РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2019, том 64, № 5, с. 432–439

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.8;517.958(075.8)

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2019 г. В. П. Иванов*

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова, Российская Федерация, 119334 Москва, ул. Бардина, 4

**E-mail: icenter@imash.ru*

Поступила в редакцию 06.02.2018 г.
После доработки 06.02.2018 г.
Принята к публикации 28.02.2018 г.

Исследованы два варианта метода вычисления скорости распространения электромагнитного поля в среде с включениями с помощью теории многократного рассеяния на основе явления дифракции электромагнитной волны на частицах сферической формы Q-слойной решетки и на Q-частицах, расположенных внутри волновода вдоль его оси.

DOI: 10.1134/S0033849419050061

ВВЕДЕНИЕ

С точки зрения теории распространения электромагнитного поля наличие большого количества частиц в среде может привести не только к ослаблению этого поля через механизм рассеяния, но и изменению скорости распространения поля в среде с частицами, что необходимо учитывать, например, при анализе сдвига спектра частот излучения из-за эффекта Доплера. Процесс распространения монохроматического звукового и электромагнитного поля в среде с частицами описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца соответственно. Теоретические исследования и эксперименты показывают, что скорость распространения звука в жидкости с пузырьками газа или пара, которая описывается скалярным уравнением Гельмгольца, может меняться на один-два порядка в зависимости от концентрации и размера пузырьков [1–5]. Следовательно, скорость распространения электромагнитных волн в среде с частицами также должна зависеть от свойств, концентрации и размера частиц. В предлагаемой статье в развитие работ [3–5] для электромагнитных волн предложен следующий способ вычисления скорости распространения возмущений. В пространстве с заданной скоростью распространения поля (в вакууме это скорость света) выделяется область D, заполненная частицами сферической формы, и исследуется задача дифракции стороннего поля на этом множестве частиц. Далее предполагается, что область D без частиц представляет собой прозрачное тело с произвольной скоростью распространения поля, и решается задача дифракции того же стороннего поля на прозрачном теле D. Из условия равенства вне области D поля, рассеянного на частицах и на прозрачном теле, находится величина скорости распространения поля в прозрачном теле D, и эта скорость полагается равной эффективной скорости распространения поля в среде с частицами.

При произвольном расположении частиц в пространстве анализ физического механизма изменения скорости распространения электромагнитного поля затруднен из-за сложного поведения дифракционного поля на совокупности частиц. Поэтому механизм изменения скорости света за счет многократного рассеяния на частицах будем исследовать в средах, в которых частицы расположены регулярно, а именно, в виде соответствующих решеток. Рассмотрим две модели многократного рассеяния. В первой модели в качестве области D рассматривается шар D_R и для обеспечения механизма многократного рассеяния исследуется задача дифракции плоской волны на сферической Q-слойной решетке элементов сферической формы малых волновых размеров, погруженной в шар D_R. Расстояние между центрами элементов решетки порядка двух-трех диаметров элементов. Полученное решение сравнивается с решением задачи дифракции плоской волны на прозрачном шаре D_R, заполненным средой с другими параметрами распространения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА СФЕРИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны $E_x^0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} H_y^0 = E\exp(ik_0 z)$, $k_0^2 = (\omega/c)^2\varepsilon_0\mu_0$ – волновое число, ω – круговая частота, c – скорость света, $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, ε_0, μ_0 – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, на сферической Q-слойной решетке. В сферической системе координат с полюсом в O координаты центра шара D_{qnm} задаются соотношениями:

$$D_{qnm} = \{r^0_{qnm}, \theta^0_{qnm}, \varphi^0_{qnm}: \ r^0_{qnm} = R_q,$$
$$R_q = (q-1)R, \quad R = R^*/Q, \quad q = 1,\ldots,Q.$$

При $q > 1$ углы $\theta^0_{qnm} = \theta^0_{qn} = \pi(n-1)/2q$, $n = 1$, ..., $2q+1$, $\varphi^0_{qnm} = 2\pi(m-1)/M_{qn}$, $m = 1$, ..., M_{qn}.

Если $n \le q+1$, то $M_{qn} = 2n-1$, если $n \ge q+1$, то $M_{qn} = 2(2q+1-n)+1$, волновой радиус k_0R^* не мал. Для $q = 1$ в точке O располагается центр шара D_{111}. Множество сфер S_q радиусом R_q с элементами D_{qnm} будем называть сферической Q-слойной решеткой элементов D_{qnm} с центром в O. При такой геометрии расстояние между центрами элементов в сферической Q-слойной решетке порядка R, а число элементов равно

$$N_Q = \sum_{q=2}^{Q}\sum_{n=1}^{N_q} M_{qn} + 1,$$

поэтому при конечной величине k_0R^* эффект взаимного рассеяния поля на частицах в Q-слойной сферической решетке должен быть конечным.

