U'' + \frac{\Omega^2}{1+\tilde{U}} - \frac{Js}{\left(1+\tilde{U}\right)\sqrt{U\left(2+\tilde{U}\right)}} = 0, \tag{6}$$

где постоянная Ω^2 и компрессия по площади s для перечисленных выше случаев определены формулами

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}\left(\Omega_z^2 - s^2\Omega_{z0}^2\right), \quad s = \delta_0^2/\delta^2; \\ \Omega^2 = \Omega_l^2, \quad s = R_{00}f_0/R_0f; \\ \Omega^2 = \Omega_l^2, \quad s = f_0/f; \\ \Omega^2 = \frac{a^4+b^4}{\left(a^2+b^2\right)^2}\Omega_z^2 - \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}s\Omega_{z0}\Omega_z - \\ - 2\frac{a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}s^2\Omega_{z0}^2, \quad s = \frac{a_0b_0}{ab}. \tag{7}$$

Здесь Ω_z, Ω_l — магнитное поле при $z = 0$ при его мгновенном нарастании.

В нерелятивистском случае вместо (6) имеем

$$U'' + \Omega^2 - \frac{A}{\sqrt{U}} = 0, \quad A = \frac{Js}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Бриллюэновское магнитное поле. Значения бриллюэновского магнитного поля следуют из уравнения (6) при $U = U_A = \mathrm{const}$ (в нерелятивистском случае $U_A = 1$):

$$\Omega_{zB}^2 = s^2\Omega_{z0}^2 + \frac{2\sqrt{2}A}{\sqrt{U_A\left(2+\tilde{U}_A\right)}}; \quad \Omega_{lB}^2 = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{U_A\left(2+\tilde{U}_A\right)}};$$
$$\Omega_{zB}^2 = \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4+b^4}s\Omega_{z0}\Omega_{zB} + 2\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}s^2\Omega_{z0}^2 + \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^4+b^4}\frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{U_A\left(2+\tilde{U}_A\right)}}. \tag{9}$$

Пусть поле на катоде составляет часть бриллюэновского значения

$$\Omega_{z0} = \frac{c}{s}\Omega_{zB}. \tag{10}$$

При этом формулы (9) принимают вид

$$\Omega_{zB}^2 = \frac{2\sqrt{2}A}{\left(1-c^2\right)\sqrt{U_A\left(2+U_A\right)}}; \quad \Omega_{lB}^2 = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{U_A\left(2+\tilde{U}_A\right)}};$$
$$\Omega_{zB}^2 = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^4+b^4+2ca^2b^2}\frac{\sqrt{2}A}{(1-c)\sqrt{U_A\left(2+\tilde{U}_A\right)}}. \tag{11}$$

Из соотношений (11) следует, что параметр c не может превышать единицы. Это значение задает предельную степень замагниченности катода в зависимости от компрессии s. При $s \sim 30$ и сохранении формы пучка начиная с плоскости инжекции величина Ω_{z0} составляет менее 3% от Ω_{zB}; при $s = 2$ имеем $\Omega_{z0} < \Omega_{zB}/2$. В дальнейшем магнитное поле может изменяться при осцилляциях границы потока. В плоскости $z = 0$ на минимуме пульсаций он попадает в магнитное поле, отличное от бриллюэновского.

В нерелятивистском случае формулы (11) принимают вид

$$\Omega_{zB}^2 = \frac{2A}{1-c^2}; \quad \Omega_{lB}^2 = A;$$
$$\Omega_{zB}^2 = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^4+b^4+2ca^2b^2}\frac{A}{1-c}. \tag{12}$$

2. УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ПОТОКА

Нерелятивистские пучки. Уравнение (8) для функции $\sqrt{U}$ описывает циклоиду — кривую с хорошо известным параметрическим представлением. Первый интеграл этого уравнения определен формулой

$$\frac{1}{2}U'^2 = 2A\left(\sqrt{U}-1\right) - \Omega^2(U-1) \tag{13}$$

при условиях инжекции $z = 0$, $U = 1$.

Повторное интегрирование позволяет получить решение в элементарных функциях

$$z = -\frac{1}{\Omega^2}\left[4\left(A-\Omega^2\right)\left(\sqrt{U}-1\right) - 2\Omega^2\left(\sqrt{U}-1\right)^2\right]^{1/2} - \frac{A\sqrt{2}}{\Omega^3}\left\{\arcsin\left[1-\frac{\Omega^2}{A-\Omega^2}\left(\sqrt{U}-1\right)\right] - \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{14}$$

Уравнение $U' = 0$ определяет экстремумы функции $U(z)$:

$$\sqrt{U_m} = \frac{2A}{\Omega^2} - 1,\ 1. \tag{15}$$

Если первый корень соответствует минимуму, то надо предотвратить полное торможение потока: $U_m = 0$ — предельное значение, при котором пучок полностью заторможен.

Чтобы понять, какие ограничения это условие накладывает на магнитное поле, достаточно воспользоваться выражениями для Ω^2 и Ω_{zB}^2 из (7), (12).

Для сплошного ($c \neq 0$) и специального случая кольцевого пучка ($c = 0$) получаем

$$\frac{\Omega_z^2}{\Omega_{zB}^2} = 2 - c^2. \tag{16}$$

Эллиптическому потоку соответствует выражение

$$\frac{\Omega_z}{\Omega_{zB}} = \frac{c}{2}\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4+b^4} \pm \left[\frac{c^2}{4}\frac{\left(a^2-b^2\right)^4}{\left(a^4+b^4\right)^2} + 2(1-c) + 2c(2-c)\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right]^{1/2}. \tag{17}$$

Экранированный катод. Во всех случаях для экранированного катода отношение

$$\Omega_z/\Omega_{zB} < \sqrt{2}. \tag{18}$$

Пусть при выполнении требования (18)

$$\Omega_z = \kappa\Omega_{zB}. \tag{19}$$

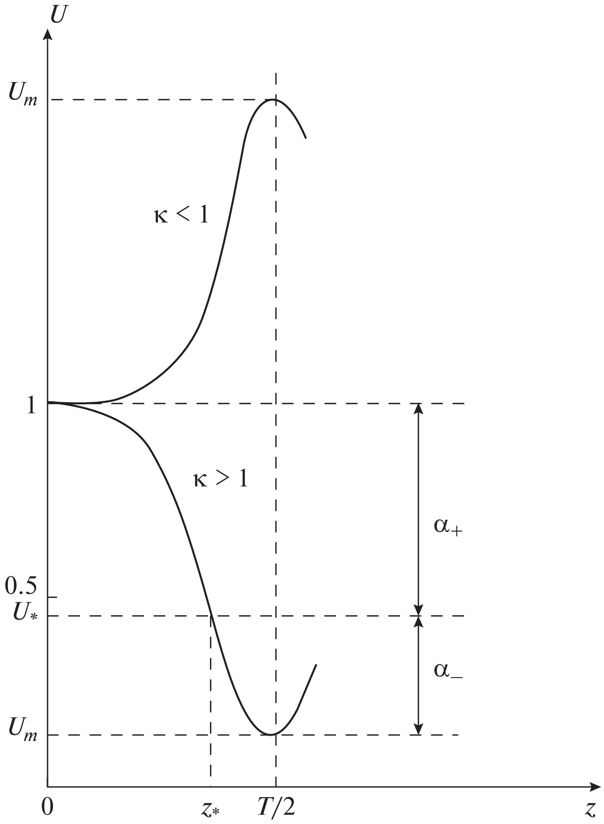

Рис. 2. Схематическое изображение потенциала $U(z)$ на оси пучка на полупериоде $(0, T/2)$.

