

**ТЕОРИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

УДК 681.511

**ВЛИЯНИЕ ВЫСШИХ ГАРМОНИК КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО МЕТОДА  
НА ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ**

© 2019 г. А. Ф. Грибов<sup>1, \*</sup>, Б. И. Шахтарин<sup>1</sup><sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
Российская Федерация, 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5

\*E-mail: alexandr-gribov@list.ru

Поступила в редакцию 05.06.2018 г.

После доработки 02.07.2018 г.

Принята к публикации 10.07.2018 г.

Показано влияние высших гармоник в квазигармоническом методе на точность вычисления динамических характеристик кусочно-линейной фазовой автоподстройки частоты, когда известны точные значения ее полосы захвата и частоты вращательных движений.

DOI: 10.1134/S003384941905005X

## ВВЕДЕНИЕ

В данной работе анализируется точность приближенного метода исследования фазовых автоматических систем – квазигармонического метода (КГМ) – на примере фазовой автоподстройки частоты (ФАП), уравнение которой может быть записано в виде

$$p\varphi + K(p)[F(\varphi) - \beta] = 0, \quad p \equiv d/dt, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – разность фаз,  $F(\varphi)$  – периодическая нелинейность (нормированная характеристика фазового дискриминатора, ФД),  $K(p)$  – коэффициент передачи фильтра низких частот. Функция  $F(\varphi)$  удовлетворяет условиям

$$F(\varphi) = F(\varphi + 2\pi), \quad F(\varphi) = -F(-\varphi),$$

$$F'(\varphi) > 0 \quad \text{при} \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0,$$

$$F'(\varphi) < 0 \quad \text{при} \quad \varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0, \quad F(\varphi_0) = 1,$$

$$K(p) = \left( \sum_{k=0}^m b_k p^k \right) \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k \right)^{-1}.$$

Квазигармонический метод удобно рассматривать, если уравнение (1) переписать в виде

$$\sum_{k=1}^n a_{k-1} p^k \varphi + \sum_{k=0}^m b_k p^k \Phi(\varphi) = 0$$

или

$$S(p)\varphi + R(p)\Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi) \equiv F(\varphi) - \beta. \quad (2)$$

В основе КГМ лежит предположение о характере решения дифференциального уравнения: ре-

шение, соответствующее  $\varphi$ -циклам будем искать в форме

$$\varphi(t) = \omega t + \text{Im} \sum_{k=1}^N w_k \exp(ik\omega t), \quad (3)$$

где  $w_k = u_k - iv_k$ ;  $\omega, u_k, v_k$  – параметры, подлежащие определению,  $k = 1, \dots, N$  ( $N$  – число учитываемых гармоник). Представив характеристику  $F(\varphi)$  частной суммой ряда Фурье

$$F(\varphi) = h_0 + \text{Im} \sum_{k=1}^N d_k \exp(ik\omega t),$$

$$d_k = h_k^{(1)} + h_k^{(2)},$$

подставим  $\varphi(t)$  и  $F(\varphi)$  в уравнение (2). Тогда, осуществляя баланс гармонических и негармонических членов, получим систему уравнений для нахождения параметров  $\varphi$ -цикла:

$$X_0 = \omega + b_0(h_0 - \beta) = 0,$$

$$X_{2k} = \text{Re}[S(ik\omega)w_k + R(ik\omega)d_k] = 0, \quad (4)$$

$$X_{2k+1} = \text{Im}[S(ik\omega)w_k + R(ik\omega)d_k] = 0,$$

$$k = 1, \dots, N.$$

Следует отметить, что метод дает количественные оценки параметров режимов работы ФАП.

Принцип гармонической линеаризации Е.П. Попова [1, 2] при одной гармонике предполагаемого решения дифференциального уравнения (ДУ) для нелинейных систем с периодической характеристикой ФД  $F(x) = \sin x$  был рассмотрен в [3–5]. Однако в тех работах остались необоснованными

критерии устойчивости движений, отсутствовала оценка точности принципа гармонического баланса, а также влияние высших гармоник на точность решения. Частично эти вопросы рассмотрены в [6].

Качественные оценки точности КГМ для систем второго и отчасти третьего порядков рассматривались в [6–10] при использовании, как правило, одной-двух гармоник метода и при синусоидальной характеристике ФД. В [9] была решена задача строгого обоснования метода для фазовой системы любой размерности, где показаны условия, при которых процедура квазигармонического баланса определяет решение, сходящееся при увеличении числа гармоник к точному решению. Как показали исследования, данный метод применим и для нелинейных характеристик ФД, не удовлетворяющих условиям теоремы [9], в частности при кусочно-линейной аппроксимации периодической нелинейности, в том числе разрывной. Это позволяет оценить влияние высших гармоник на точность метода, поскольку известны точные значения динамических характеристик ФАП [11, 12] при кусочно-линейной аппроксимации периодической нелинейности.

Далее рассмотрим следующие кусочно-линейные аппроксимации нелинейной функции:

1) треугольную аппроксимацию –

$$F(x) = \begin{cases} x/c & \text{при } |x| \leq c, \text{ (область I)} \\ (\pi - x)/(\pi - c) & \\ \text{при } x \in (c; 2\pi - c), \text{ (область II)} \end{cases} \quad (5)$$

2) пилообразную аппроксимацию –

$$F(x) = x/\pi \text{ при } |x| \leq \pi. \quad (6)$$

Точность будем оценивать по полосе захвата ФАП и характеристике вращательных движений, причем последняя характеризуются частотой предельных циклов второго рода.

