РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2019, том 64, № 5, с. 498–505

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 621.3.032.266

О МОДЕЛИРОВАНИИ ЛЕНТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ТЕПЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

© 2019 г. Ю. Г. Гамаюнов[1, *], Е. В. Патрушева[1]

[1]*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Российская Федерация, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83*

**E-mail: GamaunovYG@info.sgu.ru*

Поступила в редакцию 29.06.2018 г.
После доработки 29.06.2018 г.
Принята к публикации 31.07.2018 г.

Развит метод учета начальных поперечных тепловых скоростей электронов в сходящихся ленточных электронных пучках. Метод позволяет в параксиальном приближении через выбранные характерные траектории электронов определить основные интегральные характеристики теплового пучка как в области пушки, так и в области транспортировки. Получены уравнения движения характерных электронов, начальные условия для решения уравнений, формулы для распределения плотности тока в сечении теплового пучка, а также доли тока в его условной границе. Полученные уравнения и формулы могут быть использованы при моделировании электронно-оптических систем и выборе их параметров, при которых влияние теплового движения электронов на характеристики пучка будут в допустимых пределах.

DOI: 10.1134/S0033849419050048

ВВЕДЕНИЕ

В источниках излучения *О*-типа по мере укорочения длины волны поперечные размеры электронного пучка уменьшаются, возрастает плотность тока до десятков-сотен ампер с квадратного сантиметра, а также удельная мощность пучка. Это накладывает жесткие требования на величину токопрохождения пучка в пролетных каналах и его конфигурацию. Среди факторов, определяющих структуру таких пучков и уровень его токопрохождения, следует отметить влияние поперечных начальных тепловых скоростей электронов. Хотя средняя тепловая энергия электронов составляет доли электрон-вольта, а ускоряющее напряжение соответствует энергии электронов, превосходящей на несколько порядков тепловую, тепловое движение электронов приводит к возмущению конфигурации пучка, перераспределению плотности тока по сечению, ограничению по предельному сжатию пучка. Уже в ранних работах (см., например, [1, 2] и ссылки в них) были получены соотношения и зависимости, позволяющие судить о характеристиках ленточного теплового пучка с максвелловским распределением начальных скоростей электронов на катоде. Для электростатических пушек Пирса проведены расчеты, иллюстрирующие влияние начальных скоростей электронов в таких пучках [2], но в них не учитывается магнитное поле в пушках, что представляется важным для электронно-оптических систем (ЭОС) источников излучения коротковолнового диапазона. Имеются также строгие расчеты для некоторых ЭОС приборов *О*-типа этого диапазона с учетом влияния тепловых скоростей электронов в пучке, проведенные с использованием программ анализа [3]. Однако из представленных результатов в [3] неясно, в какой мере тепловое движение электронов возмущает пучок. Следует также отметить, что, хотя расчеты ЭОС по программам анализа и являются наиболее строгими, они имеют существенный недостаток – трудоемкость в подготовке данных и неоперативность. Поэтому актуальным является развитие методов, которые позволяют устранить отмеченные выше ограничения, но при этом получать в целом достоверную информацию о тепловом пучке. Как представляется, это может быть реализовано на основе изложенного в работе [1] метода учета влияния тепловых скоростей электронов в модели ленточного пучка с максвелловским распределением начальных скоростей на катоде. Метод позволяет в параксиальном приближении через выбранные характерные траектории электронов определить основные интегральные характеристики теплового пучка.

Цель данной работы – обобщить этот метод. Было учтено изменение осевой плотности заряда теплового пучка в уравнениях движения, записанных в криволинейной системе координат, получены уравнения для моделирования электронно-оптических систем и расчета основных интегральных характеристик теплового пучка, в том числе при его фокусировке магнитным полем. Проведенное обобщение расширяет возможности метода [1] при исследовании влияния поперечных тепловых скоростей электронов в сходящихся ленточных электронных пучках.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для исследования влияния поперечных тепловых скоростей электронов в ленточных электронных пучках будем использовать криволинейную систему координат q_1, q_2, q_3. Полагаем, что q_2 является параметром семейства траекторий ламинарного пучка, т.е. семейства, в котором электроны не имеют начальных тепловых скоростей. При этом если граничная траектория ламинарного пучка описывается в декартовой системе координат функцией $\Phi(x)$, то все внутренние траектории описываются функцией $y(x) = q_2\Phi(x)$, в которой значения q_2 в верхней полуплоскости изменяются в пределах $0 \le q_2 \le 1$. Таким образом, траектории электронов ламинарного пучка лежат на поверхностях $q_2 = \text{const}$. Другая криволинейная координата q_1 является продольной координатой и выбирается так, чтобы поверхности $q_1 = \text{const}$ были ортогональны поверхностям $q_2 = \text{const}$. Координата q_3, совпадает с декартовой координатой z по ширине пучка. Координатам q_1, q_2, q_3 соответствуют координаты x, y, z декартовой системы координат. Введенная система координат аналогична системе координат, используемой в теории формирования осесимметричных пучков, развитой В.Т. Овчаровым (см., например, [4]). Введем также нормировочные величины продольных и поперечных размеров l и Φ_0 соответственно, параметр параксиальности $\mu = \Phi_0/l \ll 1$, нормированную продольную криволинейную координату $x_1 = q_1/l$ и нормированную функцию $\varphi(x_1) = \Phi(x_1)/\Phi_0$. Для выбранной системы координат коэффициенты Ламе в параксиальном приближении с точностью до μ^2 имеют вид

$$h_1 = 1 - \frac{\mu^2 q_2^2}{2}\varphi(x_1)\varphi''(x_1), \quad h_2 = \mu\varphi(x_1)l, \quad h_3 = 1. \quad (1)$$