Обозначим через DR внешность элементов Q-слойной решетки $DR = R^3 \setminus \bigcup_{q=1}^{Q} \bigcup_{n,m} \bar{D}_{qnm}$ ($\bar{D}_{qnm}$ – замыкание области D_{qnm}). Введем локальную декартову систему координат с началом в центре шара D_{qnm}, оси которой одинаково ориентированы и параллельны осям основной декартовой системы координат с центром в O_c. Введем также согласованную локальную сферическую систему координат (r_{qnm}, θ_{qnm}, φ_{qnm}) с полюсом в центре шара D_{qnm}, полярной осью, совпадающей с осью z локальной декартовой системы и одинаково ориентированными полярным расстоянием и долготой основной и локальной сферических координатных систем. Пусть на сферическую Q-слойную решетку из пространства DR падает плоская электромагнитная волна, имеющая отличную от нуля декартову компоненту

$$E^0_x = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,H^0_y = E\exp(ik_0z),$$

где $\vec{E}, \vec{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного поля, ε_0, μ_0 – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в области DR.

Если среда в области DR-вакуум, то $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Для упрощения решения исследуем задачу дифракции плоской волны на частицах D_{qnm} сферической формы с абсолютно проводящей поверхностью в предположении, что все частицы одного размера. Поверхность шара D_{qnm} обозначим S_{qnm}. Будем исследовать электромагнитное поле в диапазоне частот, для которого волновой размер k_0a мал, а отношение расстояния между центрами частиц к диаметру частицы конечно. Представим векторы $\vec{E}, \vec{H}$ в виде суммы падающего и рассеянного поля:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1,$$

где $\vec{E}_0, \vec{E}_1$ – падающая и рассеянная части напряженности электрического поля, $\vec{H}_0, \vec{H}_1$ – падающая и рассеянная части напряженности магнитного поля. Векторы напряженности электрического и магнитного поля в области DR удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i(\omega\varepsilon_0/c)\vec{E}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i(\omega\mu_0/c)\vec{H},$$
$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0. \tag{1}$$

Рассеянная составляющая векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ должна быть ограничена по модулю в области DR при $\operatorname{Im}k_0 > 0$. На поверхности сферы S_{qnm} должны выполняться условия сопряжения

$$[\vec{n}, \vec{E}]_{Sqnm} = 0, \quad [\vec{n}, \vec{H}]_{Sqnm} = 0, \tag{2}$$

где [,] – векторное произведение, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к сфере S_{qnm}. Ищется дважды непрерывно дифференцируемое внутри области DR и непрерывное вплоть до границы области решение задачи (1), (2).

Будем искать решение задачи (1), (2) в области DR с помощью потенциалов Дебая электрического U и магнитного V типов, которые удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k_0^2)\Pi_{e,m} = 0, \quad k_0 = \omega/c, \quad \Pi_e = U, \quad \Pi_m = V. \tag{3}$$

Представим потенциалы Дебая U и V в виде сумм $U = U_0 + U_1$ и $V = V_0 + V_1$, где U_0 и V_0 – потенциалы, отвечающие падающему полю. Рассеянная составляющая потенциалов U_1 и V_1 должна быть ограничена по модулю в области D при $\operatorname{Im}k_0 > 0$. На поверхности сферы S_{qnm} должны выполняться условия равенства нулю касательных составляющих электромагнитного поля, выписанные на границе S_{qnm}, через потенциалы Дебая:

$$\left.\frac{\partial(r_{qnm}(U_0 + U_1))}{\partial n}\right|_{S_{qnm}} = 0, \tag{4}$$

$$(V_0 + V_1)\big|_{S_{qnm}} = 0, \tag{5}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по нормали к поверхности S_{qnm}, направленная из области D_{qnm}, r_{qnm} – расстояние во вспомогательной сферической системе координат. Соотношения, связывающие потенциалы Дебая с проекциями электромагнитного поля внутри D в сферической системе координат (r, θ, φ), связанной с центром O_c, задаются по формулам

$$
\begin{gathered}
E_r = \frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2} + k^2(rU), \\
E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rU)}{\partial\theta\partial r} + \frac{i\omega\mu}{cr\sin\theta}\frac{\partial(rV)}{\partial\varphi}, \\
H_\theta = \frac{ck^2}{i\omega\mu}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(rU)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial\varphi\partial r}, \\
H_r = \frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + k^2(rV), \\
E_\varphi = -\frac{i\omega\mu}{cr}\frac{\partial(rV)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(rU)}{\partial\varphi\partial r}. \\
H_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(rV)}{\partial\varphi\partial r} - \frac{ck^2}{i\omega\mu r}\frac{\partial(rU)}{\partial\theta}.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

В соотношениях (7) вне шара D волновое число k заменяется на k_0.

Решение задачи для потенциала Дебая U_1 следует искать в виде потенциалов для уравнения Гельмгольца простого слоя

$$
\begin{gathered}
U_1(\overline{x}) = \sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=1}^{N_q}\sum_{m=1}^{M_{nq}}\int_{S_{qnm}} \nu_{qnm}(\overline{\xi}_{qnm})G_0(\overline{x}, \overline{\xi}_{qnm})ds, \\
G_0 = \frac{\exp(ik_0R_{qnm})}{4\pi R_{qnm}},
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где через G_0 обозначено фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, отвечающее волновому числу k_0, R_{qnm} – расстояние от точки интегрирования до точки наблюдения в локальной сферической системе координат, ν_{qnm} – неизвестные плотности потенциалов. Потенциал Дебая V_1 будем искать в виде суммы потенциалов двойного слоя для уравнения Гельмгольца