Определяемая формулой (14) зависимость $U = U(z)$ описывает негармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\frac{A\sqrt{2}}{\Omega^3}. \quad (20)$$

При выполнении (19) получаем

$$\Omega = \kappa\sqrt{A},\;\; T = \frac{2\pi}{\kappa^3\sqrt{A/2}}. \quad (21)$$

Минимальное значение потенциала U_m и амплитуда колебаний α следуют из формул (15), (21):

$$\sqrt{U_m} = \frac{2}{\kappa^2} - 1,\;\; \alpha = \frac{1 - U_m}{2}. \quad (22)$$

Кривизна k кривой $U = U(z)$ в точках экстремума

$$k = U'' = \begin{cases} A\left(1 - \kappa^2\right), & U = 1; \\ A\dfrac{\kappa^2\left(\kappa^2 - 1\right)}{2 - \kappa^2}, & U = U_m. \end{cases} \quad (23)$$

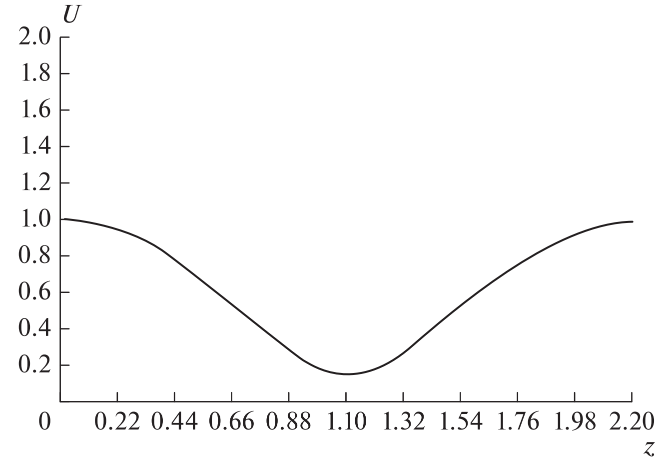

Рис. 3. Распределение потенциала $U(z)$ для нерелятивистских потоков при $\kappa > 1$.

Если отсчитывать отклонение (α_+, α_-) кривой $U(z)$ от точки перегиба $U = U_*$, то для α_+ и α_- имеем (рис. 2)

$$\alpha_+ = 1 - U_* = 1 - \frac{1}{\kappa^4}, \quad \alpha_- = U_* - U_m = \frac{1}{\kappa^4} - \left(\frac{2}{\kappa^2} - 1\right)^2. \quad (24)$$

На рис. 3 приведено решение (14) при $\kappa = 1.2$, $A = 5.4$; последнее значение по компрессии и плотности тока эмиссии примерно соответствует эллиптическому пучку ($J = 0.254$, $s = 30$), рассмотренному в работе [4].

Неэкранированный катод. Влияние степени экранировки катода на параметры осцилляций потенциала рассмотрим на примере сплошного осесимметричного пучка. Для параметра Ω^2, минимального значения U_m и периода колебаний T получаем

$$\Omega^2 = A\frac{\kappa^2 - c^2}{1 - c^2},\;\; \sqrt{U_m} = 2\frac{1 - c^2}{\kappa^2 - c^2} - 1, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{A/2}}\left(\frac{1 - c^2}{\kappa^2 - c^2}\right)^{3/2}. \quad (25)$$

Из формул (25) видно, что при $\kappa > 1$ возрастание параметра c приводит к уменьшению периода колебаний T и величины U_m и, как следствие, к росту амплитуды α. При $\kappa = 1.2$, $c = 0.5$ величина $\sqrt{U_m}$ уменьшается на 33%, период T – на 14% по сравнению со случаем экранированного катода. Требование $\sqrt{U_m} > 0$ приводит к новому ограничению на параметр c:

$$c^2 < 2 - \kappa^2. \quad (26)$$

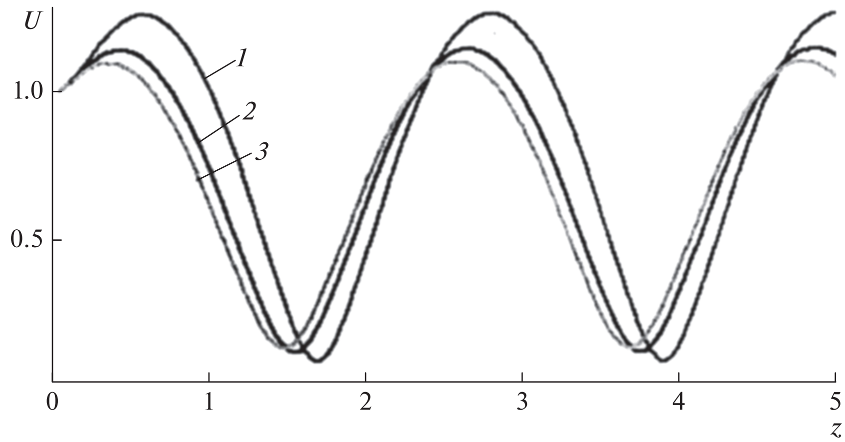

Рис. 4. Распределение потенциала $U(z)$ при плавном нарастании магнитного поля: *1* – $\beta = 20$, *2* – $\beta = 40$, *3* – $\beta = 60$ ($\beta \to \infty$ соответствует мгновенному нарастанию).

Равенство в формуле (26) соответствует полному торможению потока.

Случай, когда первый корень в (15) определяет максимум

$$\frac{2A}{\Omega^2} - 1 > 1, \quad \Omega_z = \kappa\Omega_{zB} \tag{27}$$

соответствует магнитным полям, меньшим бриллюэновских:

$$\kappa < 1. \tag{28}$$

Сохранение формы пучка при этом возможно за счет использования потенциалов $U > U_A$.

Плавное нарастание магнитного поля. Для всех пучков с электростатическим формированием нарастание магнитного поля от нуля в плоскости инжекции до $\kappa\Omega_{zB}$ можно определить формулой

$$\Omega_z^2 = \kappa^2\left[1 - \exp\left(-\beta z^2\right)\right]A, \quad \beta = \text{const}. \tag{29}$$

Изменение потенциала на оси в этом случае описывается уравнением

$$U'' + \kappa^2 A\left[1 - \exp\left(-\beta z^2\right)\right] - \frac{A}{\sqrt{U}} = 0. \tag{30}$$

На рис. 4 представлено решение этого уравнения для нескольких значений β. На начальном этапе, где $\Omega_z < \Omega_{zB}$, кривая $U(z)$ превышает единицу, а затем колебания с большей, чем в случае $\beta \to \infty$, амплитудой принимают установившийся характер. С уменьшением β магнитное поле возрастает до заданного значения на большей длине, причем величина $U_m \to 0$, практически достигая оси z при $\beta = 6$.