Связь криволинейных координат с декартовыми координатами дается формулами

$$\frac{x}{l} = x_1 - \mu^2 q_2^2 \frac{\varphi(x_1)\varphi'(x_1)}{2},$$
$$\frac{y}{l} = \mu q_2 \varphi(x_1)\left[1 - \mu^2 q^2 \frac{\varphi'^2(x_1)}{2}\right], \quad z = q_3.$$

Примем, что ширина электронного пучка много больше его толщины (модель бесконечно широкого ленточного пучка). Это позволяет использовать условие $(\partial/\partial q_3) \equiv 0$ в уравнениях движения [5, с. 80], записанных в криволинейных координатах. Полагая, что в реальном, тепловом пучке известны осевые распределения плотности пространственного заряда $\rho_т(x_1)$, потенциала $U(x_1)$, магнитного поля $B(x_1)$, и, учитывая выражения (1) для коэффициентов Ламе, получим в параксиальном приближении уравнение поперечного движения электрона, стартующего на катоде из точки $x_1 = 0$, $q_2 = q_{2к}$:

$$\ddot{\omega} + \omega\psi_т + 4\omega\omega_L^2 = 4q_{2к}\varphi_к\omega_{Lк}\omega_L, \quad (2)$$

где $\omega = q_2(t)\varphi$, $\psi_т = \dfrac{\eta U_0}{l^2}\left[u''(x_1) + \dfrac{\rho_т l^2}{\varepsilon_0 U_0}\right]$, $\omega_L = \dfrac{\eta B(x_1)}{2}$, $\omega_{Lк} = \dfrac{\eta B_к}{2}$, $\varphi_к = \varphi(0)$, $B_к$ – магнитное поле на катоде, η – удельный заряд электрона, U_0 – нормировочная величина для потенциала, $u(x_1)$ – нормированный потенциал, ε_0 – электрическая постоянная. При выводе (2) удерживали члены, пропорциональные μ^2, не учитывали продольную вдоль оси q_1 и поперечную вдоль оси q_3 начальные скорости электронов на катоде, а величину текущей продольной скорости электрона определяли через осевой потенциал. Выполняя дифференцирование в (2), получим уравнение относительно функции $q_2(t)$, которая определяет траекторию электрона теплового пучка в криволинейной системе координат:

$$\ddot{q}_2 + 2\dot{q}_2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + q_2\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + q_2(\psi_т + 4\omega_L^2) = \\ = 4q_{2к}\frac{\varphi_к}{\varphi}\omega_{Lк}\omega_L. \quad (3)$$

Для функции $\varphi(x_1)$, описывающую граничную траекторию ламинарного (холодного) пучка, уравнение получается из (3), если принять $q_{2к} = q_2(t) = 1$:

$$\ddot{\varphi} + \varphi(\psi_{хол} + 4\omega_L^2) = 4\varphi_к\omega_{Lк}\omega_L. \quad (4)$$

Здесь функция $\psi_{хол}(x_1)$ определена уже через плотность пространственного заряда $\rho_{хол}(x_1)$ ламинарного пучка. При этом полагаем, что распределение осевого потенциала в ламинарном и тепловом пучках различаются незначительно и описываются единой функцией $u(x_1)$. Поэтому функции $\psi_т(x_1)$ и $\psi_{хол}(x_1)$ отличаются только осевой плотностью пространственного заряда.

Уравнение (3) – линейное неоднородное уравнение. Его общим решением является сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. В качестве фундаментальных решений однородного уравнения выберем функции $q_{кр}(t)$ и $\mu l\varphi_к\sqrt{\frac{m}{2\kappa T}}q_т(t)$ (κ – постоянная Больцмана, m – масса электрона, T – температура, K), подчинив $q_{кр}(t)$ и $q_т(t)$ следующим условиям:

$$q_{кр}(0)=1,\ \ \dot q_{кр}(0)=0;\ \ q_т(0)=0,$$
$$\dot q_т(0)=\frac{1}{\mu l\varphi_к}\sqrt{\frac{2\kappa T}{m}}.$$

