РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2019, том 64, № 8, с. 735–740

ОБЗОР

УДК 621.396

РАЗВИТИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАДИОВОЛНОВОДОВ

© 2019 г. А. С. Ильинский*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52

**E-mail: celd@cs.msu.ru*

Поступила в редакцию 12.11.2018 г.
После доработки 12.11.2018 г.
Принята к публикации 14.12.2018 г.

Представлен обзор методов расчета нерегулярных волноводов. Дана история возникновения волноводных уравнений и методов решения систем волноводных уравнений для различных типов линий передачи.

DOI: 10.1134/S0033849419080060

ВВЕДЕНИЕ

Теория возбуждения и рассеяния электромагнитных волн в волноведущих трактах сверхвысоких частот интенсивно развивается начиная с конца 30-х годов XX в. Стимулом к развитию теории волноводов явилось появление новых генераторов сантиметрового СВЧ-диапазона магнетронного типа. Высокие уровни генерируемой мощности открывали возможности создания радиолокаторов СВЧ-диапазона, отличающихся высокой разрешающей способностью и большой точностью. Освоение радиотехники в сантиметровом диапазоне стало насущной задачей для советской радиолокации в послевоенные годы.

Первые результаты по теории возбуждения радиоволноводов были представлены Г.В. Кисунько в докладе 7 мая 1945 г. на Всесоюзной научной конференции, посвященной 50-летию изобретения радио. Затем эти результаты были опубликованы в статьях [1–3] и монографии [4], изданной Военной академией связи им. С.М. Буденного. Эти работы вызвали широкий резонанс в научной среде и привлекли внимание многих ученых к решению задач волноводной электродинамики. Отметим цикл работ А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [5, 6], П.Е. Краснушкина [7, 8], Л.А. Вайнштейна [9], А.Г. Свешникова [10, 11].

Теорией волноводов СВЧ-диапазона во время войны систематически занимались в лабораториях США (Ю. Швингер, Э.Ю. Кондон), Англии (Дж.К. Слетер, Д.Р. Хартри), Франции (Л. Бриллиен). Однако публикаций по теории волноводов было очень мало. Особенно остро ощущался пробел в теории возбуждения радиоволноводов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УСЛОВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Остановимся на формулировке задачи возбуждения волноводов в общем виде и описании результатов теории нерегулярных волноводных систем. Волновод представляет собой металлическую трубку, заполненную прозрачной или почти прозрачной средой для электромагнитных волн соответствующего диапазона. На практике волновод вместе с оконечными устройствами возбуждения и излучения представляет конечный тракт передачи энергии или сигналов. Однако основная цель волноводного тракта – это передача электромагнитных волн от передатчика до излучателя с наименьшими потерями и искажениями. Поэтому при рассмотрении волноводного тракта можно считать, что оконечные устройства согласованы с трактом, т.е. оконечные устройства либо не отражают электромагнитных волн, либо закон отражения известен.

Данная модель приводит к следующей достаточно общей математической формулировке задачи об электромагнитных волнах в волноводах. Пусть имеется два полубесконечных регулярных замкнутых цилиндра с различными направляющими, соединенных протяженным переходным участком с боковой поверхностью призвольной формы. Среда, заполняющая полубесконечные цилиндрические участки, однородна и не имеет потерь, а боковая поверхность цилиндра идеально проводящая. Такие участки будем называть регулярным волноводом. Конечный переходной участок может иметь неоднородное заполнение, а боковая поверхность может иметь конечную, но большую проводимость, так что на такой поверхности выполняются импедансные граничные условия. Электромагнитное поле внутри волновода возбуждается с помощью заданных сторонних токов и отверстий в боковой стенке, к которым подводится стороннее электромагнитное поле. Волновод с неоднородным заполнением и граничной поверхностью произвольной формы называют нерегулярным волноводом.

Задача возбуждения нерегулярного волновода заключается в определении решения краевой задачи для уравнения Максвелла в области, ограниченной боковой поверхностью R нерегулярного волновода:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\tilde{\varepsilon}\,\vec{E} + \vec{j}\,, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\tilde{\mu}\,\vec{H}, \qquad (1)$$

удовлетворяющего импендансным граничным условиям на боковой поверхности волновода R

$$\left[\vec{n}_0, \vec{E}\right]\Big|_R = -w\left[\vec{n}_0, \left[\vec{n}_0, \vec{H}\right]\right]\Big|_R.$$

Здесь $\vec{n}_0$ — внешняя к области нормаль к поверхности R, а $w(M)$ — поверхностный импеданс $w = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_0}{2\sigma}}(1-i)$, $\operatorname{Re} w > 0$ (σ — проводимость среды вне поверхности волновода, μ_0 — магнитная проницаемость).