### 1. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему (1), (5) при  $c = \pi/2$  и

$$K(p) = (d\alpha_0^{-2}p + 1)/(\alpha_0^{-2}p + 1), \quad \alpha_0^{-2} = c/a^2. \quad (7)$$

На рис. 1а и 1б приведены характеристики вращательных движений  $\beta(\omega)$  (кривые биений) соответственно при  $d = 0, a = 0.8$  – интегрирующий фильтр и  $d = 0.1, a = 0.1$  – пропорционально-интегрирующий фильтр с числом используемых гармоник одна, две и три. Точное значение полосы захвата для  $d = 0; a = 0.8$  (см. рис. 1а) равно 0.6457, при учете одной гармоники – 0.6051 (ошибка 6.3%), двух гармоник – 0.6318 (ошибка 2.1%), трех гармоник – 0.6315 (ошибка 2.2%). Точ-

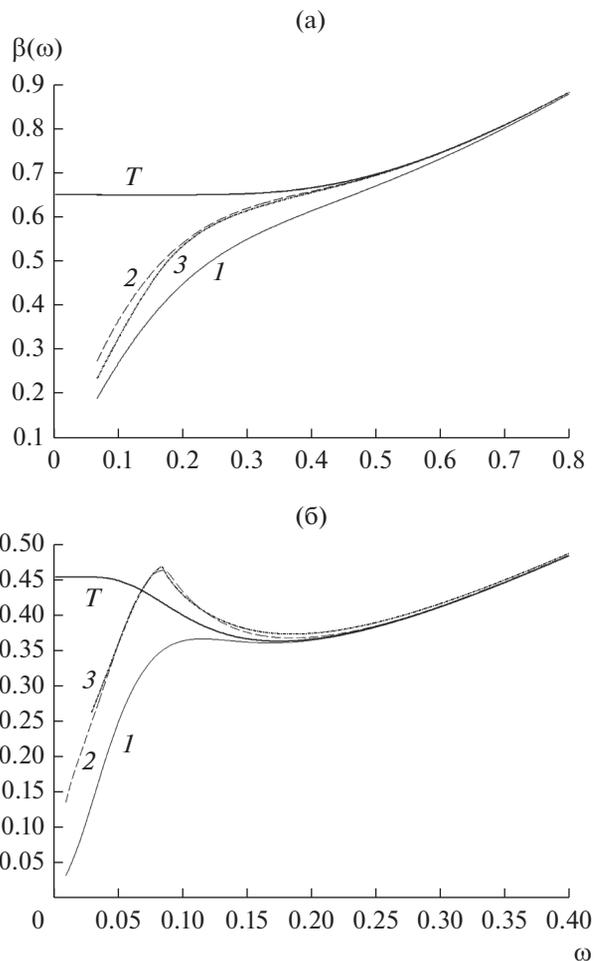


Рис. 1. Кривые биения системы (1), (5), (7) при  $d = 0$  и  $a = 0.8$  (а) и  $d = 0.1$  и  $a = 0.1$  (б) для одной (кривая 1), двух (2) и трех (3) гармоник;  $T$  – точная кривая.

ное значение полосы захвата для  $d = 0.1; a = 0.1$  (см. рис. 1б) равно 0.3618. Приближенное значение полосы захвата в этом случае при учете одной гармоники равно 0.3705 (ошибка 2.4%), двух гармоник – 0.3704 (ошибка 2.4%), трех гармоник – 0.3750 (ошибка 3.6%). Как известно [11, 12], полоса захвата в случае интегрирующего фильтра определяется сепаратрисным циклом и полуустойчивым предельным циклом в случае пропорционально-интегрирующего фильтра, что в свою очередь соответствует минимуму кривой биений [6].

На рис. 2 приведены зависимости полосы захвата ФАП от параметра  $\alpha_0^{-2}$  при  $d = 0$  и  $d = 0.3$ , полученные точно [7] (кривые  $T$ ) и приближенно при использовании одной и трех гармоник (кривые 1 и 3).

Таким образом, как показывают вычисления полосы захвата и кривых биений, для практических приложений достаточно использовать две-три гармоники предполагаемого решения ДУ.

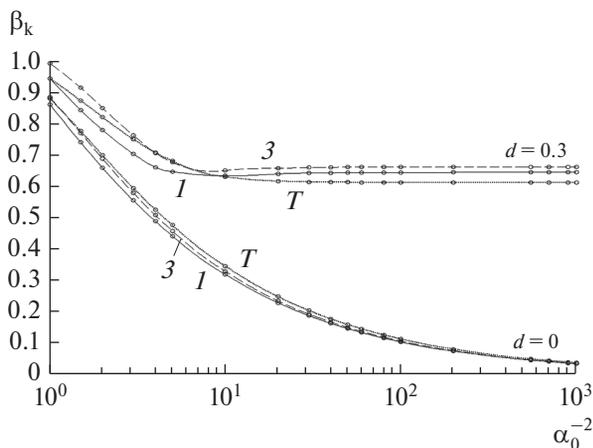


Рис. 2. Зависимость полосы захвата системы (1), (5), (7) от параметра  $\alpha_0^{-2}$ : номера кривых соответствуют числу гармоник,  $T$  – точная кривая.