Функция $q_{кр}(t)$ описывает движение электрона, вылетающего с кромки катода ($q_{2к}=1$) с нулевой скоростью, а функция $q_т(t)$ описывает движение электрона, вылетающего из центра катода с тепловой скоростью

$$(h_{2к}\dot q_{2к})_т=\sqrt{\frac{2\kappa T}{m}},$$

где $h_{2к}$ – коэффициент Ламе на катоде. Частное же решение неоднородного уравнения находим методом вариации произвольных постоянных через фундаментальные решения, оно имеет вид $q_ч(t)q_{2к}$ и в начальный момент времени при $t=0$ для него выполняются условия $q_ч(0)=\dot q_ч(0)=0$. Таким образом, общее решение уравнения (3) для электрона, стартующего из произвольной точки $q_{2к}$ на катоде с произвольной поперечной вдоль координаты q_2 скоростью $h_{2к}\dot q_{2к}$, может быть записано в виде

$$q_2(t)=q_н(t)q_{2к}+\mu l\varphi_к\sqrt{\frac{m}{2\kappa T}}q_т(t)\dot q_{2к},\tag{5}$$

где $q_н(t)=q_{кр}(t)+q_ч(t)$. Из общего решения (5) следует, что для нахождения функции $q_2(t)$ однородное дифференциальное уравнение для $q_{кр}(t)$ и неоднородное уравнение для $q_ч(t)$ можно объединить в одно неоднородное уравнение для функции $q_н(t)$. Функция $q_н(t)$, так же как и функция $q_{кр}(t)$, описывает движение электрона, покидающего катод из точки $q_{2к}=1$ с нулевой тепловой скоростью, но для нахождения $q_н(t)$ необходимо уже интегрировать неоднородное дифференциальное уравнение. Такой электрон будем называть нетепловым. Соответственно, электрон, движение которого описывается функцией $q_т(t)$, будем называть тепловым. Уравнения для функций $q_н(t)$ и $q_т(t)$, описывающих движение характерных электронов, получаются из (3), (4) и имеют вид

$$\ddot q_н+2\dot q_н\frac{\dot\varphi}{\varphi}+q_н\left[(\psi_т-\psi_{хол})+4\frac{\varphi_к}{\varphi}\omega_{Lк}\omega_L\right]=4\frac{\varphi_к}{\varphi}\omega_{Lк}\omega_L,\tag{6}$$

$$\ddot q_т+2\dot q_т\frac{\dot\varphi}{\varphi}+q_т\left[(\psi_т-\psi_{хол})+4\frac{\varphi_к}{\varphi}\omega_{Lк}\omega_L\right]=0.\tag{7}$$

Чтобы достичь точки x_1, q_2, электрон, покидающий катод из точки $q_{2к}$, должен иметь, согласно (5), начальную скорость $h_{2к}\dot q_{2к}$, равную

$$h_{2к}\dot q_{2к}=\frac{q_2-q_н(t)q_{2к}}{q_т(t)}\sqrt{\frac{2\kappa T}{m}}.\tag{8}$$

Это является решающим при вычислении распределения плотности тока по сечению теплового пучка. Действительно, принимая максвелловский закон распределения начальных тепловых скоростей электронов на катоде и пренебрегая, как было указано выше, продольными и поперечными вдоль осей q_1, q_3 начальными скоростями электронов, плотность тока $j(x_1,q_2)$ в произвольной точке x_1,q_2 можно выразить в виде

$$j(x_1,q_2)=j_к\sqrt{\frac{m}{2\kappa T}}\int\exp\left[-\frac{m}{2\kappa T}(h_{2к}\dot q_{2к})^2\right]d(h_2\dot q_2),\tag{9}$$

где $j_к$ – плотность тока на катоде. Интегрирование в (9) необходимо проводить по всем начальным скоростям электронов $h_{2к}\dot q_{2к}$, вылетающих из точек $q_{2к}$ на катоде и прибывающих в окрестность точки x_1,q_2. С учетом (8), выражение (9) для плотности тока преобразуем к виду

$$j(x_1,q_2)=j_к\mu\varphi l\sqrt{\frac{m}{2\kappa T}}\times\int\exp\left[-\left(\frac{q_2-q_т(t)q_{2к}}{q_m(t)}\right)^2\right]d\dot q_2.\tag{10}$$

Величину $\dot q_2$, которая в точке x_1,q_2 определяет скорость электрона, покидающего катод из точки $q_{2к}$, представим в виде $\dot q_2=P(t)q_{2к}$ или $d\dot q_2=P(t)dq_{2к}$, где функция $P(t)$ пока неизвестна. Это позволяет интегрирование в (10) по $\dot q_2$ заменить интегрированием по поверхности катода в пределах $-1\le q_{2к}\le 1$. Выполняя интегрирование, получим формулу для плотности тока теплового пучка, содержащую введенную функцию $P(t)$.

Если затем проинтегрировать выражение для плотности тока по координате q_2, для определения доли тока[1] I/I_0 в пределах условной границы

[1] В выражении для доли тока величина I_0 – ток катода, который равен $I_0=j_кs\int_{-1}^{1}h_{2к}dq_{2к}=2j_к\mu\varphi_кls$.