В полубесконечных регулярных цилиндрических участках нерегулярного волновода необходимо поставить условия излучения, которые обеспечивают отсутствие волн, приходящих из бесконечности, и тем самым обеспечивают режим согласования нерегулярного участка с волноводным трактом в целом. Постановка условий излучения в неограниченных областях вызывала определенные трудности. Как известно, одного условия ограниченности полей на бесконечности недостаточно, чтобы обеспечить однозначность определения решения задачи об установившихся колебаний. В 1912 г. А. Зоммерфельд предложил аналитические условия, определяющие решение уравнения Гельмгольца во всем неограниченном пространстве. Однако в том случае, когда граница уходит на бесконечность, аналитические условия излучения существенно зависят от поведения формы границы на бесконечности. А.А. Самарский и А.Н. Тихонов в работе [12] сформулировали общий принцип выделения решения, согласно которому решение уравнения об установившихся колебаниях однозначно определяется требованием, чтобы это решение являлось пределом решения задачи Коши для соответствующей нестационарной задачи при $t \to \infty$. А.Г. Свешников предложил принцип предельного поглощения, в котором решение об установившихся колебаниях в среде без поглощения определяется как предел ограниченного решения соответствующей задачи в среде с малым поглощением при стремлении поглощения к нулю. В работе [13] этот принцип применен к исследованию задачи о регулярном волноводе и получению аналитических нелокальных условий излучения. Эти условия получили название "парциальных" условий излучения А.Г. Свешникова. Они позволили сформулировать аналитически задачу о возбуждении нерегулярных волноводов.

Суть "парциальных" условий заключается в следующем. Как известно, система однородных уравнений Максвелла в регулярном волноводе имеет счетную систему решений, которую называют системой нормальных волн. Система нормальных волн распадается на два класса: прямые нормальные волны, распространяющиеся в положительном направлении вдоль направляющей цилиндра, и обратные нормальные волны, распространяющиеся вдоль направляющей цилиндра в обратном направлении. Доказано [6], что для выполнения условий излучения достаточно представить поле в волноводе в виде суперпозиции либо прямых, либо только обратных волн. Методы построения системы нормальных волн основаны на использовании геометрии цилиндрической области. Нормальные волны регулярных волноводов выписываются в явном виде.

Проведем плоскость, перпендикулярную образующей регулярного цилиндра, и направим ось z вдоль образующей, тогда направляющая цилиндра образует в плоскости, перпендикулярной оси z, контур C, ограничивающий сечение S. Любую точку M внутри волновода можно характеризовать координатой z и координатами точки P в поперечном сечении цилиндра, т.е. $M = (P, z)$. Нормальные волны регулярного волновода выражаются через собственные функции задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в плоской области S:

$$\Delta_2\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0, \quad P \in S, \quad \varphi_n\big|_C = 0,$$

$$\Delta_2\psi_n + \hat{\lambda}_n\psi_n = 0, \quad P \in S, \quad \frac{\partial\psi_n}{\partial n}\bigg|_C = 0.$$

Прямые нормальные волны для электрических волн имеют вид

$$\vec{E}_{nt} = i\frac{\gamma_n}{\sqrt{\varepsilon}}\nabla\varphi_n \exp(i\gamma_n z),$$

$$\vec{H}_{nt} = -i\omega\sqrt{\varepsilon}\left[\vec{i}_z, \nabla\varphi_n\right]\exp(i\gamma_n z),$$

$$E_{nz} = \lambda_n\varphi_n \exp(i\gamma_n z), \quad H_{nz} \equiv 0,$$

а для прямых магнитных волн имеем

$$\vec{E}_{nt} = -i\omega\sqrt{\mu}\left[\vec{i}_z, \nabla\psi_n\right]\exp(i\hat{\gamma}_n z),$$

$$\vec{H}_{nt} = i\frac{\hat{\gamma}_n}{\sqrt{\mu}}\nabla\psi_n \exp(i\hat{\gamma}_n z),$$

$$E_{nz} \equiv 0, \quad H_{nz} \equiv \hat{\lambda}_n\psi_n \exp(i\hat{\gamma}_n z),$$

$$\gamma_n = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \lambda_n}, \quad \hat{\gamma}_n = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \hat{\lambda}_n},$$

$$\operatorname{Re}\,\gamma_n \ge 0, \quad \operatorname{Re}\,\hat{\gamma}_n \ge 0.$$