На рис. 3а, 3б, 4 представлены особенности применения КГМ при использовании пилообразной характеристики ФД – система (1), (6), (7) при  $d = 0, a = 1.0$  (см. рис. 3а) и  $d = 0.1, a = 0.2$  (см. рис. 3б) и различном числе гармоник. Следует отметить, что кривые биений при 10 и 20 учитываемых гармониках практически совпадают.

Значения оценки полосы захвата и их точные значения вместе с соответствующими частотами  $\omega$  указаны при  $d = 0.1$  и различных значениях  $a$  в табл. 1.

На рис. 4 изображены зависимости полосы захвата  $\beta_k$  ФАП от параметра  $\alpha_0^{-2}$  при  $d = 0$  и  $0.5$ . Отметим, что при  $d = 0$  кривые 1–3 практически совпадают.

### 2. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ФАП ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему (1), (5),  $c = \pi/2$ , когда передаточная функция  $K(p)$  имеет вид

$$K(p) = (A_0 p^2 + A_1 p + 1) / (B_0 p^2 + B_1 p + 1), \tag{8}$$

где  $A_0 = \rho q^2, A_1 = \gamma q \delta, B_0 = q^2, B_1 = q \delta$ .

Пусть  $A_0 = A_1 = 0$  ( $\gamma = 0, \rho = 0$ ), тогда кривые биений имеют вид, представленный на рис. 5 ( $\delta = 6, q = 0.3$ ). Характер кривых биений такой же, как в случае ФАП с интегрирующим фильтром (см. рис. 1а). Обозначение кривых по числу используемых гармоник то же, что и для ФАП второго порядка.

Зависимость полосы захвата от параметра  $\delta$  изображена на рис. 6 при  $q = 0.3, q = 2.4$  и  $\gamma = \rho = 0$ . Из рис. 5 и 6 можно сделать вывод, что

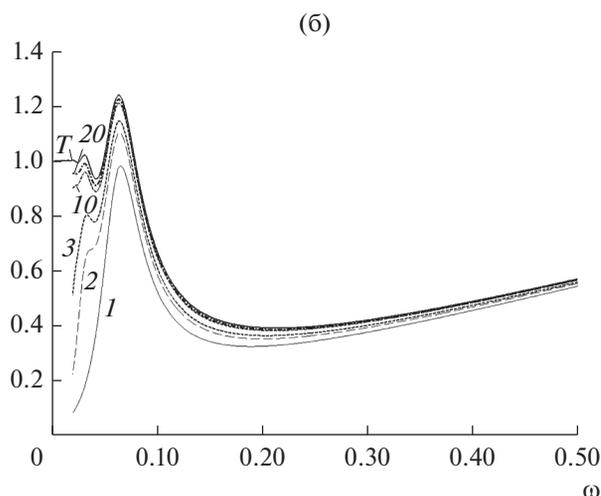
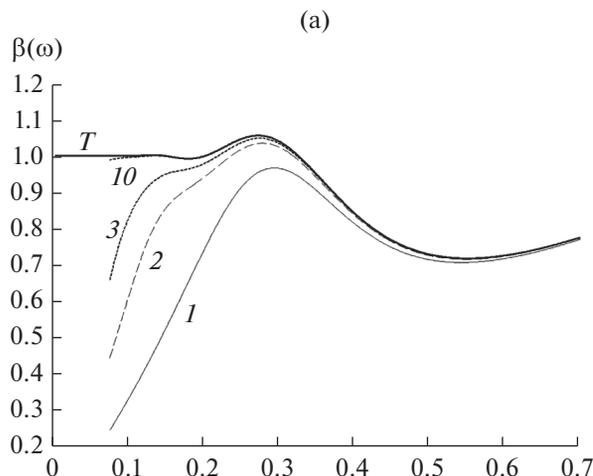


Рис. 3. Кривые биения системы (1), (6), (7) при  $d = 0$  и  $a = 1$  (а) и  $d = 0.1$  и  $a = 0.2$  (б): номера кривых соответствуют числу гармоник,  $T$  – точная кривая.

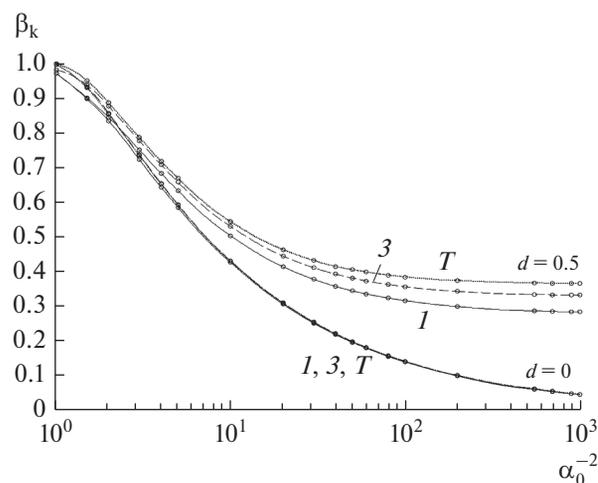


Рис. 4. Зависимость полосы захвата системы (1), (6), (7) от параметра  $\alpha_0^{-2}$ .