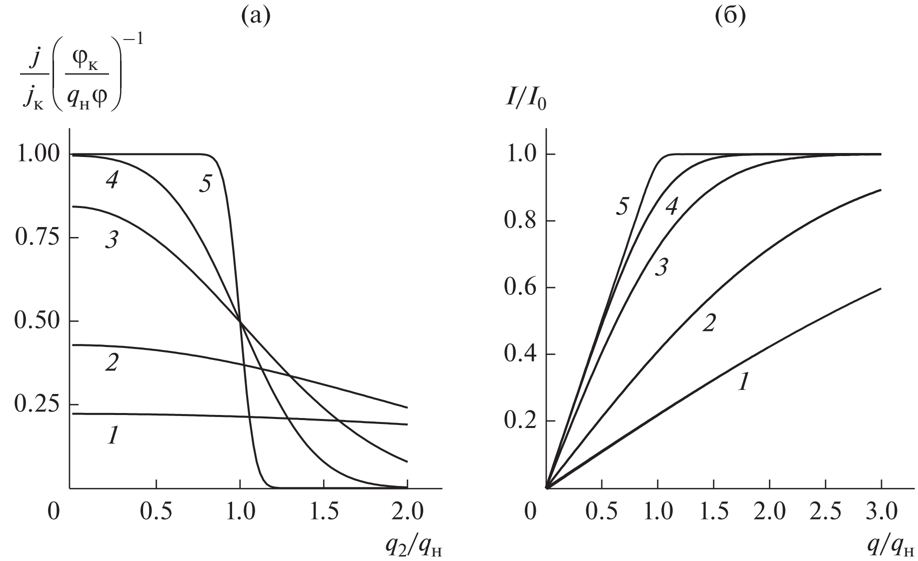

Рис. 1. Распределение плотности тока в тепловом пучке (а) и доля тока (б) в границах пучка, отстоящих симметрично от плоскости $q_2 = 0$ на величину q для значений $(q_н/q_т) = 0.2$ (*1*), 0.4 (*2*), 1 (*3*), 2 (*4*), 10 (*5*).

$q_2 = \pm q$ теплового пучка и устремить $q \to \infty$ в полученном выражении, то, очевидно, должны получить $I/I_0 = 1$. Это позволяет определить функцию $P(t)$. В итоге выражения для плотности тока теплового пучка в произвольной точке x_1, q_2 и для доли тока в пределах его условной границы примут вид

$$j(x_1,q_2)=\frac{1}{2}j_к\frac{\varphi_к}{q_н\varphi}\times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{q_н}{q_т}\left(\frac{q_2}{q_н}+1\right)\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{q_н}{q_т}\left(\frac{q_2}{q_н}-1\right)\right)\right], \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{I}{I_0}&=\frac{1}{2}\left(\frac{q}{q_н}+1\right)\operatorname{erf}\left(\frac{q_н}{q_т}\left(\frac{q}{q_н}+1\right)\right)-\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{q_н}-1\right)\operatorname{erf}\left(\frac{q_н}{q_т}\left(\frac{q}{q_н}-1\right)\right)+\\&+\frac{q_т}{2\sqrt{\pi}q_н}\exp\left(-\frac{q_н^2}{q_т^2}\left(\frac{q}{q_н}+1\right)^2\right)-\\&-\frac{q_т}{2\sqrt{\pi}q_н}\exp\left(-\frac{q_н^2}{q_т^2}\left(\frac{q}{q_н}-1\right)^2\right),\end{aligned} \tag{12}$$

где $\operatorname{erf}(u)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \exp[-(\xi^2)]d\xi$ интеграл вероятности. На рис. 1 представлены зависимости, отображающие изменение плотности тока по сечению теплового пучка и относительную величину тока в его границах, параметром является отношение $q_н/q_т$. Если условная граница совпадает с траекторией нетеплового электрона, т.е. $q = q_н$ и $q_н/q_т > 1$, то с хорошим приближением доля тока может быть найдена при асимптотическом разложении интеграла вероятности:

$$\frac{I}{I_0}=1-\frac{q_т}{2\sqrt{\pi}q_н}. \tag{13}$$

Полученные формулы (11), (12) и зависимости, представленные на рис. 1, по виду аналогичны таковым в [1, 2], но отличаются тем, что в них учтено влияние магнитного поля на характеристики теплового пучка через значения функций $q_н(t), q_т(t)$, которые определены уравнениями (6), (7).

Для объемной плотности пространственного заряда на оси теплового пучка ($q_2 = 0$) из выражения (11) имеем

$$\rho_т(x_1)=\frac{I_0}{2\mu l s q_н\varphi(x_1)\sqrt{2\eta u(x_1)U_0}}\operatorname{erf}\left(\frac{q_н}{q_т}\right).$$