Релятивистские пучки. Уравнение (6) удается проинтегрировать только один раз:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}U'^2 = \Omega^2 \ln\frac{1+U_A}{1+U} + \\ + A\sqrt{2}\left(\arccos\frac{1}{1+U} - \arccos\frac{1}{1+U_A}\right).\end{gathered} \tag{31}$$

Условие $U' = 0$ позволяет, как и в нерелятивистском случае, указать значение Ω^2 и сформулировать соответствующие пределы для магнитного поля, превышающего бриллюэновскую величину:

$$\begin{gathered}\Omega^2 = \sqrt{2}AF, \\ F = \arccos\left(\frac{1}{(1+U_A)}\right)\Big/\ln\left(1+U_A\right).\end{gathered} \tag{32}$$

Для рассмотренных выше конфигураций электронного пучка имеем

$$\begin{gathered}\frac{\Omega_z^2}{\Omega_{zB}^2} = c^2 + (1-c)F\sqrt{U_A\left(2+U_A\right)}; \\ \frac{\Omega_l^2}{\Omega_{lB}^2} = F\sqrt{U_A\left(2+U_A\right)}; \quad \frac{\Omega_z}{\Omega_{zB}} = \frac{c}{2}\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4+b^4} \pm \\ \pm\left\{\frac{c^2}{4}\frac{\left(a^2-b^2\right)^4}{\left(a^4+b^4\right)^2} + \frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\times\right. \\ \left.\times\left(F(1-c) + 2c\left[c + F(1-c)\right]\right)\sqrt{U_A\left(2+U_A\right)}\right\}.\end{gathered} \tag{33}$$

Во всех вариантах в случае экранированного катода

$$\frac{\Omega_z^2}{\Omega_{zB}^2} < F\sqrt{U_A\left(2+U_A\right)}. \tag{34}$$

Результаты вычисления отношения Ω_z/Ω_{zB} по формуле (33) приведены в табл. 1 с указанием потенциала анода в безразмерных единицах и в киловольтах.

Численное интегрирование уравнения (6) при $\kappa = 1.2$, $A = 5.4$, $U_A = 1$ (500 кВ) позволяет построить функцию $U(z)$ (рис. 5). В качественном отношении (но при нормировке U на разные величины) кривые $U(z)$ имеют один характер при несколько возросшем периоде колебаний в случае релятивистских скоростей.

Значения потенциала в экстремумах при учете формулы (33) определяют корни уравнения

$$\kappa^2 \ln\frac{1+U}{1+U_A} - \sqrt{U_A(2+U_A)}\times \times\left(\arccos\frac{1}{1+U} - \arccos\frac{1}{1+U_A}\right) = 0, \quad \kappa = \Omega_z/\Omega_{zB}. \tag{35}$$

Ниже приведена зависимость $\kappa(U_m)$ при $U_A = 1$

U_m	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ	1.61	1.34	1.25	1.19	1.15	1.11	1.08	1.05	1.036	1.0165

Цена снижения магнитного поля по сравнению с Ω_{zB} оказывается чрезмерной: при $\kappa = 0.78$ имеем $U_m = 4$.

Колебания границы потока при отсутствии баланса сил. Чтобы оценить соотношение эффекта, который должен быть устранен – осцилляции границы потока, и инструмента воздействия – периодического измерения потенциала, рассмотрим пульсации трубчатого релятивистского пучка, сформированного электростатическим полем, в однородном магнитном поле $\Omega_l = \text{const}$.

Колебания границы описываются уравнением

$$f'' + \omega^2 f = C, \quad f(0) = f_0, \quad f'(0) = 0,$$
$$\omega^2 = \frac{\Omega_l^2}{U_A(2+\tilde{U}_A)}, \quad C = \frac{f_0 R_{00} J}{R_0\left[U_A(2+\tilde{U}_A)\right]^{3/2}}, \tag{36}$$

решение которого имеет вид

$$f = \left(f_0 - \frac{C}{\omega^2}\right)\cos\omega z + \frac{C}{\omega^2}. \tag{37}$$

Толщина пучка осциллирует между значениями f_0 и $2C/\omega^2 - f_0 > 0$ с периодом

$$T_f = \frac{2\pi}{\Omega_l}\sqrt{U_A(2+\tilde{U}_A)}. \tag{38}$$

Таблица 1. Значения отношения Ω_z/Ω_{zB} в зависимости от потенциала анода U_A

U_A	<0.1	0.1	1.5	1	2	3
U_A, кВ	<50	50	250	500	1000	1500
Ω_z/Ω_{zB}	1.414	1.435	1.52	1.62	1.78	1.92

В нерелятивистском случае при нормировке на потенциал анода $U_A = 1$ имеем

$$T_f = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\kappa\sqrt{A}}. \tag{39}$$

Обозначив период колебаний потенциала в (21) через T_U, приходим к следующему соотношению

$$\frac{T_U}{T_f} = \frac{1}{\kappa^2}. \tag{40}$$

Таким образом, при магнитном поле Ω_l, превышающем бриллюэновское значение ($1 < \kappa < \sqrt{2}$), изменение потенциала опережает возможную пульсацию границы, при $\Omega_l < \Omega_{lB}$ ($\kappa < 1$) имеет место обратный эффект.

Общий случай трубчатого пучка. Выше было отмечено, что в общем случае трубчатый пучок подходит к плоскости инжекции с азимутальной скоростью, описываемой формулой (5). Не имея в рассматриваемой постановке задачи информации о движении потока между катодом и плоскостью $z = 0$, введем параметр p, определяющий соотношение продольной и азимутальной компонент скорости при $z = 0$:

$$V_\psi = pV_A, \quad V_A^2 = \frac{U_A(2+\tilde{U}_A)}{(1+\tilde{U}_A)^2}, \quad p > 0. \tag{41}$$

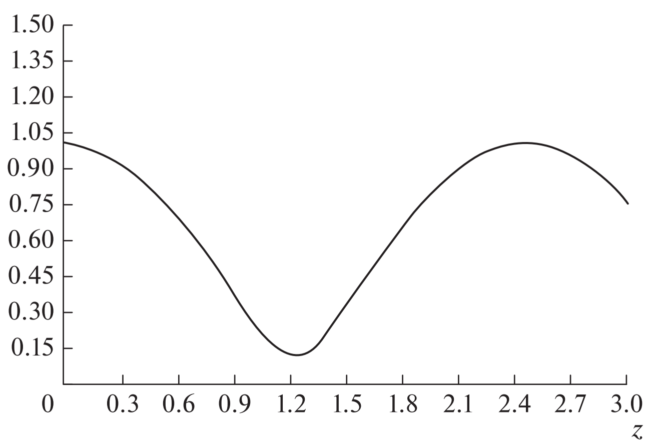

Рис. 5. Распределение потенциала $U(z)$ для релятивистских потоков при $U_A = 500$ кВ при $\kappa > 1$.