Обычно функции $\varphi_n(P)$ и $\psi_n(P)$ нормируются

$$\int_S (\nabla\varphi_n)^2\, ds = \int_S (\nabla\psi_n)^2\, ds = 1.$$

Нормальные волны ортогональны в том смысле, что

$$\int_S \left(\vec{E}_n, \vec{E}_m^*\right) ds = \int_S \left(\vec{H}_n, \vec{H}_m^*\right) ds = $$
$$= \int_S \left(\vec{E}_n, \vec{H}_m^*\right) ds = 0, \quad n \neq m,$$
$$\int_S \left(\vec{E}_n, \vec{H}_n^*\right) ds =$$
$$= \beta_n = \begin{cases} k\gamma_n & \text{для электрических волн,} \\ k\gamma_n^*, & \text{для магнитных волн.} \end{cases}$$

Обратные волны получаются из прямых заменой γ_n на $-\gamma_n$.

Из принципа предельного поглощения для волновода следует, что для полубесконечного волновода условия при $z \to \infty$ выполняются, если электромагнитное поле в любой точке волновода допускает разложение в ряды по системе только прямых нормальных волн

$$\begin{matrix} \vec{E}(P,z) \\ \vec{H}(P,z) \end{matrix} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \begin{matrix} \vec{E}_n(P,z) \\ \vec{H}_n(P,z) \end{matrix} \tag{2}$$

с общими коэффициентами T_n как для вектора электрического поля, так и для вектора магнитного поля. Представление (2) и является аналитической формой условий излучения при $z \to \infty$. Аналогично условиями излучения для $z \to \infty$ будет разложение электромагнитного поля по обратным нормальным волнам

$$\begin{matrix} \vec{E}(P,z) \\ \vec{H}(P,z) \end{matrix} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \begin{matrix} \vec{E}_n^{(-)}(P,z), \\ \vec{H}_n^{(-)}(P,z). \end{matrix} \tag{3}$$

В условия излучения (2), (3) входят неизвестные коэффициенты T_n или R_n разложения поля по нормальным волнам. Во многих случаях эти коэффициенты представляют практический интерес и определяют характеристики потока энергии электромагнитного поля. Для решения задачи в конечной области более удобной формой "парциальных" условий излучения является такая, которая не содержит неизвестных коэффициентов. В любом сечении можно исключить коэффициенты T и записать

$$\beta_n^* \int_S \left(\vec{E}, \vec{H}_n^*\right) ds = \beta_n \int_S \left(\vec{E}_n^*, \vec{H}\right) ds. \tag{4}$$

Отметим, что система нормальных волн полна в том смысле, что любое решение уравнений Максвелла в регулярном волноводе представимо в виде суперпозиции полей нормальных волн [6]. Дальнейшее развитие принципов излучения содержится в монографии [14].

2. ЗАДАЧА ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим теперь общую постановку задачи возбуждения нерегулярного волновода. Для этого введем достаточно общую систему координат, в которой удобно рассматривать решения задачи возбуждения нерегулярных волноводов. Эта система координат введена в работе [11] и систематически использовалась при решении различных задач теории нерегулярных волноводов [15, 16].

Выберем внутри нерегулярного волновода некоторую гладкую кривую L, которая в левом регулярном волноводе совпадает с прямой параллельной образующей и которую примем за ось z_1 регулярного волновода. В правом регулярном волноводе кривая L переходит в ось z_2 регулярного волновода. Введем на L естественную систему координат. Пусть $r_0(\varphi, s)$ – уравнение контура поперечного сечения боковой поверхности R плоскостью, нормальной к кривой L в точке P_0 с координатой s вдоль кривой L. При этом положение любой точки внутри волновода однозначно определяется координатами точки P_0 и координатами (r, φ) в плоскости поперечного сечения с полюсом в точке P_0. Полярную ось в плоскости поперечного сечения направим по главной нормали к кривой L в точке P_0. Связь с декартовыми координатами точки M внутри нерегулярного волновода легко установить, учитывая что

$$\vec{r} = \vec{R}_0(s) + r\cos\varphi\vec{n}(s) + r\sin\varphi\vec{b}(s).$$

Здесь $\vec{R}_0(s)$ – нормальное уравнение кривой L; $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$ – векторы главной нормали и бинормали к кривой L в точке P_0. Параметрическое представление поверхности R в координатах (r, φ, s) таково

$$\vec{r} = \vec{R}_0(s) + r_0(\varphi,s)\cos\varphi\vec{n}(s) + r_0(\varphi,s)\sin\varphi\vec{b}(s).$$