Аналогично объемная плотность пространственного заряда на оси ламинарного пучка будет:

$$\rho_{хол}(x_1)=\frac{I_0}{2\mu l s\varphi(x_1)\sqrt{2\eta u(x_1)U_0}}.$$

Подставляя полученные выражения для $\rho_т(x_1)$ и $\rho_{хол}(x_1)$ в уравнения (6), (7), получим самосогласованную систему уравнений, в которой учтено взаимное влияние двух факторов: пространственного заряда $\rho_т(x_1)$ на движение электронов в тепловом пучке и движение электронов на плотность пространственного заряда. В этих уравнениях, а также в уравнении (4) удобно перейти к дифференцированию по координате x_1 и вместо магнитных полей $B(x_1)$ и $B_к$ ввести, как это сделано в [6], величины их превышения над бриллюэновским полем для ламинарного пучка с нормированной в кроссовере полутолщиной $\varphi_0 = d/2\Phi_0$ (d — толщина пучка). Уравнения примут вид

$$q_{\text{н}}'' + \frac{1}{2}q_{\text{н}}'\left(\frac{u'}{u} + 4\frac{\varphi'}{\varphi}\right) + \frac{in(x_1)(n_0^2 - 1)}{2\varphi u n_0}(q_{\text{н}} - 1) = \\ = \frac{iq_{\text{н}}}{2\varphi u}\left[\frac{1}{q_{\text{н}}}\operatorname{erf}\left(\frac{q_{\text{н}}}{q_{\text{т}}}\right) - 1\right], \tag{14}$$

$$q_{\text{т}}'' + \frac{1}{2}q_{\text{т}}'\left(\frac{u'}{u} + 4\frac{\varphi'}{\varphi}\right) + \frac{in(x_1)(n_0^2 - 1)}{2\varphi u n_0}q_{\text{т}} = \\ = \frac{iq_{\text{т}}}{2\varphi u}\left[\frac{1}{q_{\text{н}}}\operatorname{erf}\left(\frac{q_{\text{н}}}{q_{\text{т}}}\right) - 1\right], \tag{15}$$

$$\varphi'' + \frac{u'}{2u}\varphi' + \frac{u''}{2u}\varphi + \frac{in(x_1)}{2u}\times \\ \times\left[n(x_1)\frac{\varphi}{\varphi_0} - \frac{n_0^2 - 1}{n_0}\right] = \frac{i}{2u^{3/2}}, \tag{16}$$

где n_0 — превышение рабочего магнитного поля над бриллюэновским полем, $B_{\text{Бр}} = 1.04\times10^{-3}\sqrt{\frac{p_\mu U_0}{sd}}$ (тесла, вольт, миллиметр), p_μ — микропервеанс пучка, s — ширина пучка, $n(x_1)$ — текущее превышение, $i = 0.0952\, p_\mu/\mu\mu_1$, $\mu_1 = s/l$. Уравнение (16) совпадает с уравнением внутренней задачи синтеза сходящихся ленточных электронных пучков и описывает формирование ламинарных пучков при частичной магнитной экранировке катода. Решение этого уравнения, включающее определение распределения осевого потенциала $u(x_1)$ и магнитного поля $n(x_1)$, обеспечивающих формирование ламинарного электронного пучка с заданными параметрами, согласованно входящего в область рабочего магнитного поля, представлено в [6]. Там же представлено и решение внешней задачи синтеза для определения конфигурации электродов формирующей системы. Результаты решения уравнения (16) необходимо использовать при интегрировании уравнений (14), (15) для нахождения функций $q_{\text{н}}(x_1), q_{\text{т}}(x_1)$, через которые по формулам (11)–(13) определены основные интегральные характеристики теплового пучка.

Таким образом, решение системы уравнений (14)–(16) позволяет получить достаточно полную информацию о том, в какой мере реальный тепловой пучок, в котором учтены начальные скорости электронов, будет отличаться от ламинарного электронного пучка с граничной траекторией в области пушки, описываемой функцией $\varphi(x_1)$ и имеющий в кроссовере и регулярной области магнитного поля нормированную полутолщину φ_0. Уравнения (14)–(16) могут быть использованы для исследования эффектов тепловых скоростей и при формировании пучка пушками с экранированным от магнитного поля катодом и пушками с сопровождением пучка магнитным полем. В первом случае в уравнениях сомножитель $(n_0^2 - 1)/n_0$ следует принять равным нулю (рабочее магнитное поле равно бриллюэновскому полю), а во втором случае заменить его на n_0 и задать нормированное магнитное поле $n(x_1)$ формулой $n(x_1) = n_0\varphi_0/\varphi(x_1)$. Особенности решения уравнения (16) в этих случаях представлены в работах [7, 8]. Уравнения (14), (15) упрощаются для области транспортировки, где[2] $\varphi(x_1) = \varphi_0$. Так как в этой области осевой потенциал $u(x_1) = 1$ и нормированное осевое магнитное поле $n(x_1) = n_0$, то в уравнениях (14), (15) будут отсутствовать производные от $u(x_1)$ и $\varphi(x_1)$, а уравнение (16) превратится в тождество.