$$
\begin{gathered}
V_1(\overline{x}) = \sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=1}^{N_q}\sum_{m=1}^{M_{nq}}\int_{S_{qnm}} w_{qnm}(\overline{\xi}_{qnm})\frac{\partial}{\partial n}G_0(\overline{x}, \overline{\xi}_{qnm})ds, \\
G_0 = \frac{\exp(ik_0R_{qnm})}{4\pi R_{qnm}},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где w_{qnm} – неизвестные плотности потенциалов, $\partial/\partial n$ – производная по нормали в точке интегрирования. Из теории дифракции на шаре малого волнового диаметра известно, что плотности ν_{qnm} и w_{qnm} можно искать в виде

$$
\begin{gathered}
\nu_{qnm} = [a_{1qnm}P_1^1(\cos\theta_{qnm}) + \\
+ a_{2qnm}P_2^1(\cos\theta_{qnm})]\cos(\varphi_{qnm}),
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
w_{qnm} = [c_{1qnm}P_1^1(\cos\theta_{qnm}) + \\
+ c_{2qnm}P_2^1(\cos\theta_{qnm})]\sin(\varphi_{qnm}),
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где a_{1qn}, a_{2qnm}, c_{1qnm}, c_{2qnm} – неопределенные коэффициенты, $P_n^m(x)$ –присоединенные полиномы Лежандра, $(\theta_{qnm}, \varphi_{qnm})$ – сферические координаты в локальной системе.

Воспользуемся свойствами потенциалов для уравнения Гельмгольца простого и двойного слоя. Подставим представления (8), (9) в краевые условия на поверхности S_{qnm}. В результате получим систему интегральных уравнений для вычисления плотностей ν_{qnm} и w_{qnm}. Далее используем представления (10) и представления сферических функций в разных системах координат –

$$
\begin{gathered}
h_q^{(1)}(kr_i)P_q^p(\cos\theta_i)\exp(ip\varphi_i) = \\
= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} Q_{mnpq}^{(1)}(r_j^i, \theta_j^i, \varphi_j^i)j_n(kr_j)P_n^m(\cos\theta_j)\exp(im\varphi_j),
\end{gathered}
\tag{12}
$$

$$
\begin{gathered}
Q_{mnpq}^{(1)}(r_j^l, \theta_j^l, \varphi_j^l) = \frac{i^{n-q}(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\times \\
\times\sum_{\sigma=|n-q|}^{n+q} i^\sigma b_\sigma^{(qpnm)}h_\sigma^{(1)}(kr_j^l)P_\sigma^{p-m}(\cos\theta_j^l)\exp(i(p-m)\varphi_j^l).
\end{gathered}
$$

Здесь (r_i, θ_i, ϕ_i) и (r_j, θ_j, ϕ_j) – сферические координаты в i-й и j-й системах координат соответственно, $(r_j^i, \theta_j^i, \varphi_j^i)$ – координаты j-го центра в i-й системе координат, $j_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Бесселя и Ганкеля, коэффициенты Клебша–Гордана $b_i^{(qjnm)}$. Коэффициенты Клебша–Гордана $b_i^{(qjnm)}$ определены в [6]. Применяя представления (10), (12) в совокупности с методом Галеркина, получаем систему алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов a_{1qn}, a_{2qnm} :

$$
\begin{gathered}
\sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=1}^{N_q}\sum_{m=1}^{M_{qn}}(x_{1qnm}A_{qnmpjl} + x_{2qnm}B_{qnmpjl}) = b_{pjl}, \\
p = 1,..,Q, \quad j = 1,..,N_j, \;\; l = 1,..,M_{pj}, \\
\sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=1}^{N_q}\sum_{m=1}^{M_{qn}}(x_{1qnm}A_{1qnmpjl} + x_{2qnm}B_{1qnmpjl}) = b_{1pjl}, \\
p = 1,..,Q, \quad j = 1,..,N_j, \;\; l = 1,..,M_{pj}.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

В уравнениях (13) введены обозначения

$$
\begin{gathered}
x_{1qnm} = a_{1nm}/E, \quad x_{2qnm} = a_{2qnm}/E, \\
b_{pjl} = -2\left(j_1'(k_0a) + \frac{j_1(k_0a)}{k_0a}\right)\exp(ik_0\theta_{pj}^0), \\
b_{1pjl} = -2i\left(j_2'(k_0a) + \frac{j_2(k_0a)}{k_0a}\right)\exp(ik_0\theta_{pj}^0), \\
A_{q^*p^*} = \delta_{p^*p^*}\left[-\frac{2}{3} + \frac{ik_0^2a^2}{3}\left(\frac{1}{2}(j_1'(k_0a)h_1^{(1)}(k_0a) + \right.\right. \\
\left.\left. + j_1(k_0a)h_1^{(1)'}(k_0a)) + \frac{j_1(k_0a)}{k_0a}\right)\right] + (1-\delta_{p^*q^*})\frac{ik_0^2a^2}{3}\times
\end{gathered}
$$

