

УДК 530.17:537.86+621.396.96

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ, ДРОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ТЕКСТУР, ЭФФЕКТОВ СКЕЙЛИНГА И МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В СИНТЕЗЕ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (В ЧАСТНОСТИ, РАДИОЛОКАЦИИ)

© 2019 г. Ю. В. Гуляев¹, А. А. Потапов¹, *¹Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Российская Федерация, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7

*E-mail: potapov@cplire.ru

Поступила в редакцию 24.01.2019 г.

После доработки 04.03.2019 г.

Принята к публикации 15.03.2019 г.

Представлен обзор основных результатов по созданию новых информационных технологий на основе текстур, фракталов, дробных операторов, эффектов скейлинга и методов нелинейной динамики, полученных с 1979 года по настоящее время в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Показано, что впервые в мире были предложены, а затем и применены новые размерностные и топологические (а не энергетические!) признаки или инварианты, которые объединены под обобщенным понятием “топология выборки” ~ “фрактальная сигнатура”. Предложены текстурные и фрактально-скейлинговые (топологические) методы обнаружения сверхслабых сигналов и полей в интенсивных шумах и помехах. Открыт, предложен и развит новый вид и новый метод современной радиолокации, а именно фрактально-скейлинговая или масштабно-инвариантная радиолокация, что влечет за собой коренные изменения в самой структуре теоретической радиолокации, а также в ее математическом аппарате.

DOI: 10.1134/S0033849419080059

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие современной радиолокационной техники и технологий ставит перед теорией радиолокации и новые требования. Одни из этих требований не затрагивают основ теории и сводятся к увеличению точности, улучшению существующих и разработке новых методов расчета, другие же являются более фундаментальными и касаются самих основ теоретической радиолокации. Эти требования представляются наиболее важными как в теоретическом, так и в практическом плане, что и рассмотрено в данной работе.

В настоящее время в радиофизике, радиоэлектронике и обработке сигналов преимущественно используются целочисленные меры (интегралы и производные целого порядка), гауссовская статистика, марковские процессы и т.п. [1, 2]. Радиолокационное обнаружение высокоскоростных, малозаметных и малогабаритных объектов и целей вблизи поверхности земли и моря, а также в метеорологических осадках представляет крайне трудную задачу. Кроме того, помехи от морской поверхности и растительности имеют нестационарный и многомасштабный характер, особенно при малых углах скольжения ϑ . В последнее время появляется все больше различных видов беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Благодаря их малым габаритам, а также использованию в их конструкциях пластмасс, стекловолокна, пенопласта, даже картона и других слабоотражающих электромагнитные волны материалов, БПЛА имеют небольшую эффективную отражающую способность. Отношение сигнал/помеха q_0^2 для перечисленных выше задач почти всегда заполняет область отрицательных (в децибелах) значений, т.е. $q_0^2 < 0 \dots 1$ дБ. Как хорошо известно, при экспериментах по рассеянию метровых, дециметровых, сантиметровых и миллиметровых волн перед исследователями возникли вопросы правомерности и применимости гауссовских моделей. Вскоре начались многочисленные искусственные попытки создания моделей рассеяния с целью повышения уровня “хвостов” вероятностных распределений амплитуд отраженных сигналов.

Все это делает трудно применимым классические радиолокационные методы и алгоритмы об-

наружения, т.е. использование энергетических обнаружителей (когда отношение правдоподобия определяется исключительно и только энергией принимаемого сигнала) становится принципиально невозможным. Обнаружение малокогерентных объектов на фоне указанных выше естественных интенсивных помех неизбежно требует введения и вычисления некоторой принципиально новой характеристики, которая отличается от классических функционалов, связанных с энергией помех и сигнала, а определяется исключительно топологией и размерностью принятой смеси сигнала с помехами и шумами.

Математический аппарат для таких задач существует, — это теория фракталов и дробное исчисление, имеющая дело с производными и интегралами произвольного (вещественного или комплексного) порядка [3–11]. Отметим, что теория марковских процессов в приложениях достигла уже своего насыщения и исследования проводятся на уровне резкого усложнения синтезированных алгоритмов, так как необходим учет долговременной памяти реальных немарковских физических сигналов и полей [4, 5, 12].

В работе рассмотрены основные направления внедрения текстур, фракталов, дробных операторов, эффектов скейлинга и методов нелинейной динамики в фундаментальные задачи радиофизики, радиолокации и широкий спектр радиотехнических наук для создания новых информационных технологий. Исследования были проведены в рамках фундаментального научного направления “Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: проектирование фрактальных радиосистем”, инициированного и разрабатываемого в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН с 1979 г. по настоящее время.