Численное интегрирование уравнений (14)–(16) непосредственно от катода ($x_1 = 0$) невозможно, так как $u(0) = 0$. Поэтому необходимо сформулировать условия для функций $q_{\text{н}}(x_1), q_{\text{т}}(x_1)$ вблизи катода. Из физических соображений ясно, что вблизи катода плотности объемного пространственного заряда в тепловом и ламинарном пучках близки. В этом случае $\operatorname{erf}(q_{\text{н}}/q_{\text{т}}) \approx 1$. Поэтому решение уравнения (14) вблизи катода будет

$$q_{\text{н}}(x_1) = 1,\quad q_{\text{н}}'(x_1) = 0. \tag{17}$$

Физически равенство $q_{\text{н}}(x_1) = 1$ означает, что траектория нетеплового электрона вблизи катода совпадает с граничной траекторией ламинарного пучка, для которого $q_2(x_1) = 1$. Траектории будут совпадать и в общем случае, если в области формирования или транспортировки $\operatorname{erf}(q_{\text{н}}/q_{\text{т}}) \approx 1$ (отметим, что полученная ранее формула (13) будет тогда определять долю тока в границах ламинарного пучка, т.е. при $q_2 = \pm1$).

Определение начальных условий для функции $q_{\text{т}}(x_1)$, которая описывает траекторию теплового электрона, проведем, полагая, что вблизи катода

$$n(x_1) \approx n_{\text{к}} = \frac{(n_0^2 - 1)\varphi_0}{n_0\varphi_{\text{к}}},\quad \varphi(x_1) \approx \varphi_{\text{к}} \quad \text{и} \\ \frac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)} \ll \frac{u'(x_1)}{u(x_1)}.$$

Первое условие следует из сопровождения ламинарного пучка магнитным полем вблизи катода в

[2] Равенство $\varphi(x_1) = \varphi_0$ выполняется только при согласованном вводе ламинарного пучка в рабочее магнитное поле области транспортировки. При формировании пучка пушками с сопровождением ламинарный пучок в области транспортировки будет пульсировать.

пушках с частичной магнитной экранировкой катода, а второе условие является следствием изменения осевого потенциала по закону $u(x_1) \approx kx_1^{4/3}$, который получается из уравнения (16), $k = \left(9i/4\varphi_к\right)^{2/3}$. Эти условия всегда выполняются в ЭОС в режиме ограничения тока пространственным зарядом. Кроме того, так как вблизи катода правая часть уравнения (15) оказывается равной нулю, то, как показано в Приложении, решение этого уравнения будет иметь вид

$$q_т(x_1) = \frac{0.06n_0}{n_0^2 - 1}\sqrt{\frac{s}{d\lambda}}\sin\left[\left(18\frac{i\varphi_0^3}{\varphi_к^4}\right)^{1/6}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}x_1^{1/3}\right], \quad (18)$$

$$q'_т(x_1) = 0.02\sqrt{\frac{s}{d\lambda}}\left(18\frac{i\varphi_0^3}{\varphi_к^4}\right)^{1/6} \times \\ \times x_1^{-2/3}\cos\left[\left(18\frac{i\varphi_0^3}{\varphi_к^4}\right)^{1/6}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}x_1^{1/3}\right], \quad (19)$$

где $\lambda = \sqrt{p_\mu U_0/T}$ – параметр тепловых скоростей. Такой же параметр введен в [1] при исследовании эффектов тепловых скоростей в электростатических пушках Пирса, формирующих аксиально симметричные электронные пучки. Полученные формулы (18), (19) следует использовать при численном интегрировании уравнения (15), вычисляя по ним значения функции $q_т(x_1)$ и ее производной вблизи катода, отступив, например, от катода на малый шаг интегрирования.

2. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим модель ЭОС, в которой распределение потенциала в области формирования $0 \le x_1 \le 1$ описывается соотношением $u(x_1) = kx_1^{4/3}$, $u(1) = 1$. Распределение потенциала по закону 4/3 характерно для ЭОС, формирующей ламинарный пучок без компрессии, когда $\varphi_к = \varphi_0$. Если положить $\varphi_к = 1$, что всегда можно сделать выбором нормирующей величины Φ_0, то значение параметра $i = 4/9$. В области транспортировки, т.е. при $x_1 \ge 1$, осевой потенциал $u(x_1) = 1$, а уровень фокусирующего магнитного поля имеет нормированную величину n_0. Пусть в плоскости $x_1 = 1$, т.е. на аноде, магнитное поле скачком уменьшается от величины n_0 до величины $n_к = (n_0^2 - 1)/n_0$. Это обеспечивает согласованный ввод ламинарного пучка постоянного сечения из области формирования (пушки) в область транспортировки при условии сопровождения пучка магнитным полем с уровнем $n_к$ в области пушки. Будем также полагать, что тепловые скорости электронов слабо возмущают тепловой пучок. Поэтому движение электронов теплового пучка будет происходить на фоне пространственного заряда ламинарного пучка. Подобное приближение использовали в [1, 2] при исследовании эффектов тепловых скоростей в электростатических пушках Пирса и в [5] при выводе формулы для плотности тока в тепловом аксиально-симметричном пучке. При сделанных предположениях формулы (17)–(19) оказываются справедливыми во всей области пушки, а не только вблизи катода, так как выполнено условие $\operatorname{erf}\left(q_н/q_т\right) \approx 1$. Поэтому в плоскости $x_1 = 1$ (анода) будем иметь $\tilde{q}_н = 1$, $\tilde{q}'_н = 0$,

$$\tilde{q}_т = \frac{0.06n_0}{n_0^2 - 1}\sqrt{\frac{s}{d\lambda}}\sin\left[(18i)^{1/6}\frac{n_0^2-1}{n_0}\right], \quad (20)$$

$$\tilde{q}'_т = 0.02\sqrt{\frac{s}{d\lambda}}(18i)^{1/6}\cos\left[(18i)^{1/6}\frac{n_0^2-1}{n_0}\right]. \quad (21)$$