Функцию $r_0(\varphi, s)$ можно рассматривать как задание контура C в поперечном сечении, проходящем через точку P_0. Вводя координату $\rho = r/r_0(\varphi, s)$, получим систему координат (ρ, φ, s), в которой поверхность R имеет очень простое выражение $\rho = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{r}(x,y,z) = \vec{R}_0(s) + \rho r_0(\varphi,s)\cos\varphi\vec{n}(s) + \\ + \rho r_0(\varphi,s)\sin\varphi\vec{b}(s). \end{aligned} \tag{5}$$

Система координат (ρ, φ, s) является неортогональной, однако, как показано в [17], уравнения

Максвелла в новой системе координат можно рассматривать как уравнения Максвелла, записанные в ортогональной цилиндрической системе координат с переменным анизотропным заполнением, зависящим от метрического тензора отображения (5)

$$g^{ij}(\rho,\varphi,s)=\left(\vec{a}^{i},\vec{a}^{j}\right),$$

где $\vec{a}^{i}$ – контравариантные координатные векторы отображения (5).

Таким образом, задача возбуждения нерегулярного волновода состоит в определении решения системы уравнений Максвелла (1) с условиями излучения в цилиндрической области, заданной координатами (ρ,φ,s).

Г.В. Кисунько одним из первых предложил общий метод решения этой задачи, заключающейся в том, что внутри цилиндра в каждом поперечном сечении определяется векторный базис, и векторы электромагнитного поля $\vec{E}(M)$ и $\vec{H}(M)$ в каждом сечении представляются в виде разложения по выбранному базису:

$$\vec{E}(P,s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)\vec{E}_n(P,s),$$

$$\vec{H}(P,s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(s)\vec{H}_n(P,s).$$

Базис $\vec{E}_n(P,s)$ и $\vec{H}_n(P,s)$ определен для любого значения параметра s и образуется на основе скалярных базисных функций некоторого двумерного самосопряженного оператора в сечении S, зависящего от точки P_0 как от параметра.

Для коэффициентов $a_n(s)$ и $b_n(s)$, исходя из системы уравнений Максвелла или равносильных им интегральных соотношений, получается система дифференциальных уравнений первого порядка, а система (4) условий излучения дает краевые условия. Тем самым задача возбуждения нерегулярного волновода сводится к краевой задаче для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые называются системой волноводных уравнений.

Бесконечную систему волноводных уравнений для регулярного волновода рассматривал Г.В. Кисунько [2]. В дальнейшем различные формы волноводных уравнений использовали в своих работах Б.Ф. Емелин [18, 19], Б.З. Каценеленбаум [20].

Следует отметить, что для конкретных нерегулярных волноводов системы волноводных уравнений выписываются с учетом свойств базисных функций и позволяют провести расчеты различных волноводных узлов. В общем случае система волноводных уравнений усекается и решается конечная система дифференциальных уравнений. При этом чаще всего соответствующая краевая задача является жесткой и требует разработки специальных численных методов решения.

Среди различных методов получения системы волноводных уравнений следует выделить метод, предложенный А.Г. Свешниковым [15]. Этот метод позволяет получать разрешенную относительно производных краевую задачу, коэффициенты связи в которой вычисляются относительно просто.

Существенной особенностью подхода, предложенного А.Г. Свешниковым, является разложение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждом поперечном сечении на поперечную и продольную составляющие. Поперечные составляющие представляются в виде суперпозиции поперечных составляющих нормальных волн, а продольные составляющие вычисляются по поперечным из уравнений Максвелла. Коэффициенты разложения поперечных составляющих определяются из уравнений Максвелла для поперечных составляющих, записанных в слабой (интегральной) форме. При этом для частичных сумм разложения полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выполняются интегральные соотношения, которые справедливы для точного решения. Этот принцип консервативности позволяет установить сходимость частичных сумм к точному решению в энергетических нормах, что позволяет обосновать метод усечения волноводных уравнений.