Для сохранения геометрии потока потенциал должен удовлетворять уравнению

$$
\begin{gathered}
\left(1+\tilde{U}\right)U'' + \Omega_l^2 - s\,\Omega_{l0}\Omega_l - \frac{sJ}{\sqrt{U\left(2+\tilde{U}\right)}} + \\
+\frac{2pV_A}{R_0}\left(1+\tilde{U}\right)\left[\frac{pV_A}{R_0}\left(1+\tilde{U}\right)+\Omega_l - s\Omega_{l0}\right] - \\
-\tilde{p}^2V_A^2\left[\frac{pV_A}{R_0}\left(1+\tilde{U}\right)+\Omega_l\right]^2 = 0.
\end{gathered} \tag{42}
$$

Первый интеграл уравнения (42) имеет вид

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{2}U'^2 = \left[\Omega_l\left(1-\tilde{p}^2V_A^2\right) - s\Omega_{l0}\right]\times \\
\times\left[\Omega_l \ln\frac{1+U}{1+U_A} + \frac{2pV_A}{R_0}\left(U-U_A\right)\right] + \\
+\frac{p^2V_A^2}{2R_0^2}\left(2-\tilde{p}^2V_A^2\right)\left[U\left(2+\tilde{U}\right)-U_A\left(2+\tilde{U}_A\right)\right] - \\
- sJ\left(\arccos\frac{1}{1+U} - \arccos\frac{1}{1+U_A}\right).
\end{gathered} \tag{43}
$$

Релятивистские пучки. Условие существования экстремума у функции $U(z)$ описывается формулой

$$
\begin{gathered}
\left[\left(1-p^2V_A^2\right)\ln\frac{1+U}{1+U_A}\right]\Omega_l^2 + \\
+\left[\frac{2pV_A}{R_0}\left(1-p^2V_A^2\right)\left(U-U_A\right) - c\Omega_{lB}\ln\frac{1+U}{1+U_A}\right]\Omega_l + \\
+\left\{-\frac{2pV_A}{R_0}c\Omega_{lB}\left(U-U_A\right) + \right. \\
+\frac{p^2V_A^2}{2R_0^2}\left(2-p^2V_A^2\right)\left[U\left(2+U\right)-U_A\left(2+U_A\right)\right] - \\
\left. - A\sqrt{2}\left(\arccos\frac{1}{1+U} - \arccos\frac{1}{1+U_A}\right)\right\} = 0.
\end{gathered} \tag{44}
$$

Бриллюэновское магнитное поле Ω_{lB} является корнем квадратного уравнения, получаемого из (42) при $U = U_A = \text{const}$

$$
\begin{gathered}
\left[(1-c) - p^2V_A^2\right]\Omega_{lB}^2 + \frac{2pV_A}{R_0}\left(1+U_A\right)\times \\
\times\left[(1-c) - p^2V_A^2\right]\Omega_{lB} + \\
+\left[-\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{U_A\left(2+U_A\right)}} + \frac{p^2V_A^2}{R_0^2}\left(1+U_A\right)^2\left(2-p^2V_A^2\right)\right] = 0.
\end{gathered} \tag{45}
$$

После вычисления Ω_{lB} максимально возможное магнитное поле $\Omega_{lm}(p) > \Omega_{lB}$ определено квадратным уравнением (44) при $U = 0$. Возможное значение поля $\Omega_{lm} < \Omega_{lB}$ в том же порядке может быть получено из уравнений (44), (45) при фиксации величины $U > U_A$ в (44).

Нерелятивистские пучки. В случае нерелятивистских скоростей

$$V_A = \sqrt{2},\quad V_\psi = p\sqrt{2} \tag{46}$$

и уравнение (3) принимает вид (8) с новым значением параметра Ω^2

$$\Omega^2 = \Omega_l\left(\Omega_l - c\Omega_{lB}\right) + \frac{2p\sqrt{2}}{R_0}\left(\frac{p\sqrt{2}}{R_0} + \Omega_l - c\Omega_{lB}\right). \tag{47}$$

С учетом этого изменения оказываются справедливыми формулы разд. 2.

Вводя обозначения

$$\frac{p}{R_0} = \alpha\sqrt{A},\quad \Omega_{lB} = \sqrt{A}\omega_{lB},\quad \Omega_l = \sqrt{A}\omega_l, \tag{48}$$

приходим к следующим выражениям:

$$
\begin{gathered}
\omega_{lB} = -\alpha\sqrt{2} + \sqrt{2\alpha^2 + \frac{1-4\alpha^2}{1-c}}, \\
\omega_l = -\alpha\sqrt{2} + \frac{1}{2}c\omega_{lB} + \\
+\left[\left(\alpha\sqrt{2} + \frac{1}{2}c\omega_{lB}\right)^2 + \frac{2}{1+\sqrt{U}} - 4\alpha^2\right]^{1/2}, \\
\kappa = -\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{\omega_{lB}} - \frac{1}{2}c\right) + \frac{1}{\omega_{lB}}\times \\
\times\left[\left(\alpha\sqrt{2} + \frac{1}{2}c\omega_{lB}\right)^2 + \frac{2}{1+\sqrt{U}} - 4\alpha^2\right]^{1/2}.
\end{gathered} \tag{49}
$$

При отсутствии магнитного поля на катоде ($c = 0$) для определения минимально возможного магнитного поля имеем

$$\kappa = \frac{\sqrt{1/\left(1+\sqrt{U}\right) - \alpha^2} - \alpha}{\sqrt{1/2 - \alpha^2} - \alpha}. \tag{50}$$

Случаю магнитного поля, превышающего бриллюэновское значение, соответствует формула

$$\kappa = \frac{\sqrt{1-\alpha^2} - \alpha}{\sqrt{1/2 - \alpha^2} - \alpha}. \tag{51}$$

Из выражения для ω_{lB} в (49) следует, что при закрутке с $\alpha = 1/2$ пучок самобалансируется без магнитного поля ($\Omega_{lB} = 0$), бриллюэновский режим возможен при $\alpha^2 < 1/4$. Приведенные ниже численные значения позволяют судить об эффекте экранировки катода:

$$
\begin{gathered}
U = 0,\quad \alpha^2 = 1/9,\quad p/R_0 = 0.77;\quad c = 0, \\
\kappa = 2.1;\quad c = 0.5,\quad \kappa = 1.61.
\end{gathered} \tag{52}
$$

При $U > 0$ предельная величина параметра α еще более уменьшается

$$\alpha^2 < \frac{1}{2\left(1+\sqrt{U}\right)}. \tag{53}$$

Значения параметров α, κ, p/R_0 при двукратном ($U = 2$, $\alpha^2 < 0.455$) превышении потенциала в электронно-оптической системе по сравнению с анодным напряжением для экранированного катода ($c = 0$) приведены в табл. 2.

Цифры, соответствующие потенциалу $U = 2$, указаны ниже:

$$U = 2,\ \alpha^2 = 1/9,\ \ p/R_0 = 0.77;\ \ c = 0,\\ \kappa = 0.75;\ \ c = 0.5,\ \ \kappa = 0.34. \tag{54}$$

Ленточный нерелятивистский пучок. Сносовая скорость не влияет на параметры ленточного потока:

$$\omega_{lB} = \frac{1}{\sqrt{1-c}},\ \ \omega_l = \frac{c}{2\sqrt{1-c}} + \sqrt{\frac{c^2}{4(1-c)} + \frac{2}{1+\sqrt{U}}},\\ \kappa = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{2(1-c)}{1+\sqrt{U}}}. \tag{55}$$

При $c \to 1$ параметр $\kappa \to 1$, он довольно слабо зависит от c и U (табл. 3).