$$\times j_1(k_0a)(j_1'(k_0a)+j_1(k_0a)/(k_0a))\times$$
$$\times[2Q_{1111}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})-Q_{-1111-}^{(1)}\times$$
$$\times(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})-4Q_{11-11}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})+$$
$$+2Q_{-11-11}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})],\tag{14}$$
$$A_{1q^*p^*}=(1-\delta_{p^*q^*})\frac{ik_0^2a^2}{3}j_1(k_0a)(j_2'(k_0a)+$$
$$+j_2(k_0a)/(k_0a))[2Q_{1112}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})-$$
$$-Q_{-1112}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})-12Q_{11-12}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})+$$
$$+6Q_{-11-12}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})],$$

$$B_{1q^*p^*}=\delta_{p^*p^*}\left[-\frac{6}{5}+\frac{12}{5}ik_0^2a^2\left(\frac{1}{2}(j_2'(k_0a)h_2^{(1)}(k_0a)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+j_2(k_0a)h_2^{(1)'}(k_0a))+\frac{j_2(k_0a)}{k_0a}\right)\right]+(1-\delta_{p^*q^*})\frac{2ik_0^2a^2}{5}\times$$
$$\times j_2(k_0a)(j_2'(k_0a)+j_2(k_0a)/(k_0a))[6Q_{1212}^{(1)}\times$$
$$\times(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})-Q_{-1212}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})-$$
$$-36Q_{12-12}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})+$$
$$+6Q_{-12-12}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})],$$

где $(r_{q^*}^{0p^*},\theta_{q^*}^{0p^*},\varphi_{q^*}^{0p^*})$ – координаты центра сферы S_{qnm} в системе координат, связанной с центром сферы S_{p00}; $j_i'(ka)$, $h_i^{(1)'}(ka)$, $i=1,2$ – соответственно производные сферических функций Бесселя и Ганкеля по аргументу, $\delta_{p^*p^*}=1$, $\delta_{p^*q^*}=0$, $p^*\to(pjl)$, $q^*\to(qnm)$.

Решая алгебраическую систему (13), (14), определяем амплитуды асимптотик неизвестных плотностей ν_{qnm}, а по формуле (8) вычисляем поле U_1. Поступая аналогичным образом для вычисления коэффициентов c_{1qnm}, c_{2qnm}, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=1}^{N_q}\sum_{m=1}^{M_{qn}}(y_{1qnm}C_{qnmpjl}+y_{2qnm}D_{qnmpjl})=d_{pjl},$$
$$p=1,..,Q,\quad j=1,..,N_j,\quad l=1,..,M_{pj},\tag{15}$$
$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=1}^{N_q}\sum_{m=1}^{M_{qn}}(y_{1qnm}C_{1qnmpjl}+y_{2qnm}D_{1qnmpjl})=d_{1pjl},$$
$$p=1,..,Q,\ \ j=1,..,N_j,\ \ l=1,..,M_{pj}.$$

В уравнениях (15) введены следующие обозначения:

$$y_{1q^*}=c_{1q^*}k_0/E,\quad y_{2q^*}=c_{2q^*}k_0/E,$$

$$d_{p^*}=-2j_1(k_0a)\exp(ik_0R_p\cos(\theta_{pj}^0)),$$

$$d_{1p^*}=-2ij_2(k_0a)\exp(iR_pk_0\cos(\theta_{pj}^0)),$$

$$C_{q^*p^*}=\delta_{p^*p^*}\left[\frac{2}{3}+\frac{2ik_0^2a^2}{3}(j_1'(k_0a)h_1^{(1)}(k_0a)+\right.$$
$$\left.+j_1(k_0a)h_1^{(1)'}(k_0a))\right]+(1-\delta_{p^*q^*})\frac{ik_0^2a^2}{3}j_1(k_0a)j_1'(k_0a)\times$$
$$\times[2Q_{1111}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+Q_{-1111}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+$$
$$+4Q_{11-11}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+2Q_{-11-11}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})],$$

$$D_{q^*p^*}=(1-\delta_{p^*q^*})\frac{ik_0^2a^2}{5}j_2(k_0a)j_1'(k_0a)[6Q_{1211}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+$$
$$+Q_{-1211}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+12Q_{12-11}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+2Q_{-12-11}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})],$$

$$C_{1q^*p^*}=(1-\delta_{p^*q^*})\frac{ik_0^2a^2}{3}j_1(k_0a)j_2'(k_0a)[2Q_{1112}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+$$
$$+Q_{-1112}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+12Q_{11-12}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+6Q_{-11-12}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})],$$

$$D_{1q^*p^*}=\delta_{p^*p^*}\left[\frac{6}{5}+\frac{6}{5}ik_0^2a^2(j_2'(k_0a)h_2^{(1)}(k_0a)+\right.$$
$$\left.+j_2(k_0a)h_2^{(1)'}(k_0a))\right]+(1-\delta_{p^*q^*})\frac{ik_0^2a^2}{5}j_2(k_0a)\times$$
$$\times j_2'(k_0a)[6Q_{1212}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+Q_{-1212}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+$$
$$+36Q_{12-12}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})+6Q_{-12-12}^{(1)}(k_0r_{q^*}^{0p^*})].$$

Решая алгебраическую систему (15), определяем амплитуды асимптотик неизвестных плотностей w_q, а по формуле (9) вычисляем поле V_1.