**Таблица 1.** Значения полосы захвата  $d = 0.1$

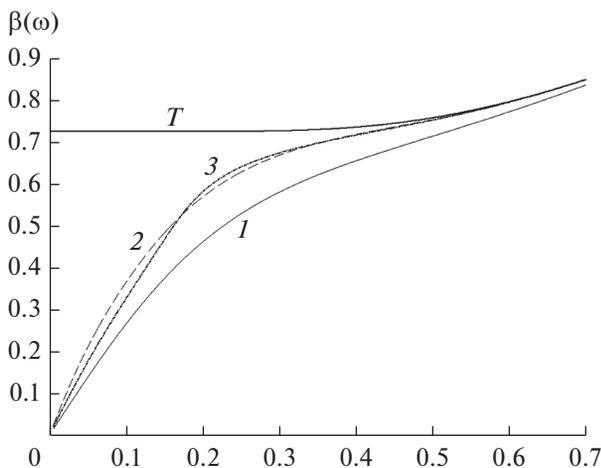
Число гармоник	Полоса захвата/частота при различном $a$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	0.2904	0.3230	0.3648	0.4144	0.4682
	0.1500	0.1990	0.2340	0.2830	0.3310
2	0.3228	0.3515	0.3906	0.4370	0.4885
	0.1660	0.2170	0.2620	0.3080	0.3540
3	0.3362	0.3615	0.3994	0.4451	0.4961
	0.1710	0.2130	0.2610	0.3090	0.3580
10	0.3578	0.3795	0.4135	0.4566	0.5059
	0.1820	0.2120	0.2520	0.2970	0.3440
20	0.3629	0.3839	0.4175	0.4592	0.5087
	0.1840	0.2120	0.2510	0.2960	0.3430
$T$	0.3682	0.3886	0.4211	0.4631	0.5115
	0.1870	0.2140	0.2530	0.2970	0.3440

двух гармоник, а в некоторых случаях трех гармоник достаточно для обеспечения приемлемой точности вычисления полосы захвата ФАП. На рис. 7 изображены кривые биений при  $\rho = 0$ ,  $q = 1.2$ ,  $\delta = 150$  и  $\gamma = 0.1$  и  $0.01$ . Значения полосы захвата при  $\gamma = 0.01$ : для одной гармоники – 0.1169, для двух – 0.1236, для трех – 0.1224,  $T$  – 0.1251; при  $\gamma = 0.1$ : для одной гармоники – 0.3681, для двух – 0.3668, для трех – 0.3718,  $T$  – 0.3616. Зависимость полосы захвата от параметра  $\delta$  при  $\rho = 0$  и  $\gamma \neq 0$  при различных значениях  $q$  и  $\gamma$  показаны на рис. 8а, 8б.

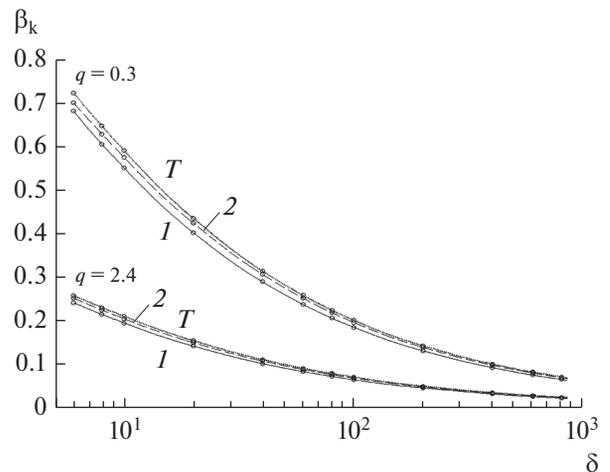
Кривые биения системы (1), (6), (8) представлены на рис. 9а ( $\gamma = \rho = 0$ ,  $\delta = 6$ ,  $q = 0.3$ ) и рис. 9б ( $\gamma = \rho = 0.1$ ,  $\delta = 20$ ,  $q = 1.2$ ). Кривые биений ана-

логичны кривым в системе второго порядка (см. рис. 3а и 3б). Для рис. 9а точное значение полосы захвата равно 0.8802; при учете одной гармоники – 0.8635, двух – 0.8784, трех – 0.8817, двадцати – 0.8804. Для рис. 9б точное значение полосы захвата равно 0.4434; при учете одной гармоники – 0.3930, двух – 0.4143, трех – 0.4229, двадцати – 0.4403. Зависимость полосы захвата от параметра  $\delta$  при  $\gamma = \rho = 0$  и различных значениях  $q$  приведена на рис. 10а. Как видим, кривые приближенного метода практически сливаются с кривыми точного метода.

На рис. 10б и 10в иллюстрируется зависимость полосы захвата от параметра  $\delta$  при  $\rho = 0$  и  $\gamma \neq 0$  и различных значениях  $q$  и  $\gamma$ . Значения полосы захвата для  $\rho = 0.1$  системы (1), (6), (8) при различ-



**Рис. 5.** Кривые биения системы (1), (5), (8) при  $\gamma = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\delta = 6$ ,  $q = 0.3$ .