Ленточный релятивистский пучок. В релятивистском случае бриллюэновское и приложенное магнитные поля определены уравнениями

$$\omega_{lB}^2 = \left\{\sqrt{U_A(1+U_A/2)}\left[(1-c) - p^2V_A^2\right]\right\}^{-1},$$

$$\omega_l = \frac{c\omega_{lB}}{2\left(1-p^2V_A^2\right)} + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{c\omega_{lB}}{1-p^2V_A^2}\right)^2 + \right. \tag{56}$$

$$\left. + \sqrt{2}\frac{\arccos\dfrac{1}{1+U} - \arccos\dfrac{1}{1+U_A}}{\left(1-p^2V_A^2\right)\ln\dfrac{1+U}{1+U_A}}\right]^{1/2}.$$

Для экранированного катода параметр κ^2 не зависит от сносовой скорости

$$\kappa^2 = \sqrt{U_A(2+U_A)}\times\\ \times\left(\arccos\frac{1}{1+U} - \arccos\frac{1}{1+U_A}\right)\Big/\ln\frac{1+U}{1+U_A}. \tag{57}$$

При $U = 0$ выражение (57) совпадает с формулой (33) для незакрученного трубчатого пучка.

Ниже при $c = 0$ приведены значения параметра $\kappa(U)$:

U	0	1.5	2	4
κ	1.62	0.71	0.67	0. 59

Видно, что по сравнению со случаем нерелятивистских скоростей имеют место более высокие значения этого параметра при тех же относительных величинах U. Так, для $U = 2$ магнитное поле может быть снижено на 33% против 9% табл. 3.

Таблица 2. Зависимость функций κ, p/R_0 от α для нерелятивистского трубчатого пучка с экранированного катода ($U_A = 2$, $c = 0$)

α	κ	p/R_0
0.3	0.79	0.70
0.4	0.57	0.93
0.45	0.10	1.05

Таблица 3. Функция $\kappa(U)$ для нерелятивистского ленточного пучка для катода с разной степенью экранировки

U	κ ($c = 0$)	κ ($c = 0.5$)
0	$\sqrt{2}$	1.28
2	0.91	0.94
4	0.82	0.88

Таблица 4. Зависимость функций ω_{lB}, ω_l, κ от сносовой скорости для релятивистского ленточного пучка с неэкранированного катода ($U_A = 1$, $U = 0$, $c = 0.5$)

p	0.3	0.5	0.7	0.8
ω_{lB}	1.374	1.616	2.482	6.389
ω_l	1.926	2.193	3.064	6.753
κ	1.402	1.357	1.234	1.057

Влияние сносовой скорости на параметры потока демонстрирует табл. 4 при $U_A = 1$, $c = 0.5$, $U = 0$. Ее увеличение приводит к снижению допустимого магнитного поля.

3. ФОРМИРУЮЩИЕ ЭЛЕКТРОДЫ

Из приведенных выше результатов и физических соображений ясно, что все исследованные ситуации описываются одинаковыми в качественном отношении картинами распределения потенциала в пучке и в лапласовской области при расчете формирующих электродов, которые реализуют необходимые зависимости $U(z)$. По этой причине ниже рассмотрены наиболее простые варианты нерелятивистских потоков, формируемых электростатическими полями.

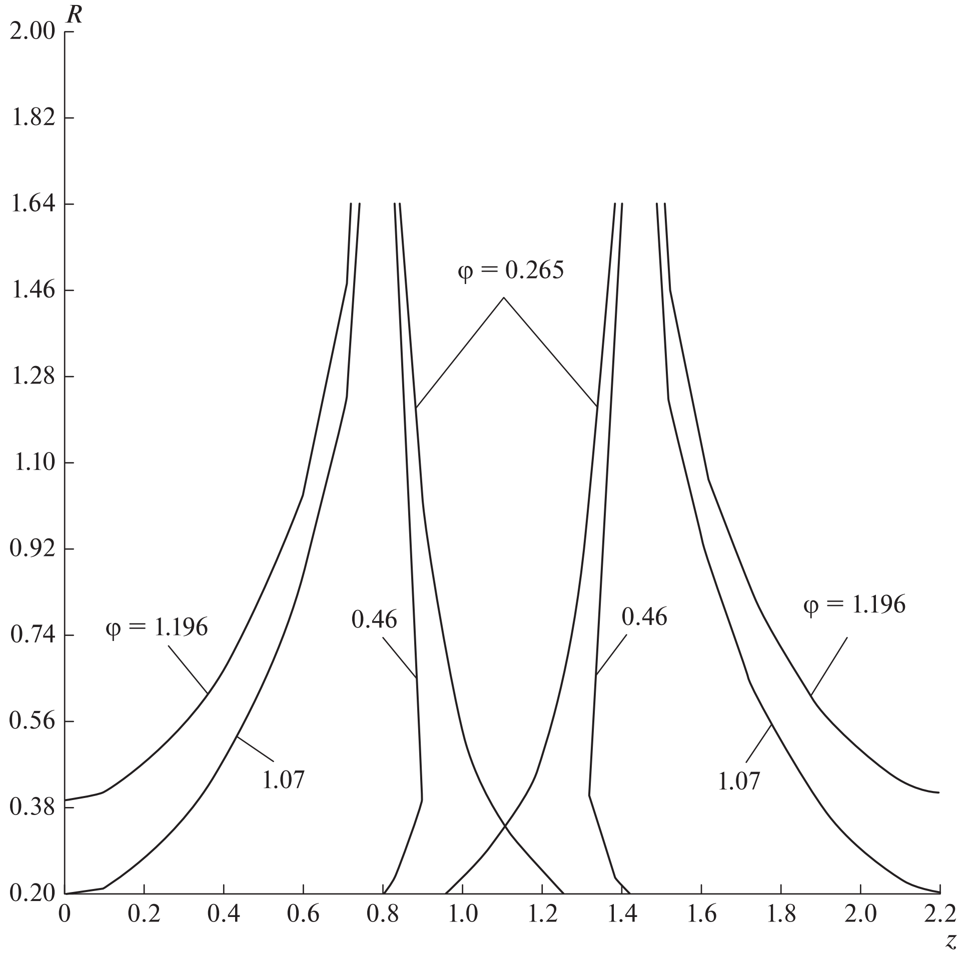

Рис. 6. Лапласовское поле вне сплошного осесимметричного пучка.

Сплошной параксиальный пучок. Параксиальное решение для цилиндрического пучка $R = R_e$ с потенциалом φ_i, $0 \le R \le R_e$, определяется формулами

$$\varphi_i = U + \frac{1}{4}(\rho - U'')R^2, \rho - U'' = \Omega^2 = \mathrm{const},$$

$$\varphi_{ie} = U + \frac{1}{4}\Omega^2 R_e^2,\ \ \rho = \frac{A}{\sqrt{U}},\ \ \Omega^2 = \kappa^2 A, \qquad (58)$$

$$\varphi = \varphi_i(R,z) - \frac{1}{4}\rho\left(R^2 - R_e^2\right) + \frac{1}{4}\rho R_e^2 \ln\frac{R}{R_e}.$$

Производная по радиусу в двух сечениях $z = 0$ и $z = T/2$, где потенциал достигает экстремальной величины U_m (формулы (15), (22)), имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{1}{2}\kappa^2 AR - \frac{1}{2}\frac{A}{\sqrt{U_m}}\left(R - \frac{R_e^2}{R}\right) \qquad (59)$$

и принимает положительное значение при $R = R_e$:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)_e = \frac{1}{2}\kappa^2 AR_e. \qquad (60)$$

Возможное наличие сепаратисы при $R = R_*$ определяется условием $\partial\varphi/\partial R = 0$, из которого для $\left(R_*/R_e\right)^2$ получаем

$$\frac{R_*^2}{R_e^2} = \frac{1}{1 - \kappa^2\sqrt{U_m}} = \pm\frac{1}{1 - \kappa^2}. \qquad (61)$$

Двойной знак в (54) соответствует двум указанным выше сечениям. Из формулы (61) следует, что эквипотенциаль-сепаратиса $\varphi = \varphi(R_*)$ существует в сечении $z = T/2$ при $\kappa > 1$ и в сечении $z = 0$, если $\kappa < 1$. На рис. 6 приведены кривые $\varphi = \mathrm{const}$ в лапласовской области для случая $R_e = 0.2$, $\kappa = 1.2$. При $\kappa < 1$ картина поля аналогична приведенной на рис. 6, сепаратисы снова имеются в сечениях $z = 0, T$ минимального потенциала на границе пучка.