Внутри прозрачного шара D_R для произвольных значений параметров среды шара ε^*, μ^*, σ^* решение задачи дифракции на прозрачном шаре можно выписать в явном виде. Оно приведено во многих работах, например, в [6]. Решение ищется в виде потенциалов Дебая электрического U^j и магнитного V^j ($j=0,1$) типов. Вне шара D_R потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$(\Delta+k_0^2)\Pi_{e,m}=0,\quad k_0^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0/c^2,$$
$$\Pi_e=U^0,\ \ \Pi_m=V^0,\tag{16}$$

(причем потенциалы должны быть ограничены по модулю при $\mathrm{Im}k_0>0$ в области вне шара D), а внутри D – уравнениям

$$(\Delta+k^2)\Pi_{e,m}=0,\ \ k^2=(\omega^2\varepsilon^*\mu^*+i4\pi\sigma^*\omega\mu^*)/c^2,$$
$$\Pi_e=U^1,\ \ \Pi_m=V^1.\tag{17}$$

На поверхности S шара D_R для потенциалов Дебая, удовлетворяющих (16), (17), выполняются условия сшивания:

$$\frac{k_0^2}{\mu_0}(U_0^0+U_1^0)=\frac{k^2}{\mu_1}U^1\Big|_S,\quad\frac{\partial(r(U_0^0+U_1^0)}{\partial n}=\frac{\partial(rU^1)}{\partial n}\Big|_S,$$
$$U^0=U_0^0+U_1^0,\ \ \mu_0(V_0^0+V_1^0)=\mu_1V^1\Big|_S,\tag{18}$$
$$\frac{\partial(r(V_0^0+V_1^0))}{\partial n}=\frac{\partial(rV^1)}{\partial n}\Big|_S,\ \ V^0=V_0^0+V_1^0,$$

где $\partial/\partial n$ — производная по нормали к поверхности S, направленная вне области D, r — расстояние в сферической системе координат. Для рассеянной составляющей потенциала Дебая U_0^1 электрического типа и V_0^1 магнитного типа в сферической системе координат, приведем взятые из работы [6] формулы

$$U_0^1(r,\theta,\varphi) = -\frac{E\cos\varphi}{ik_0}\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)}\times$$
$$\times\frac{k\mu_0\psi_n'(k_0R^*) - k_0\mu^*\chi_n(kR^*)\psi_n(k_0R^*)}{k\mu_0\zeta_n'(k_0R^*) - k_0\mu^*\chi_n(kR^*)\zeta_n(k_0R^*)}\times$$
$$\times P_n^1(\cos\theta)h_n^{(1)}(k_0r),$$
$$V_0^1(r,\theta,\varphi) = -\frac{E\sin\varphi}{ik_0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)}\times \tag{19}$$
$$\times\frac{k_0\mu^*\psi_n'(k_0R^*) - k\mu_0\chi_n(kR^*)\psi_n(k_0R^*)}{k_0\mu^*\zeta_n'(k_0R^*) - k\mu_0\chi_n(kR^*)\zeta_n(k_0R^*)}\times$$
$$\times P_n^1(\cos\theta)h_n^{(1)}(k_0r).$$

Здесь $\psi_n(x) = xj_n(x)$, $\zeta_n(x) = xh_n^{(1)}(x)$, $\chi_n(x) = \psi_n'(x)/\psi_n(x)$, $j_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ — сферические функции Бесселя и Ганкеля, $\psi_n'(x)$, $\zeta_n'(x)$ — производная по аргументу, $P_n^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Обозначим через $\vec{E}_m$, $\vec{H}_m$ электромагнитное поле дифракции на прозрачном шаре, через $\vec{E}_p$, $\vec{H}_p$ электромагнитное поле дифракции на Q-слойной решетке и потребуем, чтобы поля и их касательные составляющие были равны в замкнутой области $r \geq R^*$

$$\left(\vec{E}_m,\vec{H}_m\right)_{r\geq R^*} = \left(\vec{E}_p,\vec{H}_p\right)_{r\geq R^*},$$
$$\left(\vec{E}_m,\vec{H}_m\right)_{\tau,r\geq R^*} = \left(\vec{E}_p,\vec{H}_p\right)_{\tau,r\geq R^*}. \tag{20}$$

Считая поле дифракции на решетке известным, подставим в (20) соотношения (18). Путем интегрирования по сфере $r = R^*$ получаем нелинейные уравнения для вычисления параметров ε^*, μ^*, σ^*. Если среды не ферромагнетики, то магнитная проницаемость в приведенных выше задачах известна и равна 1.0. В этом случае достаточно решить задачу определения потенциала Дебая электрического или магнитного типа для Q-слойной решетки и прозрачного шара и сравнить эти потенциалы по первому соотношению формулы (20).

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВОЛНОВОДЕ

Во второй модели для обеспечения механизма многократного рассеяния исследуется распространение электромагнитного поля через плоскую многослойную решетку. Она представляет собой Q плоскостей (слоев) $z_c = \text{const}$. На слоях периодически вдоль осей x,y расположены центры элементов сферической формы, волновой радиус ka элементов не мал. Решетка погружена в слой толщиной $(Q+1)L$, $2a/L \leq 0.5$, L — расстояние между плоскостями, на которых расположены центры элементов двоякопериодической решетки. Для магнитной составляющей поля такая задача эквивалентна задаче распространения нормальной волны в направляющей системе вида бесконечного волновода прямоугольного поперечного сечения, на оси которого на отрезке длиной $(Q+1)L$ располагаются центры Q-частиц сферической формы, волновой диаметр которых не мал, а расстояние между центрами конечно. В качестве области D рассматривается расположенный внутри волновода конечный слой толщиной $(Q+1)L$ с другими параметрами распространения. Для вычисления скорости распространения поля при $z > (Q+1)L$ сравнивается распространяющаяся составляющая поля дифракции на Q-частицах с полем в волноводе, прошедшим через слой длиной $(Q+1)L$.