**Рис. 6.** Зависимость полосы захвата системы (1), (5), (8) от параметра  $\delta$  при  $\gamma = 0$ ,  $\rho = 0$ .

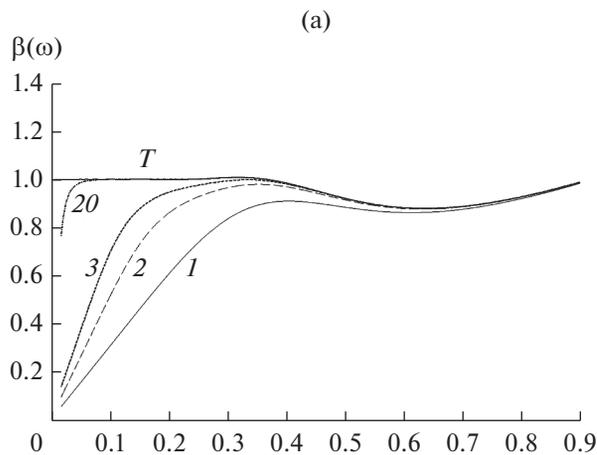
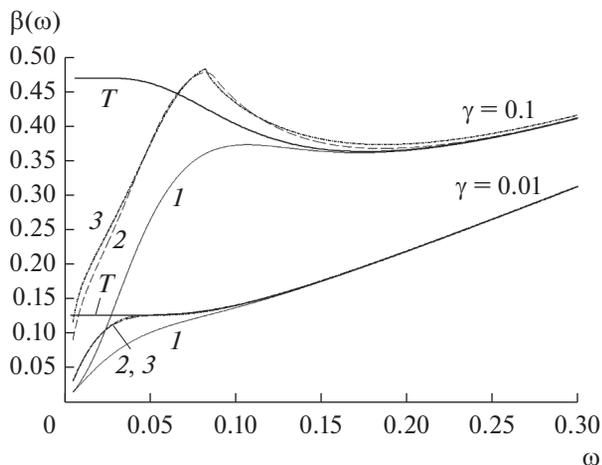


Рис. 7. Кривые биения системы (1), (5), (8) при  $\rho = 0, q = 1.2, \delta = 150$ .

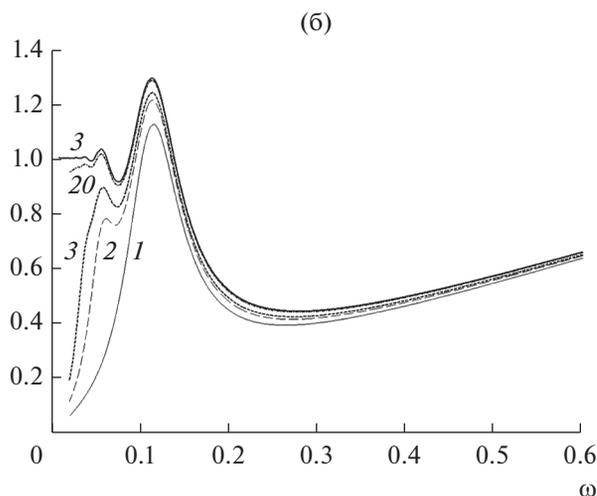
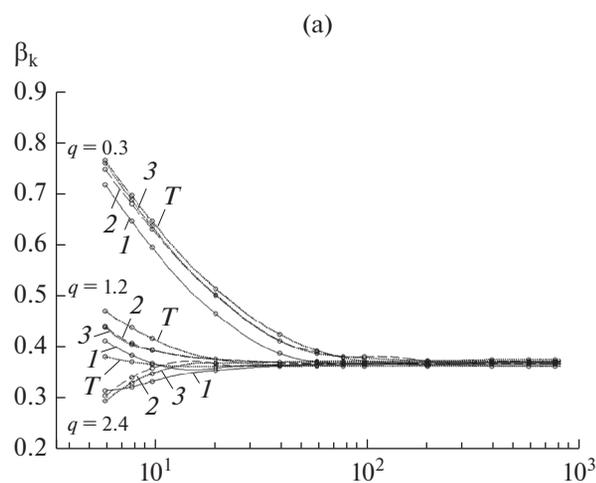


Рис. 9. Кривые биения системы (1), (6), (8) при различных параметрах: а)  $\gamma = 0, \rho = 0, \delta = 6, q = 0.3$ ; б)  $\gamma = 0.1, \rho = 0.1, \delta = 20, q = 1.2$ ; точные значения  $T$  изображены сплошной кривой, номера кривых соответствует числу учитываемых гармоник.

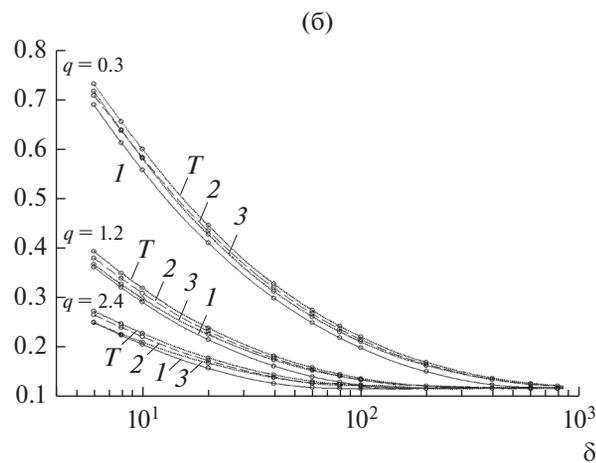


Рис. 8. Зависимость полосы захвата системы (1), (5), (8) от параметра  $\delta$  при  $\rho = 0$  и  $\gamma = 0.1$  (а) и  $0.01$  (б).