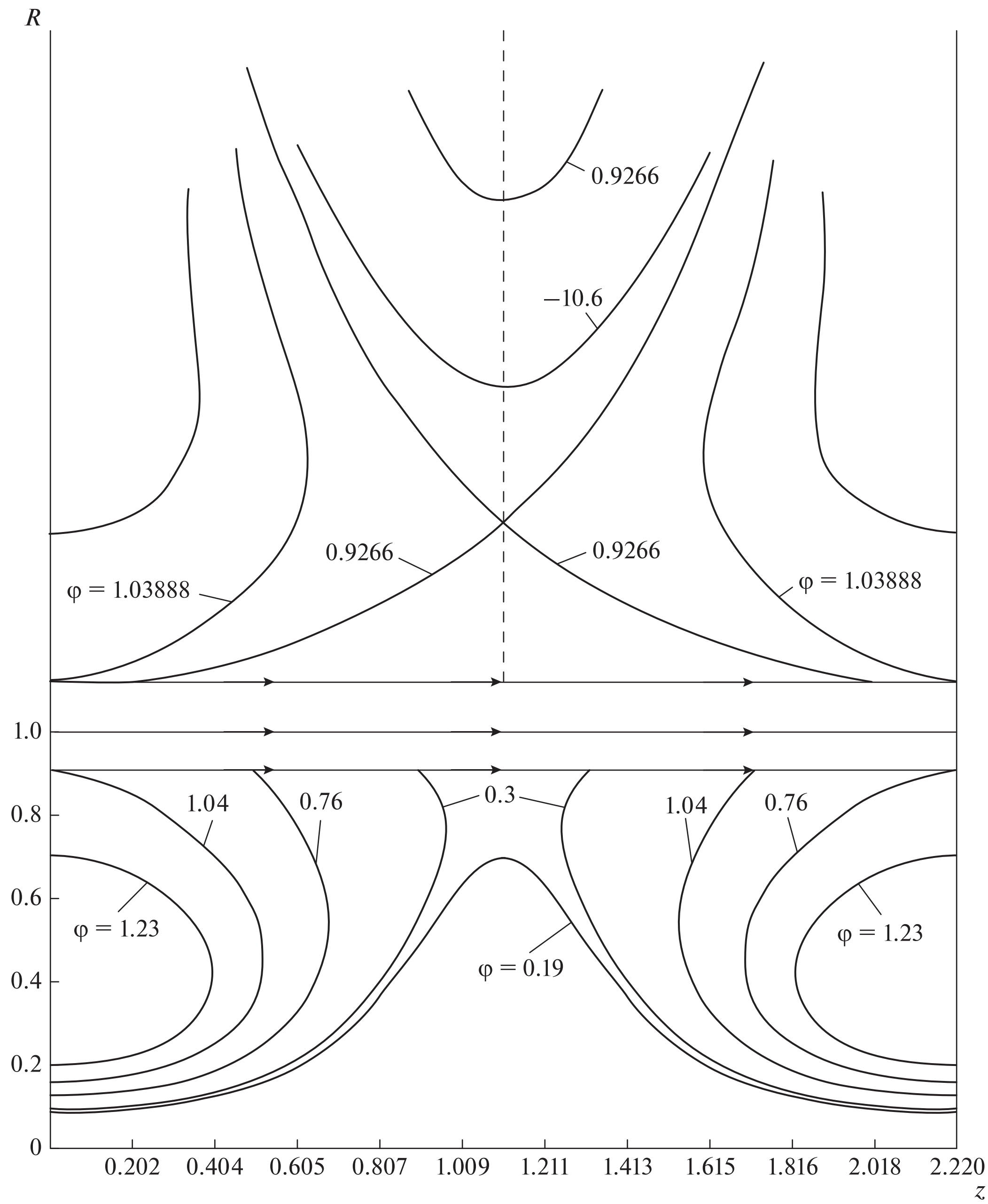

Рис. 7. Лапласовское поле для незакрученного трубчатого пучка $0.9 \le R \le 1.1$, $\kappa = 1.2$: а – качественная картина при $R > 1.1$; б – эквипотенциали в полости $R < 0.9$.

Трубчатый пучок. Решение вне трубчатого пучка описывается выражением

$$\varphi_i = U + \frac{1}{2}\kappa^2 A\left(R - R_0\right)^2,$$
$$\varphi = \varphi_i - \frac{1}{4}\frac{A}{\sqrt{U}}\left(R^2 - R_e^2 - 2R_e^2 \ln\frac{R}{R_e}\right). \quad (62)$$

От границы, внешней или внутренней, потенциал растет:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)_e = \kappa^2 A\left(R_e - R_0\right). \quad (63)$$

Существование экстремумов (возможных сепаратис) описывают условия

$$\kappa^2\left(R_* - R_0\right) - \frac{1}{2\sqrt{U_m}}\left(R_* - \frac{R_e^2}{R_*}\right) = 0,$$
$$\left(2\sqrt{U_m}\kappa^2 - 1\right)\bar{R}_*^2 - 2\sqrt{U_m}\kappa^2\bar{R}_* + \bar{R}_e^2 = 0, \quad (64)$$
$$\bar{R} \equiv R/R_0.$$

Рассмотрим два примера расчета формирующих электродов для пучка $0.9 \le \bar{R} \le 1.1$: $\kappa = 1.2$,