Актуальность проведения данных исследований связана с необходимостью более точного описания реальных процессов, происходящих в радиофизических и радиотехнических системах. Это прежде всего учет эрдитарности [4, 5, 9, 11, 13], негауссовости [4, 5, 11, 14] и скейлинга (самоподобия, автомодельности) [3–5, 10, 11] физических сигналов и полей. Все эти понятия входят в определение фрактальных множеств или фракталов, впервые предложенных в 1975 г. Б. Мандельбротом [3]. В физическом аспекте термин “эрдитарность” эквивалентен понятиям “память”, “последствие”, “наследственность”, т.е., когда становится возможным ввести функционалы памяти [13].

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФРАКТАЛЬНО-СКЕЙЛИНГОВЫХ МЕТОДОВ

Применение идей масштабной инвариантности — “скейлинга” — совместно с теорией мно-

жеств, теорией дробной размерности, дробным исчислением, общей топологией, геометрической теорией меры и теорией динамических систем открывает большие потенциальные возможности и новые перспективы в обработке многомерных сигналов и в родственных научных и технических областях. Другими словами, полное описание процессов современной обработки сигналов и полей невозможно с помощью подходов и формул только классической математики.

При фрактально-скейлинговом подходе, предложенном и развиваемом в течение 40 лет в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, описание и обработка сигналов и полей проводится исключительно в пространстве дробной меры с применением гипотез скейлинга, негауссовских устойчивых распределений с тяжелыми хвостами и, по возможности, с применением аппарата дробных интегропроизводных [1, 3–19]. Заметим, что наличие в уравнениях дробной производной по времени интерпретируется как наличие памяти или, в случае стохастического процесса, — немарковости.

Основным свойством фракталов является нецелое значение их размерности D . Развитие теории размерности началось с работ Пуанкаре, Лебега, Брауэра, Урысона и Менгера. В различных областях математики возникают множества пренебрежимо малые в том или ином смысле и неразличимые в смысле меры Лебега. Для различения таких множеств с патологически сложной топологической структурой необходимо привлекать нетрадиционные характеристики малости, например, емкость, потенциал, меры и размерность Хаусдорфа и т.п. Наиболее плодотворным оказалось применение дробной размерности Хаусдорфа, тесно связанной с понятиями энтропии, фракталами и странными аттракторами в теории динамических систем [4, 5, 15–17].

Понятие меры и размерности Хаусдорфа определяется p -мерной мерой с произвольным вещественным положительным числом p , которую ввел Хаусдорф в 1919 г. Понятия, введенные Хаусдорфом, основываются на конструкции Каратеодори (1914 г.). Размерность Хаусдорфа $\dim_H A$ определяется через хаусдорфову α -меру $mes_{H,\alpha}$ множества в виде

$$mes_{H,\alpha} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\Gamma(A)} [d(U)]^\alpha, \quad (1)$$

где нижняя грань \inf берется по конечным или счетным покрытиям Γ множества A шарами U , диаметр которых $d(U) < \varepsilon$.

Размерность $\dim_H A$ определяется как такое число α_0 , что мера (1) при $\alpha > \alpha_0$ равна нулю, а при $\alpha < \alpha_0$ — бесконечности. В общем случае понятие меры не связано ни с метрикой, ни с топологией. Однако мера Хаусдорфа может быть построена в

произвольном метрическом пространстве на основе его метрики, а сама размерность Хаусдорфа связана с топологической размерностью.

В основе современной теории вероятностей лежат предельные теоремы о сходимости распределений сумм независимых случайных величин к так называемым устойчивым распределениям: гауссовским или негауссовским. Первые опираются на центральную предельную теорему, а вторые (негауссовские) – на предельную теорему, доказанную Б.В. Гнеденко (1939 г.) и В. Дёблин (1940 г.) [14]. В этом случае предельная теорема накладывает ограничения на форму негауссовских распределений. Для того чтобы закон распределения $F(x)$ принадлежал области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α ($0 < \alpha < 2$), отличного от гауссовского, необходимо и достаточно, чтобы

1)

$$\frac{F(-x)}{1 - F(x)} \rightarrow \frac{c_1}{c_2} \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

2) для каждой постоянной $k > 0$

$$\frac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(kx) + F(-kx)} \rightarrow k^\alpha \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где коэффициенты $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, $0 < \alpha < 2$.