ных значениях остальных параметров приведены в табл. 2.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные в данной статье исследования показывают возможность получения высокой точности квазигармонического метода при использовании двух-трех гармоник предполагаемого решения ДУ при треугольной характеристике ФД, а при пилообразной характеристике ФД практически точные значения полосы захвата можно получить при числе гармоник, равном 20. Таким образом, показана возможность использования КГМ как для непрерывных кусочно-линейных характеристик ФД систем ФАП, так и для ФАП с разрывной (пилообразной) характеристикой. В случае пилообразной характеристики ФД увели-

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФАП

Уравнение (2) преобразуем к системе уравнений, не содержащей производные функции  $\Phi(\varphi)$

$$\dot{y} = Ay + \bar{c}\Phi(\varphi), \tag{П.1}$$

где  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$  ( $T$  – знак транспонирования),

$$y_1 = \varphi, \quad \dot{y}_i = y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - m - 1,$$

$$\dot{y}_i = y_{i+1} + c_i\Phi(\varphi), \quad i = n - m, \dots, n - 1,$$

$$c_{n-m} = -\frac{b_m}{a_{n-1}}, \quad c_{n-k} = -\frac{b_k}{a_{n-1}} \tag{П.2}$$

$$- \sum_{i=n-m+k}^{n-1} \frac{a_{n-m+k-i}c_{i-k}}{a_{n-1}}, \quad k = 1, \dots, m - 1,$$

$$\bar{c} = (0, \dots, 0, c_{n-m}, \dots, c_n)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_0/a_{n-1} & -a_0/a_{n-1} & \dots & -a_0/a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{П.3}$$

Петля сепаратрисы в кусочно-линейных системах

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (П.1) с кусочно-линейной аппроксимацией (5) функции  $F(x)$ . В этом случае система может быть преобразована к виду

$$\dot{y} = A_i y + s_i \bar{g}, \quad i = 1, 2, \tag{П.4}$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} g_1 k_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 k_i & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n k_i & -a_0/a_{n-1} & -a_0/a_{n-1} & \dots & -a_{n-2}/a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$k_1 = c^{-1}, \quad k_2 = -(\pi - c)^{-1}, \quad s_1 = -\beta,$$

$$s_2 = \pi(\pi - c)^{-1} - \beta,$$

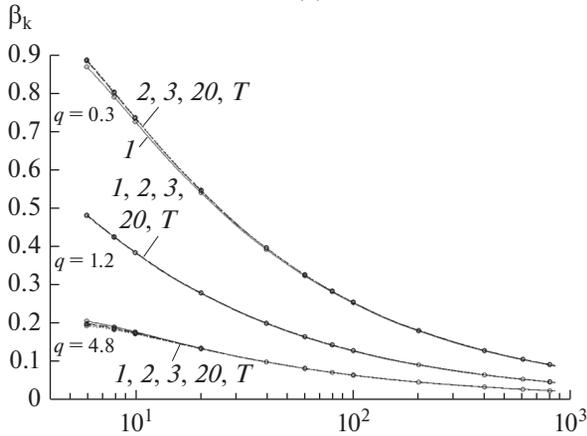
$$\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)^T, \quad g_1 = \dots = g_{n-m-1} = 0,$$

а  $g_{n-j}$  вычисляются в соответствии с (П.2),  $j = 0, \dots, m - 1$ . Корни характеристического уравнения в областях I и II обозначим соответственно через  $p_i$  и  $p'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ );  $\bar{f}_i$  и  $\bar{f}'_i$  – собственные векторы, соответствующие собственным значениям  $p_i$  и  $p'_i$ .

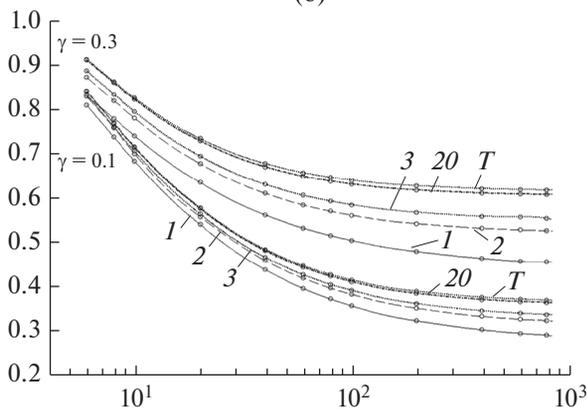
Предположим, что корни  $p_i$  и  $p'_i$  в областях I и II удовлетворяют условиям:

$$p_i \neq p_j, \quad p'_i \neq p'_j \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad \text{Im} p'_i = 0,$$

(а)



(б)



(в)