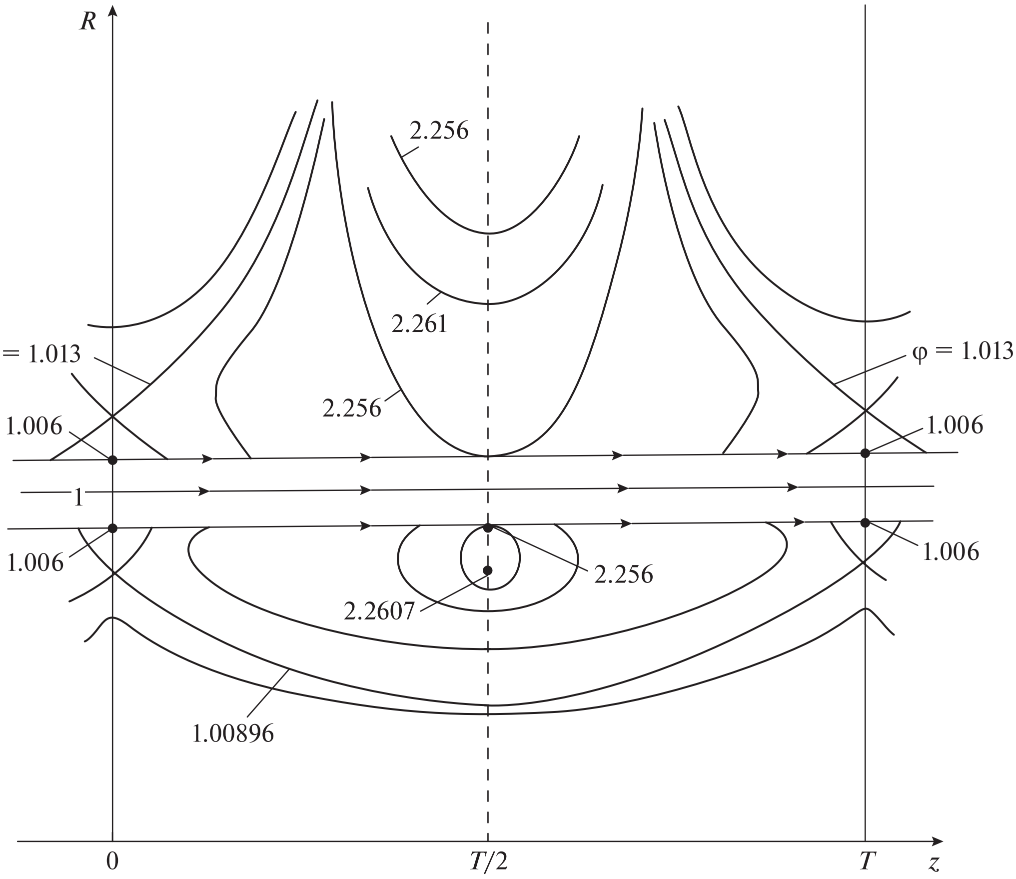

Рис. 8. Лапласовское поле для закрученного $p = 1.5$ трубчатого пучка $0.9 \le R \le 1.1$, $\kappa = 0.5$, качественная картина эквипотенциалей.

$U_m = 0.151$, незакрученный пучок; $\kappa = 0.5$, $p = 1.5$, $U_m = 2.25$. Из-за разномасштабности картин приведем качественное изображение эквипотенциалей во втором случае и при $R > 1.1$ в первом.

Для превышения магнитного поля над бриллюэновским в 1.2 раза в сечении $z = 0$, $U = 1$, $\varphi_e = 1.03888$ при $R > 1.1$ отсутствуют вещественные корни уравнения (64): потенциал от границы пучка в силу (63) монотонно возрастает. Полости соответствует корень $\overline{R}_* = 0.371$, где потенциал достигает максимума $\varphi = 1.508$, а затем монотонно убывает. При $z = T/2$ во внешней области существуют два корня: $R_* = 1.2465$, 8.087. Потенциал увеличивается от значения на границе $\varphi_e = 0.18988$ до 0.9266 – эквипотенциаль-сепаратиса, проходит через минимум $\varphi = -11.11$ и снова возрастает.

Картина кривых $\varphi = \text{const}$ при $R > 1.1$ в качественном отношении подобна случаю сплошного пучка, но отличается от него немонотонным изменением потенциала после первой точки с нулевой радиальной производной.

При $z = T/2$ в полости потенциал при $R_* = 0.79$ достигает максимального значения $\varphi = 0.235$, причем через эту точку проходит эквипотенциаль-сепаратиса, а затем убывает.

В результате рассматриваемый пучок во внешней области может быть реализован при помощи электродов с потенциалом, слабо отличающимся от единицы ($\varphi > 1$ или $\varphi < 1$ для электродов, симметричных относительно сечений $z = 0$, $z = T/2$ соответственно). В полости форму пучка может поддерживать высоковольтный электрод с потенциалом, также слабо превышающим единицу, и низковольтный гофр с $\varphi < 0.235$.

Электронно-оптическая система для закрученного потока с магнитным полем, в два раза меньшим бриллюэновского, изображена на рис. 8. Сепаратисы, как и в предыдущем примере, находятся в сечении с минимальным потенциалом $U = 1$, но точки ветвления расположены очень близко к пучку при значениях φ, также слабо отличающихся от потенциала $\varphi_e = 1.00675$ на границе: во внешней области $R_* = 1.14$, $\varphi = 1.00890$, в

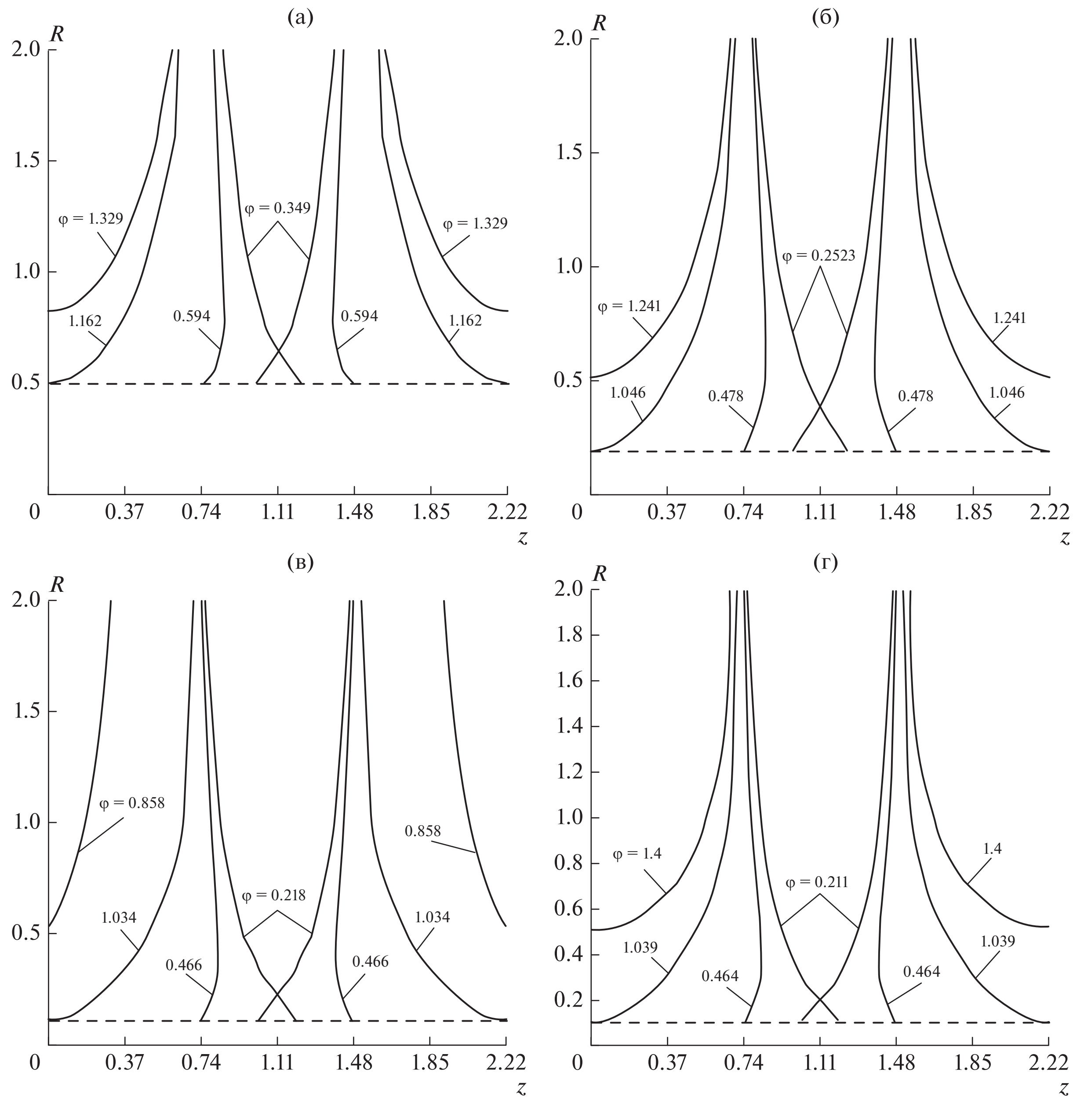

Рис. 9. Кривые $\varphi = \mathrm{const}$ для эллиптического пучка с $a/b = 5$, $\kappa = 1.2$ в сечениях $\psi = \mathrm{const}$: а – $\psi = 0$, б – $\psi = \pi/6$, в – $\psi = \pi/3$, в – $\psi = \pi/2$.