Для волновода с частицами рассмотрим спектр излучения, для которого волновой размер частиц $ka \leq 0.5$. Пространство внутри волновода W будем характеризовать параметрами ε и μ (ε — диэлектрическая, μ — магнитная проницаемости). Для вакуума параметры $\varepsilon = \mu = 1$. На оси волновода размещены частицы сферической формы D_q, $q = 1, \ldots, Q$. Радиус частицы D_q равен a, ее центр расположен в точке с координатами $(0,0,(q-1)L)$, так что начало декартовой системы совпадает с центром первой частицы. Для упрощения решения будем считать поверхность частицы D_q идеально проводящей. Обозначим через $D_qR = W \Big\backslash \bigcup_{q=1}^{Q} \bar{D}_q$ ($\bar{D}_q$ — замыкание области D_q). В области D_qR из полупространства $z < 0$ на конечное множество частиц D_q падает электромагнитное поле. Представим полное поле в виде суммы падающего поля и рассеянной части. Векторы напряженности полного электрического $\vec{E}$-поля и магнитного $\vec{H}$-поля в области D_qR удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i(\omega\varepsilon/c)\vec{E},\quad \operatorname{rot}\vec{E} = i(\omega\mu/c)\vec{H},$$
$$\operatorname{div}\vec{E} = 0,\quad \operatorname{div}\vec{H} = 0, \tag{21}$$

где ω — круговая частота, c — скорость распространения света в вакууме. Из уравнений (21) следует, что в кусочно-однородной изотропной среде без локальных источников векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют векторным уравнениям Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\vec{E} = 0,\ (\Delta + k^2)\vec{H} = 0,$$
$$k^2 = k_0{}^2\varepsilon\mu,\ k_0 = \omega/c,$$

где k – волновое число поля в области D_qR. На стенке волновода и на поверхностях S_q шаров D_q (q = 1, ..., Q) должно выполняться условие обращения в нуль касательной составляющей электрического поля $\vec{E}$. Если в волноводе распространяется электромагнитное поле, то рассеянная часть векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ должна быть ограничена по модулю в области D_qR при $\mathrm{Im}\, k > 0$. Особенность распространения электромагнитных волн в волноводах заключается в том, что существует критическая длина волны, и волна с большей длиной в волноводе не распространяется. Если μ^*, ε^* – произвольные константы, характеризующие среду с включениями, то для вычисления этих констант среды нужно исследовать задачу распространения как электрической волны в волноводе (H_z-компонента равна нулю), так и задачу распространения магнитной волны (E_z-компонента равна нулю). Если материал среды и частиц не ферромагнетик, то с высокой точностью можно положить $\mu^* = 1.0$. В этом случае достаточно исследовать задачу дифракции в волноводе или электрических, или магнитных волн.

Далее исследуем магнитные волны, для которых E_z-компонента электромагнитного поля равна нулю. Пусть распространяющаяся из бесконечности при $z < 0$ в области D магнитная волна имеет вид

$$H_z^0 = H\cos(\pi(x - l_1)/2l_1)\exp(ih_{10}z)\exp(-i\omega t),$$

где $h_{10} = \sqrt{k^2 - g_{10}^2} > 0$, $E_z^0 = 0$, множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускаем. Параметр $h = h_{nm} = \sqrt{k^2 - g_{nm}^2}$, где g_{nm} – собственные значения задачи Дирихле или Неймана для уравнения Лапласа в поперечном сечении волновода, называется продольным волновым числом. Потребуем, чтобы поперечный волновой размер волновода лежал в диапазоне $g_{10}l_1 < kl_1 < g_{20}l_1$, где g_{10}, g_{20} – первое и второе в порядке возрастания отличные от нуля собственные значения задачи Неймана уравнения Лапласа, определенные в поперечном сечении волновода. В этом случае тип волны, распространяющейся в волноводе при $z < -L$, сохранится при $z > QL$, т.е. новых нормальных волн в волноводе в процессе дифракции на частицах не возникнет. Обозначим H_z-компоненту полного магнитного поля в волноводе через U и примем $U = U_0 + U_1$, где $U_0 = H_z^0$, U_1 – рассеянная на частицах часть магнитного поля. Поле U_1 внутри волновода удовлетворяет скалярному однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)U_1 = 0,\quad k^2 = k_0{}^2\varepsilon\mu,\ k_0 = \omega/c, \tag{22}$$

где k – волновое число в области П, $\partial U_1/\partial n|_\Gamma = 0$, Г – боковая поверхность волновода, n – нормаль к боковой поверхности, направленная внутрь области определения поля. Поле U_1 ограничено в области D_qR при $\mathrm{Im}k > 0$. На поверхности сфер D_q должны выполняться условия

$$\partial(U_0 + U_1)/\partial n|_{S_q} = 0,\ q = 1,\ldots,Q. \tag{23}$$

Здесь $\partial/\partial n$ – производная по нормали к сфере S_q, направленная из шара D_q.