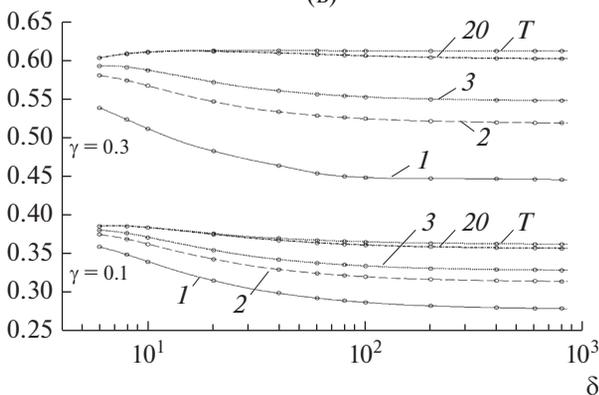


Рис. 10. Зависимость полосы захвата системы (1), (6), (8) от параметра  $\delta$  при  $\gamma = 0, \rho = 0$  (а),  $\rho = 0$  и  $\gamma = 0.3$  (б) и  $\rho = 0$  и  $\gamma = 0.1$  (в).

чение числа гармоник в предполагаемом решении ДУ осуществляется значительно проще, чем для непрерывной кусочно-линейной характеристике ФД. Сравнение данных КГМ и точных значений динамических характеристик продемонстрировано на примерах кривых биений и полосы захвата ФАП.

**Таблица 2.** Полоса захвата для пилообразной характеристики ФД при  $\rho = 0.1$  и различных  $\gamma$  и  $q$

Число учитываемых гармоник										$\delta$
1	2	3	20	$T$	1	2	3	20	$T$	
$\gamma = 0.01, q = 0.3$					$\gamma = 0.01, q = 1.2$					
0.9579	0.9680	0.9748	0.9762	0.9772	0.5706	0.5704	0.5695	0.5716	0.5735	4
0.8633	0.8789	0.8826	0.8823	0.8832	0.4834	0.4853	0.4853	0.4869	0.4891	6
0.7236	0.7330	0.7353	0.7353	0.7360	0.3893	0.3924	0.3930	0.3945	0.3967	10
0.5424	0.5489	0.5508	0.5510	0.5516	0.2891	0.2930	0.2942	0.2961	0.2979	20
0.2657	0.2710	0.2727	0.2741	0.2746	0.1561	0.1624	0.1642	0.1678	0.1690	100
0.2000	0.2057	0.2077	0.2098	0.2105	0.1286	0.1364	0.1386	0.1430	0.1442	200
$\gamma = 0.1, q = 0.3$					$\gamma = 0.1, q = 1.2$					
0.9415	0.9673	0.9751	0.9853	0.9868	0.6244	0.6348	0.6380	0.6452	0.6472	4
0.8687	0.8946	0.9008	0.9087	0.9101	0.5475	0.5615	0.5665	0.5762	0.5785	6
0.7496	0.7677	0.7732	0.7819	0.7836	0.4691	0.4864	0.4931	0.5061	0.5089	10
0.5927	0.6100	0.6160	0.6267	0.6289	0.3929	0.4141	0.4227	0.4398	0.4433	20
0.3759	0.4004	0.4087	0.4264	0.4302	0.3088	0.3376	0.3497	0.3742	0.3791	100
0.3338	0.3617	0.3710	0.3923	0.3968	0.2941	0.3257	0.3388	0.3651	0.3703	200

Примечание:  $T$  – точное значение полосы захвата.

$$\text{Re } p'_k > 0, \text{ Re } p'_k < 0, k = 2, \dots, n, \text{ Re } p_i < 0.$$

Обозначим через  $\mathbf{W}(p_1, \dots, p_n)$  матрицу, столбцами которой являются собственные векторы, соответствующие собственным значениям  $p_i$ . Пусть  $w_i = w(p_1, \dots, p_n | a)$  – определитель, получающийся из  $\det \mathbf{W}(p_1, \dots, p_n)$  заменой  $i$ -го столбца на вектор-столбец  $a$ ;  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $\mu = \pi/c - 1$ .

Тогда справедлива теорема, сформулированная в [13].

**Теорема.** Для существования петли сепаратрисы в системе (П.4), увеличивающей (уменьшающей) периодическую координату  $y_1 = \varphi$  на  $2\pi$ , необходимо, чтобы  $\beta = \beta_{kc} (\gamma = -\beta_{kc})$ , где

$$\beta_{kc} = \frac{w - \sum_{i=1}^n \omega_i \exp(p_i \tau)}{w + \sum_{i=1}^n \omega_i \exp(p_i \tau)}, \quad (\text{П.5})$$

$a \tau$  – корень уравнения

$$\sum_{i=1}^n \omega_i v_{i1} \exp(p_i t) = 0,$$

$$\omega_i = \mu w_i(p_1, \dots, p_n | f'_1) - (\mu + 1) w_i(p_1, \dots, p_n | e_1),$$

$$v_{ij} = w_j(p'_1, \dots, p'_n | f_i) - (\mu + 1) w_j(p'_1, \dots, p'_n | e_1),$$

$$i, j = 1, \dots, n, \quad w = \det \mathbf{W}(p_1, \dots, p_n).$$

*Предельные  $\varphi$ -циклы в кусочно-линейных фазовых системах*

В случае *треугольной аппроксимации нелинейности* для фазовой системы (П.4) для существования  $\varphi$ -циклов необходимым является выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} & \beta c [(\mu + 1)\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{P} - \mu\mathbf{E}]e_1 + \\ & + (\mathbf{Q}\mathbf{P} - \mathbf{E})(0, y_2^1, \dots, y_n^1)^T = \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

$$= c [(\mu + 1)\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{P} + \mu\mathbf{E}]e_1,$$

$$e_1^T (\mathbf{P} - \mathbf{E})(-c\beta, y_2^1, \dots, y_n^1)^T = c e_1^T (\mathbf{P} + \mathbf{E})e_1.$$