В последнее время принцип излучения был расширен для применения спектральных разложений при всех частотах, включая частоты, при которых постоянные распространения $\gamma_n=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-\lambda_n}$, $\hat{\gamma}_n=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-\hat{\lambda}_n}$ могут обращаться в ноль. В работах [21, 22], выполненных под руководством Б.А. Пламеневского, был введен расширенный принцип излучения, использующий уходящие волны из расширенного пространства собственных волн, определенных и устойчивых на критических частотах, при которых постоянные распространения могут обратиться в ноль. Введение расширенных условий излучения завершило математически корректную постановку задачи о рассеянии волн в волноводных системах.

3. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ

При дальнейшем развитии теории волноводов появилась необходимость построить системы нормальных волн в волноводах сложного поперечного сечения и для периодических волноводов. Система нормальных волн в периодических волноводах используется при построении теории замедляющих волноводных систем в электронике, а также при создании связных трактов на основе гибких гофрированных волноводах. В Советском

Союзе в 70-е годы была разработана отечественная серия гибких гофрированных волноводов. Они представляли собой полые трубы, гибкость которых обеспечивалась неглубоким гофром боковой поверхности. Поперечное сечение волноводов представляло собой эллипс, что обеспечивало существование системы нормальных волн с выделенной основной волной, на которой осуществлялась передача сигнала. Для расчета и оптимизации параметров гофрированных волноводов были разработаны строгие методы расчета постоянных распространения и структуры полей в гофрированных волноводах. Подробный обзор результатов по гофрированным эллиптическим волноводам (ЭВГ) содержится в монографии [23]. При этом удалось выяснить условия, при которых ЭВГ имеют аномально малые потери.

Важным приложением теории гофрированных волноводов явилась разработка теории гофрированных рупорных излучателей [24, 25].

Стремление обеспечить все более сложные функции как пассивных СВЧ-устройств, так и систем активных СВЧ-приборов порождает задачи расчета новых и новых классов регулярных линий передачи. Если раньше такой анализ требовался в основном для реально используемых линий сложного сечения (Н-, Р- и другие волноводы), то в последнее время базис ряда “экзотических” линий волноводного типа применяется при декомпозиции сложного волноводного узла. Перечень конфигурационно-сложных узлов столь обширен, что можно указать лишь на примеры, иллюстрирующие разнообразие поперечных сечений волноводов [26, 27]. При этом основную роль играет обоснование разложимости электромагнитного поля по собственным волнам волноводов, участвующих в декомпозиции.

Большой цикл работ по исследованию спектральных свойств волноводов с поперечным сечением сложной формы и поперечно-неоднородным заполнением проведен под руководством А.Г. Свешникова в работах [28, 29]. В них были получены новые результаты по исследованию спектральных свойств и задач возбуждения волноводов с поперечно-неоднородным заполнением.

Для формулировки задачи возбуждения поперечно-неоднородного волновода необходимо сформулировать условия излучения. Для случая волновода с заполнением такие условия исследовались в работах [30, 31] для волноводов специальной конфигурации. Трудность рассматриваемой задачи состоит в том, что спектральная задача для волновода с заполнением не является более спектральной задачей для оператора Лапласа в поперечном сечении, а представляет собой несамосопряженную спектральную задачу. При этом возможны различные постановки задачи. Так, спектральная задача может сводиться к поиску продольных компонент поля, при этом спектральная задача сводится к нелинейной спектральной задаче [31]. Другой подход заключается в сведении исходной векторной задачи к системе уравнений относительно поперечных компонент поля. При этом удается сформулировать линейную спектральную задачу относительно постоянной распространения γ^2. В результате можно записать “парциальные” условия излучения в явном виде в форме разложения решения по собственным и присоединенным функциям спектральной задачи [31]. Для решения задачи возбуждения заданные сторонние токи разлагаются в ряды по системе корневых векторов спектральной задачи, и для коэффициентов разложения вновь получается система волноводных уравнений. Полнота корневых векторов L_p доказана в работе [32].

Задача возбуждения волноводных систем заданными сторонними токами не является самосогласованной. Как правило, возбуждение волноводов связано с решением задачи, определенным излучателем, который необходимо согласовать с волноводным трактом, так чтобы энергия без отражения вошла в фидерный тракт. Еще в 1949 г. самосогласованную задачу возбуждения волновода вибраторным излучателем решили А.Н. Тихонов и А.А. Самарский [33]. Возбуждение волноводов с помощью щелевых излучателей рассматривалось в работах Я.Н. Фельда [34], В.П. Шестопалова [35]. В последнее время строгое решение о связи прямоугольных волноводов через отверстия получено в работе [36].