Для доказательства (2) и (3) необходимо и достаточно, чтобы при некотором подборе постоянных B_n , выполнялись условия [14, с. 189]:

$$\begin{aligned} nF(B_n x) &\rightarrow \frac{c_1}{|x|^\alpha} \quad (x < 0), \\ n[1 - F(B_n x)] &\rightarrow \frac{c_2}{x^\alpha} \quad (x > 0), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \int_{|x| < \varepsilon} x^2 dF(B_n x) - \left[\int_{|x| < \varepsilon} x dF(B_n x) \right]^2 \right\} = 0.$$

Чем меньше величина α , тем длиннее хвост распределения и тем более оно отличается от гауссовского. При $1 < \alpha < 2$ устойчивые законы имеют математическое ожидание; при $0 < \alpha \leq 1$ устойчивые законы не имеют ни дисперсий, ни математических ожиданий. Условиями (2)–(4) определяется так называемая *негауссовская статистика*.

В обычной статистике флуктуации стремятся к нулю, когда размер выборки или число слагаемых N возрастает. Это гарантирует асимптотически точную повторяемость средних значений и является источником традиционных успехов классических статистических методов в радиолокации. Для статистики Леви ситуация может отличаться радикально. При увеличении размера выборки точность статистических оценок не улучшается! Стандартная форма центральной предельной теоремы предсказывает исчезновение флуктуа-

ций при больших N , а из обобщенной центральной предельной теоремы (при $\alpha < 1$) следует, что флуктуации существенны при сколь угодно больших N . Одновременно при $\alpha < 1$ наблюдается случай глобальной неэргодичности процессов.

Отметим еще одно обстоятельство. Нецелые значения показателя α в диапазоне $1 < \alpha \leq 2$ соответствуют обобщенному броуновскому движению с долговременными корреляциями и статистическим самоподобием, т.е. фрактальному процессу. Математическим выражением самоподобия являются степенные законы. Фрактальная размерность пространства вероятностей временного ряда равна показателю α :

$$\alpha = 1/H, \quad (5)$$

где H – показатель Херста. Необходимо различать “обычную” фрактальную размерность D исследуемого сигнала или изображения и фрактальную размерность, определяемую показателем α . Если D характеризует “изломанность” объектов, то α характеризует толщину хвостов вероятностных распределений [3–5].

В ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН были разработаны различные оригинальные методы измерения фрактальной размерности D , в том числе дисперсионный, учет сингулярностей, по функционалам, триадный, на основе метрики Хаусдорфа, вычитания выборок, на основе операции “Исключающее ИЛИ” и т.п. [4, 5, 16, 17]. Локально-дисперсионный метод измерений фрактальной размерности D основан на измерении дисперсии интенсивности/яркости σ_i^2 фрагментов оптического или радиолокационного изображения на двух пространственных масштабах δ_i^2 :

$$D \approx \frac{\ln \sigma_2^2 - \ln \sigma_1^2}{\ln \delta_2 - \ln \delta_1}, \quad i = 1 \text{ или } 2. \quad (6)$$

В гауссовском случае дисперсионная размерность случайной последовательности сходится к размерности Хаусдорфа соответствующего стохастического процесса. Принципиальная сложность состоит в том, что любой численный метод включает дискретизацию (или дискретную аппроксимацию) анализируемого процесса или объекта, а дискретизация разрушает фрактальные свойства. Для разрешения этого противоречия необходима разработка специальной теории, основанной на методах фрактальной интерполяции и аппроксимации.

Фрактальная размерность D или ее сигнатура $D(t, f, \vec{r})$ в различных частках изображения поверхности является мерой текстуры. Фрактальные методы могут функционировать на всех уровнях сигнала: амплитудном, частотном, фазовом и поляризационном. Разработанная в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН классификация фракталов (рис. 1) была одоб-



Рис. 1. Авторская классификация фрактальных множеств и сигнатур, одобренная Б. Мандельбротом (D_0 – топологическая размерность пространства вложения).

рена Б. Мандельбротом (1924–2010 гг.) в декабре 2005 г. в США.

Дробный математический анализ имеет давнюю историю и чрезвычайно богатое содержание [6, 7]. Идеи о дробном интегрировании занимали многих видных ученых: Лейбница, Эйлера, Лиувилля и др. Интерес к дробному математическому анализу возник почти одновременно с появлением классического анализа (еще в 1695 г. Г. Лейбниц упоминал об этом в письмах к Г. Лопиталю при рассмотрении дифференциалов и производных порядка $1/2$). Следует отметить цикл работ чл.-корр. Петербургской Академии наук (1884 г.) А.В. Летникова, который за время своей 20-летней научной деятельности разработал полную теорию дифференцирования с произвольным указателем. В настоящее время наиболее часто используется выражение дробной производной D_{at}^α в форме, предложенной Риманом и Лиувиллем (${}_{RL}D_{at}^\alpha$).