Здесь  $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{W}\Lambda(\tau)\mathbf{W}^{-1}$ ,  $\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{V}\Lambda'(\theta)\mathbf{V}^{-1}$ ,  $\Lambda(t) = \text{diag}(\exp(p_1 t), \dots, \exp(p_n t))$ ,  $\Lambda'(t) = \text{diag}(\exp(p'_1 t), \dots, \exp(p'_n t))$  – диагональные матрицы;  $\tau, \theta$  – время, за которое точка проходит по траектории соответственно в областях I и II; где  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{V}$  матрицы, столбцами которых являются собственные векторы  $\vec{f}_i$  и  $\vec{f}'_i$  соответственно. Положим, что  $\beta_c = 2\pi/(\tau + \theta)$  – частота цикла, тогда соотношения (П.6) позволяют получить характеристику колебаний в виде  $\beta = \beta(\beta_c)$ .

Устойчивость найденного цикла можно определить, рассмотрев матрицу точечного преобразования плоскости  $y_1 = -c$  в плоскость  $y_1 = 2\pi - c$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}(\tau)\mathbf{H}_1\mathbf{Q}(\theta)\mathbf{H}_2, \quad (\text{П.7})$$

где

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\pi}{c(c-\pi)(g_1(1-\beta) + y_2^2)} \times \\ \times (0, g_2(y_2^2 - c), \dots, g_n(y_n^2 - c))^T e_1^T + \mathbf{E},$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\pi}{c(c-\pi)(-g_1(1+\beta) + y_2^1)} \times \\ \times (0, g_2(2\pi - c - y_2^1), \dots, g_n(2\pi - c - y_n^1))^T e_1^T + \mathbf{E}.$$

Здесь  $\beta, y_2^1, \dots, y_n^1$  найдены из (П.6), а  $y_2^2, \dots, y_n^2$  определены равенством

$$(c - \beta c, y_2^2, \dots, y_n^2)^T = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda}(\tau) \mathbf{W}^{-1} (-c - \beta c, y_2^1, \dots, y_n^1)^T.$$

Один из корней характеристического уравнения  $\det(\mathbf{U} - \lambda \mathbf{E}) = 0$  равен единице. Если остальные корни лежат внутри единичного круга, то точечное преобразование устойчиво и, соответственно, рассматриваемый периодический режим орбитально устойчив, а также неасимптотически устойчив по Ляпунову.

В случае *пилообразной аппроксимации нелинейности* система (П.1), (6) принимает вид

$$\dot{y} = \mathbf{A}y - \beta \bar{g}, \quad (\text{П.8})$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} g_1/\pi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2/\pi & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n/\pi & -a_0/a_{n-1} & -a_1/a_{n-1} & \dots & -a_{n-2}/a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему, полагая  $\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda}(\theta) \mathbf{W}^{-1}$  и  $\beta_c = \omega = 2\pi/\theta$  — частота цикла, характеристику колебаний  $\beta = \beta(\beta_c)$  можно найти в виде

$$\beta(\beta_c) = -\frac{\det(\overline{\mathbf{Q} - \mathbf{E}})}{\det(\mathbf{Q} - \mathbf{E})}, \quad (\text{П.9})$$

где  $\overline{a_{ij}} = a_{ij} + 2$  и  $a_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{Q} - \mathbf{E}$ .

Матрица точечного преобразования имеет вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}(\theta)\mathbf{H},$$

где

$$\mathbf{H} = -\frac{2}{g_1(1-\beta) + y_2^1} \bar{g} e_1^T + \mathbf{E}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00269).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Е.П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах М.: Наука, 1973.
2. *Нелинейные системы автоматического управления // Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления / Под общ. ред. Попова Е.П. М.: Машиностроение, 1970.*
3. *Урман Е.Л.* // Вестник электропромышленности. 1957. № 4. С. 54.
4. *Niawiadomski T.* // Archiwum Elektrotechniki. 1960. Т. 9. № 42. С. 53.
5. *Rey T.J.* Automatic phase control: theory and design Proc. IRE. 1960. V. 48. № 10. P. 1760.
6. *Шахтарин Б.И.* Квазигармонический метод и его применение к анализу нелинейных фазовых систем. М.: Энергоатомиздат, 1987.
7. *Шахтарин Б.И.* // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1977. № 5. С. 174.
8. *Грибов А.Ф., Шахтарин Б.И.* // Автоматика и телемеханика. 1981. № 10. С. 183.
9. *Грибов А.Ф., Шахтарин Б.И.* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2014. № 1. С. 3.
10. *Грибов А.Ф., Шахтарин Б.И.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 11. С. 1107.
11. *Губарь Н.А.* // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25. № 6. С. 1011.
12. *Шахтарин Б.И.* // РЭ. 1969. Т. 14. № 8. С. 1315.
13. *Грибов А.Ф., Крищенко А.П.* // РЭ. 1982. Т. 27. № 2. С. 321.