Решение задачи (22), (23) можно представить в виде суммы потенциалов простого слоя для уравнения Гельмгольца со специальным ядром $G(\overline{x}, \overline{\xi}_q)$ в виде функции Грина для бесконечного волновода квадратного поперечного сечения с идеально проводящими стенками

$$U_1(\overline{x}) = \sum_{q=1}^{Q}\int_{S_q}\nu_q(\overline{\xi}_q)G(\overline{x}, \overline{\xi}_q)ds,\ \ \overline{x} = (x, y, z) \in D, \tag{24}$$
$$\overline{\xi}_q = (\xi_q, \eta_q, \varsigma_q) \in S_q.$$

Подставляя представление (24) в краевые условия (23) и пользуясь свойствами потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца, получим систему интегральных уравнений для вычисления плотностей ν_q:

$$-\nu_p(\overline{\xi}_{1p})/2 + \sum_{q=1}^{Q}\int_{Sq}\nu_q(\overline{\xi}_q)\frac{\partial}{\partial n_1}G(\overline{\xi}_{1p}, \overline{\xi}_q)ds = \tag{25}$$
$$= -\partial U_0(\overline{\xi}_{1p})/\partial n_1,\ \ p = 1,..,Q,$$

$\partial/\partial n_1$ – производная по внешней к поверхности S_p нормали в точке $\overline{\xi}_{1p}$. При решении системы уравнений (25) удобно представление функции G, построенное методом отражения от стенок волновода

$$G = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ikR_{nm})}{4\pi R_{nm}},$$
$$R_{nm} = \sqrt{(x - \xi - 2nl_1)^2 + (y - \eta - 2ml_1)^2 + (z - \varsigma)^2}.$$

При условии ka, $h_{10}a \le 0.5$ плотность ν_p можно искать в виде

$$\nu_p = \cos\varphi_p\sum_{\beta=1}^{B}a_{p\beta}P_\beta^1(\cos\theta_p), \tag{26}$$

где $a_{p\beta}$, $\beta = 1, B$, p = 1, ..., Q – неопределенные коэффициенты, (θ_p, φ_p) – сферические координаты с полюсом в центре сферы S_p. При вычислении с точностью до четвертого знака параметр B = 5. Подставим в систему (25) представление (26) и представление сферических функций в разных системах координат (12).

Применяя метод Галеркина, получаем систему алгебраических уравнений для вычисления неизвестных $x_{q\beta} = a_{q\beta}h_{10}/(2H)$:

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{B} x_{q\beta}A_{q\beta p\alpha} = b_{p\alpha}, \quad p = 1,..,Q, \quad \alpha = 1,..,B, \qquad (27)$$
$$x_{q\beta} = a_{q\beta}h_{10}/(2H),$$

где

$$b_{p\alpha} = -\int_0^{\pi} P_\alpha^1(\cos\theta_p)\sin\theta_p\left\{\frac{\pi\sin\theta_p}{4l_1h_{10}}\left[J_0\left(\frac{\pi a\sin\theta_p}{2l_1}\right) - J_2\left(\frac{\pi a\sin\theta_p}{2l_1}\right)\right] + i\cos\theta_p J_1\left(\frac{\pi a\sin\theta_p}{2l_1}\right)\right\}d\theta_p, \qquad (28)$$

$$A_{q\beta p\alpha} = \delta_{p\alpha p\alpha}\frac{1}{2\alpha+1}\frac{(\alpha+1)!}{(\alpha-1)!}\{1 + 2[j'_\alpha(k_0a)h_{\varepsilon 1}^{(1)}(k_0a) + j_\alpha(k_0a)h_\alpha^{(1)'}(k_0a)]\} + (1-\delta_{q\beta p\alpha})ik_0^2a^2 j'_\alpha(k_0a)j_\beta(k_0a)\times$$
$$\times\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{(\beta+1)!}{(2\beta+1)(\beta-1)!}Q_{1\beta1\alpha}^{(1)}(k_0r_{qnm}^{0p},\theta_{qnm}^{0p},\varphi_{qnm}^{0p}) - \frac{1}{2\beta+1}Q_{-1\beta1\alpha}^{(1)}(k_0r_{qnm}^{0p},\theta_{qnm}^{0p},\varphi_{qnm}^{0p}) - \right.$$
$$\left. - \frac{(\alpha+1)!(\beta+1)!}{(\alpha-1)!(2\beta+1)(\beta-1)!}Q_{1\beta-1\alpha}^{(1)}(k_0r_{qnm}^{0p},\theta_{qnm}^{0p},\varphi_{qnm}^{0p}) + \frac{(\alpha+1)!}{(\alpha-1)!(2\beta+1)}Q_{-1\beta-1\alpha}^{(1)}(k_0r_{qnm}^{0p},\theta_{qnm}^{0p},\varphi_{qnm}^{0p})\right],$$

$\delta_{p\alpha p\alpha} = 1$, $\delta_{q\beta p\alpha} = 0$; $q, p = 1,..., Q$; $\alpha, \beta = 1, ..., B$; $J_n(x)$ – функция Бесселя. $(r_{qnm}^{0p},\theta_{qnm}^{0p},\varphi_{qnm}^{0p})$ – координаты центра qnm – элемента двоякопериодической решетки в системе координат, связанной с центром элемента $p = p00$.