Оператор интегрирования в смысле Римана–Лиувилля дробного порядка $\alpha \in R$ с началом в точке a определяется следующим образом [4–11]:

$${}_{RL}D_{at}^\alpha f(t) = \frac{\text{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{|t-\tau|^{\alpha+1}} d\tau, \quad \alpha < 0, \quad (7)$$

$${}_{RL}D_{at}^\alpha = f(t), \quad \alpha = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_{at}^\alpha &= \text{sign}^n(t-a) \frac{d^n}{dt^n} D_{at}^{\alpha-n} f(t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

где $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in N$; функция $\text{sign } z$ определяется равенствами $\text{sign } 0 = 0$, $\text{sign } z = z/|z|$, ($z \neq 0$); $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Для дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций определения дробных производных по Риману–Лиувиллю и Летникову эквивалентны.

В настоящее время достаточно широко используется формулировка Капуто [8–11]:

$${}_C D_{at}^\alpha f(t) = \text{sign}^n (t - a) {}_{RL} D_{at}^{\alpha-n} f^{(n)}(t), \quad (10)$$

$$n - 1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Производные Римана–Лиувилля и Капуто связаны соотношением [11]

$${}_C D_{at}^\alpha f(t) = {}_{RL} D_{at}^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\tau)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} |\tau - t|^{k-\alpha}, \quad (11)$$

$$n - 1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В случае $\alpha = n$ получаем

$${}_{RL} D_{at}^n f(t) = {}_C D_{at}^n f(t) = \text{sign}^n (t - a) \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad (12)$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Производная Капуто имеет ту же самую физическую интерпретацию, что и производная Римана–Лиувилля. В частности, при $f(0) = 0$ и $0 < \alpha < 1$ имеем точное равенство

$${}_C D_{0t}^\alpha f(t) = {}_{RL} D_{0t}^\alpha f(t). \quad (13)$$

При сравнении этих производных следует обратить внимание на то, что для расчета производной Римана–Лиувилля необходимо знание значений функции, а для производной Капуто – ее производных, что намного сложнее. Некоторое достоинство производной Капуто состоит в том, что она равна нулю для постоянной функции, что более привычно для исследователя.

Разрабатываемые текстурные и фрактальные цифровые методы (рис. 2) позволяют частично преодолеть априорную неопределенность в радиолокационных задачах с помощью *геометрии или топологии выборки* – одномерной или многомерной. При этом большое значение приобретают топологические особенности выборки, а не усредненные реализации, имеющие зачастую другой характер. Для того чтобы акцентировать внимание на учете этих особенностей, был специально введен термин *размерностный склероз* физических сигналов, полей и их фрактальных сигнатур [5, 16, 17]. При описании немарковских процессов, как известно [10], для раскрытия физического смысла дробных производных широко используется термин *асимптотический склероз*.

2. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

В рамках обозначенной выше тематики основные научные направления, развиваемые в течение сорока лет в ИРЭ им. В.А. Котельникова

РАН, можно классифицировать следующим образом [4, 5, 16–93].

1. Разработка новых информационных технологий для современных бортовых и наземных комплексированных радиотехнических систем дистанционного зондирования и мониторинга окружающей среды, радиолокации, радиовидения и навигации, функционирующих в диапазонах оптических, миллиметровых и сантиметровых (ММ и СМ) волн.

Теоретические и экспериментальные исследования физических основ рассеяния и распространения радиоволн с учетом пространственно-неоднородных характеристик зондируемой среды.

2. Фундаментальные исследования в области текстурных и фрактальных подходов к проблемам радиоп физики, радиотехники, радиолокации, электродинамики, электроники, управления и широко спектра смежных научных и технических направлений. Построение эмпирических и теоретических моделей соответствующих процессов.

3. Применение корреляционно-экстремальных методов для решения задач информационного поиска, обнаружения, измерения характеристик и сопровождения динамических фрактальных и не фрактальных объектов на стохастических изображениях. Такие задачи возникают в радиолокации, навигации, метеорологии, при исследовании природных ресурсов, дистанционном зондировании, обработке информации с БПЛА и радиолокаторов с синтезированной апертурой (РСА), в медицине, биологии, при автоматизации научных исследований и т.д.