полости $R_* = 0.86748$, $\varphi = 1.00896$. После прохождения сепаратис потенциал монотонно убывает.

При $z = T/2$, $U = 2.25$ точки максимума потенциала соответствуют $R_* = 1.16$ и $R* = 0.84307$ со значениями $\varphi = 2.26089$ и $\varphi = 2.26066$. Низковольтные электроды во внешней области и гофр в полости имеют потенциал, незначительно превышающий единицу, потенциал высоковольтных электродов также слабо отличается от максимального значения на границе пучка.

Эллиптический пучок. Потенциал φ_i в эллиптическом пучке и связь декартовых координат x, y с криволинейными координатами u, v, в которых граница потока описывается уравнением $v = 0$, определены формулами

$$\varphi_i = U - \frac{1}{2}\Omega^2\left(\frac{b}{a+b}x^2 + \frac{a}{a+b}y^2\right),$$
$$x = c\left[\exp(-v) + c_1\exp(v)\right]\cos u, \qquad (65)$$
$$y = c\left[\exp(-v) - c_1\exp(v)\right]\sin u, \quad c = \frac{a+b}{2},$$

$$c_1 = \frac{a-b}{a+b};\;\; \varphi_i = U + \frac{1}{16}\Omega^2\left\{\left[(a+b)^2\exp(-2v) + \right.\right.$$
$$+ (a-b)^2\exp(2v) - 2(a-b)^2\Big] +$$
$$\left. + \left(a^2-b^2\right)\left[2-\left(\exp(-2v)+c_1^2\exp(2v)\right)\right]\cos 2u\right\},$$
$$\varphi_{ie} = U + \frac{1}{4}\Omega^2 ab(1+c_1\cos 2u).$$

В области вне пучка решение уравнения Лапласа описывается выражением

$$\varphi = \varphi_i - \frac{1}{4}\rho\left\{\frac{1}{4}(a-b)^2[\exp(2v)-1] + \right.$$
$$+ \frac{1}{4}(a+b)^2[\exp(-2v)-1] + \quad (66)$$
$$\left. + 2abv + \frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)(1-\mathrm{ch}2v)\cos 2u\right\}.$$

Для изучения эволюции эквипотенциальных поверхностей при обходе эллиптического контура удобно использовать распределение потенциала на лучах $\psi = \mathrm{const}$ полярной системы координат. При фиксированных угле $\psi = \psi_*$ и координате v соответствующее значение u определено формулой

$$\mathrm{tg}u = \frac{\exp(-v)+c_1\exp(v)}{\exp(-v)-c_1\exp(v)}\mathrm{tg}\psi_*. \quad (67)$$

Полученные таким образом величины u, v позволяют вычислить потенциал φ в точке с координатами (u,v), (x,y) при заданном z.

На рис. 9 приведены кривые $\varphi = \mathrm{const}$ в сечениях $\psi = \mathrm{const}$ для эллиптического пучка с отношением полуосей $a/b = 5$ при $\kappa = 1.2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение дало возможность сформулировать условия реализации сплошных и полых осесимметричных релятивистских электронных пучков, а также пучков с эллиптическим сечением при сохранении их начальной геометрии в момент инжекции в магнитное поле Ω_z, отличное от бриллюэновского Ω_{zB}. При $\Omega_z > \Omega_{zB}$ для незакрученных пучков предельное отношение этих параметров оценивается величиной $\sqrt{2}$, а для закрученных потоков при оптимальном соотношении продольной и азимутальной компонент скорости – величиной 2. Отсутствие пульсаций для сплошного пучка может быть обеспечено системой отстоящих от границы высоковольтных электродов с потенциалом, незначительно превышающим анодное значение φ_A, и низковольтных поверхностей с потенциалом, меньшим $0.3\varphi_A$. Для незакрученного трубчатого пучка во внешней области электронно-оптическая система при $\Omega_l > \Omega_{lB}$ образована электродами, потенциалы которых слабо отличаются от φ_A ($\varphi > \varphi_A$ и $\varphi < \varphi_A$), в полости – поверхностью с $\varphi \ge \varphi_A$ и низковольтным гофром с $\varphi < \varphi_A/4$. Закрученный пучок в магнитном поле, в два раза меньшем бриллюэновского, сохраняет форму за счет низковольтных электродов во внешней области и гофра в полости с потенциалами $\varphi \ge \varphi_A$ и высоковольтных поверхностей, потенциалы которых незначительно превышают максимальное значение $U_m = 2.25U_A$ на оси пучка.

Увеличение фронта нарастания магнитного поля приводит к росту амплитуды пульсаций потенциала на оси пучка и к более быстрому наступлению полного торможения, определяющего предельно допустимую величину магнитного поля.

Периодическое изменение потенциала, направленное против осцилляций границы в заданном магнитном поле, опережает последние при $\Omega_z > \Omega_{zB}$ и отстает от них, если $\Omega_z < \Omega_{zB}$.

Помимо вопросов формирования и транспортировки интенсивных пучков существует важная проблема устойчивости полученных решений. Изучению различных видов неустойчивости в осесимметричных системах (полые пучки, пучки с центробежной фокусировкой, неустойчивость типа Рэлея–Тэйлора, слиппинг неустойчивость) посвящены работы [6–9]. Рассмотренные выше электронные потоки не соответствуют постановкам упомянутых исследований: в том случае, когда нормальное магнитное поле на катоде присутствует, оно является однородным и не удовлетворяет для осесимметричных случаев условию убывания магнитного потока к периферии катода, приводящего к локальной неустойчивости пучка [8]. Для эллиптических пучков кроме того нет возможности выделить локальную осесимметричную трубку тока, на уравнениях которой основаны выводы работы [8]. Более того, в строгом смысле, как показало исследование течения в окрестности произвольного криволинейного катода [10], не сохраняется и начальная конфигурация самого эллиптического пучка. Таким образом, вопрос об устойчивости полученных выше решений требует специального рассмотрения, которое выходило за рамки поставленной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сыровой В.А.* Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 8. С. 999.
3. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2011. Т. 56. № 1. С. 111.
4. *Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1165.
5. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 7. С. 692.
6. *Гладун А.Д., Дунаев А.С., Лейман В.Г.* // Электронная техника. Электроника СВЧ. 1968. № 10. С. 48.
7. *Лейман В.Г.* // Электронная техника. Электроника СВЧ. 1969. № 5. С. 16.
8. *Лейман В.Г.* // Физика плазмы. 1987. Т. 13. № 10. С. 1216.
9. *Лейман В.Г., Никулин М.Г., Розанов М.Е.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 4. С. 111.
10. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 493.