Полученные значения функции $\tilde{q}_т$ и ее производной являются начальными условиями для определения этой функции из уравнения (15) в области транспортировки. Решение уравнения (15) в этой области с начальными условиями (20), (21) имеет вид

$$q_т(x_1) = \tilde{q}_т\sqrt{1 + \frac{2}{i(n_0^2-1)}\left(\frac{\tilde{q}'_т}{\tilde{q}_т}\right)^2} \times \\ \times \sin\left[\sqrt{\frac{i(n_0^2-1)}{2}}(x_1 - 1) + \psi\right], \quad (22)$$

где $\operatorname{tg}^2\psi = \dfrac{i(n_0^2-1)}{2}\left(\dfrac{\tilde{q}_т}{\tilde{q}'_т}\right)^2$. Так как в области транспортировки функция $q_н(x_1) = 1$, а функция $q_т(x_1)$ периодическая, то периодической функцией будет и отношение $\dfrac{q_н(x_1)}{q_т(x_1)} = \dfrac{1}{q_т(x_1)}$, которое по формулам (11)–(13), определяет основные интегральные характеристики пучка, в том числе его условную границу с заданным уровнем I/I_0 токосодержания (из уравнения (12) она может быть найдена). Поэтому эта граница будет пульсировать в пролетном канале с чередованием узлов, где $q_т(x_1) = 0$ (аргумент синуса кратен π), и пучностей, когда аргумент синуса принимает значения $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, $7\pi/2$ и т.д. При значениях аргумента $3\pi/2$, $7\pi/2$ и т.д. величина $q_т(x_1) < 0$, но по модулю она максимальна. Отрицательное значение $q_т(x_1)$ физически означает, что тепловой электрон пересек плоскость $q_2 = 0$ и находится в нижней полуплоскости. Но так как движение электронов пучка симметрично относительно плоскость $q_2 = 0$, то величину $q_т(x_1)$ в формуле (22) в этих случаях следует брать по модулю. В узлах распределение плотности тока по сечению теплового пучка и его конфигурация, будет как в ламинарном пучке. В пучностях же расплывание теплового пучка максимально и, например, в границах ламинарного пучка, в соответствии с формулами (13), (22) доля тока будет выражаться формулой:

$$\frac{I}{I_0} = 1 - \frac{0.06n_0}{2\sqrt{\pi}(n_0^2-1)}\sqrt{\frac{s}{d\lambda}}\sqrt{\sin^2\left[(18i)^{1/6}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}\right] + 0.58\frac{(n_0^2-1)}{i^{2/3}n_0^2}\cos^2\left[(18i)^{1/6}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}\right]}. \quad (23)$$

Из формулы (23) видно, что доля тока в границах ламинарного пучка зависит от величины $\sqrt{s/d\lambda}$, т.е. от электрических и геометрических параметров пучка, и от уровня фокусирующего поля. На рис. 2 представлены результаты расчета I/I_0 по этой формуле в зависимости от превышения рабочего магнитного поля над бриллюэновским полем для различных значений $\sqrt{s/d\lambda}$. Эти зависимости могут быть использованы для оценки величины токопрохождения теплового пучка в пролетном канале для случая некомпрессионной оптики. Так, если параметры ЭОС, как в [3] (I_0 = 0.1 А, U_0 = 20000 В, T = 1200 К, B_0 = 1.12 Т, s = 0.7 мм, d = = 0.1 мм), то $\sqrt{s/d\lambda}$ = 3.44, n_0 = 10.8, и из зависимостей рис. 2 следует, что в такой ЭОС тепловые скорости электронов на характеристики пучка и его токопрохождение в канале практически не влияют, так как почти весь ток теплового пучка в пучностях сосредоточен в границах ламинарного пучка. Ясно, что для сходящихся электронных пучков необходимо численно интегрировать уравнения (14)–(16), а затем использовать формулы (11)–(13).