Решая алгебраическую систему (27), (28) определяем амплитуды асимптотик неизвестных плотностей ν_q, а по формуле (24) вычисляем поле U_1. В процессе рассеяния поля на частицах образуется не только дифракционное поле U_1, но и так называемая эффективная скорость распространения волн в среде с частицами. Эту скорость определим следующим образом. Пусть внутри волновода с параметрами среды ε, μ размещен слой $S = \{(x, y, z): -l_1 \le x, y \le l_1, -L \le z \le QL\}$ диэлектрика с параметрами среды $\varepsilon'_s = \varepsilon_s + 4\pi i\sigma_s/\omega$, $\mu_s = 1$, где σ_s – проводимость среды слоя. Материал среды слоя будем считать не ферромагнетиком. Из полупространства $z < 0$ на слой S падает стороннее поле в виде магнитной волны

$$H_z^0 = H\cos(\pi(x - l_1)/2l_1)\exp(ih_{10}z).$$

Требуется найти амплитуду прошедшей через слой волны при $z > QL$. Будем считать, что поперечный волновой размер волновода, содержащего диэлектрический слой, также лежит в диапазоне $g_{10}l_1 < kl_1 < g_{20}l_1$. Магнитное поле удовлетворяет: вне S однородному уравнению Гельмгольца (22); внутри S тому же уравнению (22), в котором ε и μ надо заменить на ε'_s, μ_s, – и однородным условиям Неймана на границе поперечного сечения. В процессе распространения волны H_z^0 в волноводе со слоем диэлектрика при $z < 0$ образуется отраженная волна, внутри слоя – стоячая волна с волновым числом $k_s^2 = k_0^2\varepsilon'_s\mu_s$, а вне слоя при $z > QL$ возбуждается прошедшая волна. Амплитуды этих волн вычисляются из условий равенства касательных составляющих магнитного поля H_z на границах слоя при $z = -L$ и $z = QL$. Решение этой задачи известно [7]. Прошедшая через слой волна имеет вид

$$H_{zs} = H_{ps}\, H\cos(\pi(x - l_1)/2l_1)\exp(ih_{10}z),$$

где

$$H_{ps} = \frac{4\lambda\exp(-ih_{10}L)}{(1+\lambda)^2\exp(iQL(h_{10} - h_{10}^1) - ih_{10}^1L) - (1-\lambda)^2\exp(iQL(h_{10} + h_{10}^1) + ih_{10}^1L)},$$
$$\lambda = \mu_1h_{10}/\mu h_{10}^1, \quad h_{10} = \sqrt{k_0^2\varepsilon\mu - (\pi/2l_1)^2}, \quad h_{10}^1 = \sqrt{k_0^2\varepsilon'_s\mu_s - (\pi/2l_1)^2},$$
$$\operatorname{Im}h_{10},\ h_{10}^1 > 0, \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}h_{10},\ h_{10}^1 = 0 \quad \operatorname{Re}h_{10},\ h_{10}^1 > 0.$$

Если потребовать, чтобы в волноводе при $z > QL$ амплитуда H_{zs} прошедшего через слой S поля равнялась амплитуде H_{zd} падающего поля плюс амплитуде распространяющейся части поля дифракции на конечном множестве частиц D_q,

$$H_{zs} = H_{zd}, \qquad (29)$$

то при известных параметрах задачи ω, ε, $\mu = \mu_s = 1.0$, равенство (29) с учетом соотношений (28) есть нелинейное уравнение для вычисления электрической проницаемости $\varepsilon'_s = \varepsilon^*$ или скорости распространения электромагнитного поля $c_s = c/\sqrt{\varepsilon^*}$, которая, вообще говоря, комплексна. Скорость распространения поля c_s в слое S назовем эффективной скоростью распространения электромагнитного поля в среде волновода, содержащей включения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены два способа вычисления скорости распространения электромагнитного поля в среде с включениями. Очевидно, что эффект многократного рассеяния возрастает с ростом числа слоев решеток. Если аналогия изменения скорости звука и света с ростом концентрации частиц справедлива, то скорость электромагнитного поля должна убывать с ростом концентрации от скорости света при нулевой концентрации, а затем возрастать. С точки зрения вычислений второй способ предпочтительнее первого, поскольку размерность матриц системы алгебраических уравнений (13), (15) существенно выше размерности матрицы системы (27), так как дифракционное взаимодействие между элементами в плоскости решетки учитывается специально выбранной функцией Грина в представлении (24). Например, при числе слоев сферической и плоской решетки, равной 50, и точности вычисления до четвертого знака размерность матрицы коэффициентов систем (13), (15) равна (500292 × × 500292), а размерность матрицы коэффициентов (27) равна (250 × 250).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляхов Г.М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982.
2. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 690.
3. *Foldy L.L.* // Phys. Rev. 1945. V. 67. № 3/4. P.107.
4. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2.
5. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 2.
6. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968.
7. *Нефедов Е.И.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М.: Наука, 1979.