Использование метода нормальных волн позволяет применять конечно-разностные методы в прямой и вариационной постановках. Однако разработка методов синтеза волноводных устройств требует очень высокой эффективности решения прямых задач. Одним из таких методов является метод поперечного резонанса, сводящий задачу к разбиению поперечного сечения на простые фрагменты и последующей “сборке” рассеивателей друг с другом на основе библиотеки ключевых задач. В работе [37] продемонстрирована высокая эффективность такого подхода.

В целом спектральный метод, предложенный в 1945 г. Г.В. Кисунько, успешно развивается и позволяет рассчитывать столь сложные волноводные узлы, о которых при появлении этого метода нельзя было и мечтать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кисунько Г.В.* // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51. № 3. С. 348.
2. *Кисунько Г.В.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 2. С. 217.
3. *Кисунько Г.В.* // ЖТФ. 1946. Т. 16. № 5. С. 274.

4. *Кисунько Г.В.* Электродинамика полых систем. Л.: Изд-во ВКАС им. Буденного, 1949.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // ЖТФ. 1946. Т. 16. № 11. С. 1284; 1947. Т. 17. № 12. С. 1431; 1948. Т. 18. № 3. С. 487.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // ЖТФ. 1948. Т. 18. № 7. С. 959.
7. *Краснушкин П.Е.* // J. Phys. USSR. 1946. Т. 15. № 2. С. 434.
8. *Краснушкин П.Е.* Метод нормальных волн в применении к проблемам дальней радиосвязи. М.: Изд-во МГУ, 1947.
9. *Вайнштейн Л.А.* // ЖТФ. 1953. Т. 23. С. 654.
10. *Свешников А.Г.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 2. № 5. С. 720.
11. *Свешников А.Г.* // Научн. докл. высш. школы. Физмат. науки. 1958. Т. 1. № 2. С. 133.
12. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. № 2. С. 243.
13. *Свешников А.Г.* // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 345.
14. *Искандеров Б.А.* Принципы излучения для эллиптических уравнений в цилиндрических областях. Баку: Изд-во “Элм”, 2004.
15. *Свешников А.Г.* // Журн. вычисл. математ. и мат. физ. 1963. Т. 3. № 2. С. 314.
16. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991.
17. *Ильинский А.С., Свешников А.Г.* // Журн. вычисл. математ. и мат. физики. 1968. Т. 8. № 2. С. 363.
18. *Емелин Б.Ф.* // РЭ. 1958. Т. 3. № 5. С. 615.
19. *Машковцев Б.М., Цибизов К.Н., Емелин Б.Ф.* Теория волноводов. Л.: Наука, 1966.
20. *Каценеленбаум Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Наука, 1961.
21. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
22. *Пламеневский Б.А., Порецкий О.В., Сарафанов О.В.* // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 1. С. 128.
23. *Альховский Э.А., Головаченко Г.С., Ильинский А.С.* Гибкие волноводы в технике СВЧ. М.: Радио и связь, 1986.
24. *Clarricoats P.J.B., Olver A.D.* Corrugates Horns for Microwave Antennas. L.: Peter Peregrines, 1984.
25. *Ильинский А.С.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 9. С. 1099.
26. *Миттра Р., Чжань Ч.Х., Куик Т.* // ТИИЭР. 1988. Т. 76. № 12. С. 46.
27. *Arndt F., Beyer R., Houth W. et al.* // Proc. 29th Microwave Conf. Munich. 5–7 Oct. 1999. N.Y.: IEEE, 1999. V. 1. P. 186.
28. *Боголюбов А.Н., Делицин А.Л., Свешников А.Г.* // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1999. № 4. С. 6.
29. *Боголюбов А.Н., Делицин А.Л., Свешников А.Г.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39. № 11. С. 1794.
30. *Краснушкин П.Е., Моисеев Е.И.* // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 5. С. 1123.
31. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* // Журн. вычисл. математ. и мат. физики. 1987. Т. 27. № 2. С. 252.
32. *Боголюбов А.Н., Делицин А.Л., Свешников А.Г.* // ДАН. 1999. Т. 369. № 4. С. 458.
33. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // ЖТФ. 1949. Т. 19. № 7. С. 792.
34. *Фельд Я.Н.* // Докл. АН СССР. 1946. Т. 53. № 7. С. 615.
35. *Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Рудь Л.А.* Волноводные неоднородности. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1986.
36. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996.
37. *Kirilenko A.A., Tkachenko V.I., Rud’ L.A., Pramanik P.* // J. Commun. Technol. Electronics. 2000. V. 45. Suppl. Iss. № 2. P. S140.