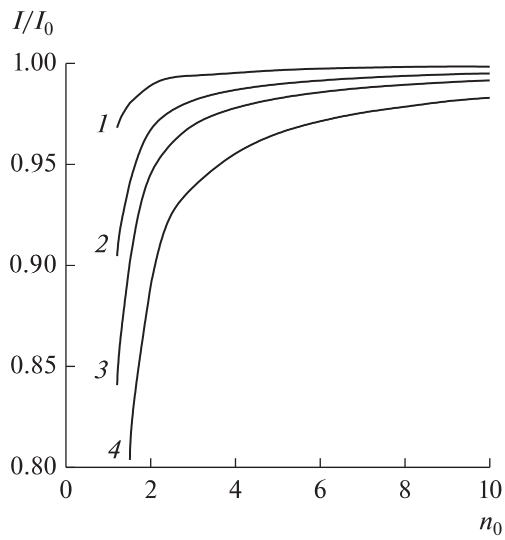

Рис. 2. Относительная величина тока теплового пучка в границах ламинарного пучка в зависимости от превышения магнитного поля над бриллюэновским полем. Параметр $\sqrt{s/d\lambda}$ = 1 (*1*), 3 (*2*), 5 (*3*), 10 (*4*).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный метод учета влияния начальных тепловых скоростей электронов дает возможность оперативно получать информацию об основных интегральных характеристиках тепловых электронных пучков. Его можно рассматривать как дополнение к методу синтеза при моделировании электронно-оптических систем, поскольку имеется возможность обоснованно выбирать параметры пучка, компрессию пушки, уровень фокусирующего магнитного поля, при которых влияние теплового движения электронов на характеристики пучка будут в допустимых пределах. Последнее является важным при разработке электронно-оптических систем для источников излучения *О*-типа коротковолнового диапазона.

Авторы признательны Д.И. Трубецкову за проявленный интерес к работе и сделанные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-02-00666).

ПРИЛОЖЕНИЕ

При условиях, принятых выше, уравнение (14) вблизи катода примет вид

$$q_т'' + \frac{2}{3x_1}q_т' + \frac{i\varphi_0}{2kx_1^{4/3}}\frac{(n_0^2-1)^2}{\varphi_к^2 n_0^2}q_т = 0. \quad (П.1)$$

Решение уравнения, удовлетворяющее условию $q_т(0) = 0$, имеет вид

$$q_т(x_1) = A\sin\left[3\sqrt{\frac{i\varphi_0}{2k\varphi_к^2}}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}x_1^{1/3}\right], \quad (П.2)$$

$$q_т'(x_1) = \frac{A}{x_1^{2/3}}\sqrt{\frac{i\varphi_0}{2k\varphi_к^2}}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}\times \\ \times\cos\left[3\sqrt{\frac{i\varphi_0}{2k\varphi_к^2}}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}x_1^{1/3}\right], \quad (П.3)$$

где A – произвольная постоянная. В рамках параксиального приближения вблизи катода имеем

$$q'_{т}(x_1) = \dot{q}_{т}(t)\frac{l}{\sqrt{2\eta k U_0}x_1^{2/3}}.$$

Поэтому при $x_1 \to 0$, учитывая значение $\dot{q}_{т}(0) = \dfrac{1}{\mu l \varphi_{к}}\sqrt{\dfrac{2\kappa T}{m}}$ и соотношение (П.3), будем иметь

$$A\sqrt{\frac{i\varphi_0}{2}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{\kappa T}{eU_0}}$$

и, следовательно,

$$q_{т}(x_1) = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2}{i\varphi_0}\frac{n_0}{(n_0^2-1)}}\sqrt{\frac{\kappa T}{eU_0}}\times \times \sin\left[3\sqrt{\frac{i\varphi_0}{2k\varphi_{к}^2}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}}x_1^{1/3}\right]. \quad (\text{П}.4)$$

Параметр μ в уравнении (П.4) представим в виде

$$\mu = \sqrt{\frac{0.0952 p_{\mu}}{2\varphi_0 i}\frac{d}{s}}.$$

В итоге будем иметь

$$q_{т} = \frac{0.06 n_0}{n_0^2-1}\sqrt{\frac{s}{d\lambda}}\sin\left[\left(18\frac{i\varphi_0^3}{\varphi_{к}^4}\right)^{1/6}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}x_1^{1/3}\right],$$

$$q'_{т}(x_1) = 0.02\sqrt{\frac{s}{d\lambda}}\left(18\frac{i\varphi_0^3}{\varphi_{к}^4}\right)^{1/6}x_1^{-2/3}\times \times\cos\left[\left(18\frac{i\varphi_0^3}{\varphi_{к}^4}\right)^{1/6}\frac{(n_0^2-1)}{n_0}x_1^{1/3}\right],$$

где $\lambda = p_{\mu}U_0/T$ – параметр тепловых скоростей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирштейн П., Кайно Г., Уотерс У.* Формирование электронных пучков. М.: Мир, 1970.
2. *Алямовский И.В.* Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966.
3. *Каретникова Т.А., Рожнев А.Г., Рыскин Н.М. и др.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 1. С. 54.
4. *Невский П.В.* // Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1989. Вып. 15. С. 48.
5. *Молоковский С.И., Сушков Ф.Д.* Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
6. *Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1126.
7. *Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В.* // Матер. Междунар. науч.-техн. конф. АПЭП-2016. Саратов. 22–23 сентября, 2016. С. 30.
8. *Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В.* // Матер. Междунар. науч.-техн. конф. АПЭП-2014. Саратов. 25–26 сентября, 2014. С. 5.