4. Разработка теории и проведение экспериментальных исследований широкополосных (ШП) и сверхширокополосных (СШП) процессов и сигналов. Разработка фрактальных и нелинейных ШП- и СШП-сигналов, включая принципиально новые типы сигналов (*H*-сигналы).

5. Развитие и разработка математических, в том числе текстурных и фрактальных, методов обработки оптических и радиолокационных изображений в информационных системах различного назначения (радиолокация, медицина, материаловедение, нанотехнологии, сканирующие зондовые микроскопы, астрономия и т.д.).

6. Разработка и создание радиоэлектронных устройств для реализации математических фрактальных методов обнаружения сверхслабых многомерных сигналов на фоне интенсивных негауссовских помех для информационных систем нового поколения.

7. Физика основного уравнения радиолокации при зондировании фрактальных объектов и случайно-неоднородных сред. Фрактально-скейлинговая или масштабнo-инвариантная радиолокация, фрактальные многочастотные ММО-системы.



Рис. 2. Текстуры и фрактальные меры для малоконтрастных изображений и сверхслабых сигналов в интенсивных негауссовских помехах.

8. Теория дифракции волн на фрактальной многомасштабной поверхности. Многократное рассеяние волн во фрактальных дискретных случайно-неоднородных средах с точки зрения радиолокации самоподобных множественных групповых целей. Волны в неупорядоченных больших фрактальных системах (радиолокация, наносистемы, кластеры беспилотных летательных аппаратов и малоразмерных космических аппаратов, космический мусор и т.п.).

9. Применение теории фракталов в адаптивных популяционных методах формирования ди-

намических группировок БПЛА с организацией “распределенного интеллекта”, коллективного взаимодействия БПЛА в группе и в обработке поступающей информации с точки зрения теории их эффективного применения. Разработка решений в рамках понятия распределенной измерительной среды, когда каждая точка некоторой динамической среды способна выполнять сенсорные, измерительные и информационные функции, а также, на основе фрактально-графового подхода, позволяющего изучать рост сложных сетей и метод ма-



Рис. 3. Авторская концепция фрактальных радиосистем, датчиков, устройств и радиоэлементов.

нипулирования такими сетями на глобальном уровне без детального описания.

10. Формулировка основ фрактальной парадигмы и глобального фрактально-скейлингового метода. Разработка и развитие функционального принципа “максимум топологии при минимуме энергии” для принимаемого сигнала, позволяющего более эффективно использовать преимущества фрактально-скейлинговой обработки поступающей информации.

Основные фундаментальные исследования по текстурным и фрактальным направлениям кратко представлены на рис. 2–7.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО СОЗДАНИЮ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАДИОЛОКАЦИИ И ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Рассмотрим основные результаты, полученные в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (подробнее см. [4, 5, 16–93]).

По итогам проведения совместных многолетних натурных экспериментов с ведущими отраслевыми НИИ и конструкторскими бюро СССР и России был выполнен статистический анализ больших массивов новых данных по пространственно-временным характеристикам рассеяния земных покровов в диапазонах ММ- и СМ-волн. Учитывались их сезонные и угловые вариации в разнообразных метеоусловиях с целью оценки границ радиолокационных контрастов, законов распределения удельных ЭПР, ширины спектра,

времени и интервала корреляции флуктуаций интенсивности отраженных простых и сложных фазоманипулированных сигналов в диапазоне ММ-волн и структуры отраженных импульсных сигналов. Все это дает возможность учесть особенности местности при проектировании разнообразных систем формирования изображений [4, 5, 19–23].

Создана теория рассеяния миллиметровых радиоволн хаотическими покровами, использующая впервые введенные функционалы стохастических полей обратного рассеяния и частотные функции когерентности с учетом диаграммы направленности антенны и корреляции наклонов неровностей. Результаты, полученные с помощью данной теории позволяют определять полосы когерентности пространственно-временных радиоканалов с переменными параметрами для оптимального выбора ширины спектра зондирующего сигнала, разнесения частот в многочастотных системах и величины базы сложных зондирующих сигналов, характеристики отраженных сигналов, обобщенные функции неопределенности, потенциальную точность оценок высоты полета летательного аппарата и характерных размеров неровностей. Полученные теоретические и экспериментальные результаты были использованы при синтезе эталонных цифровых радиолокационных карт местности [19, 23, 30, 31, 49, 88].

Впервые предложен новый класс информативных признаков, основанный на тонкой структуре отраженных радиолокационных сигналов ММ-диапазона радиоволн и позволяющий улучшать идентификацию земных покровов [23, 29].

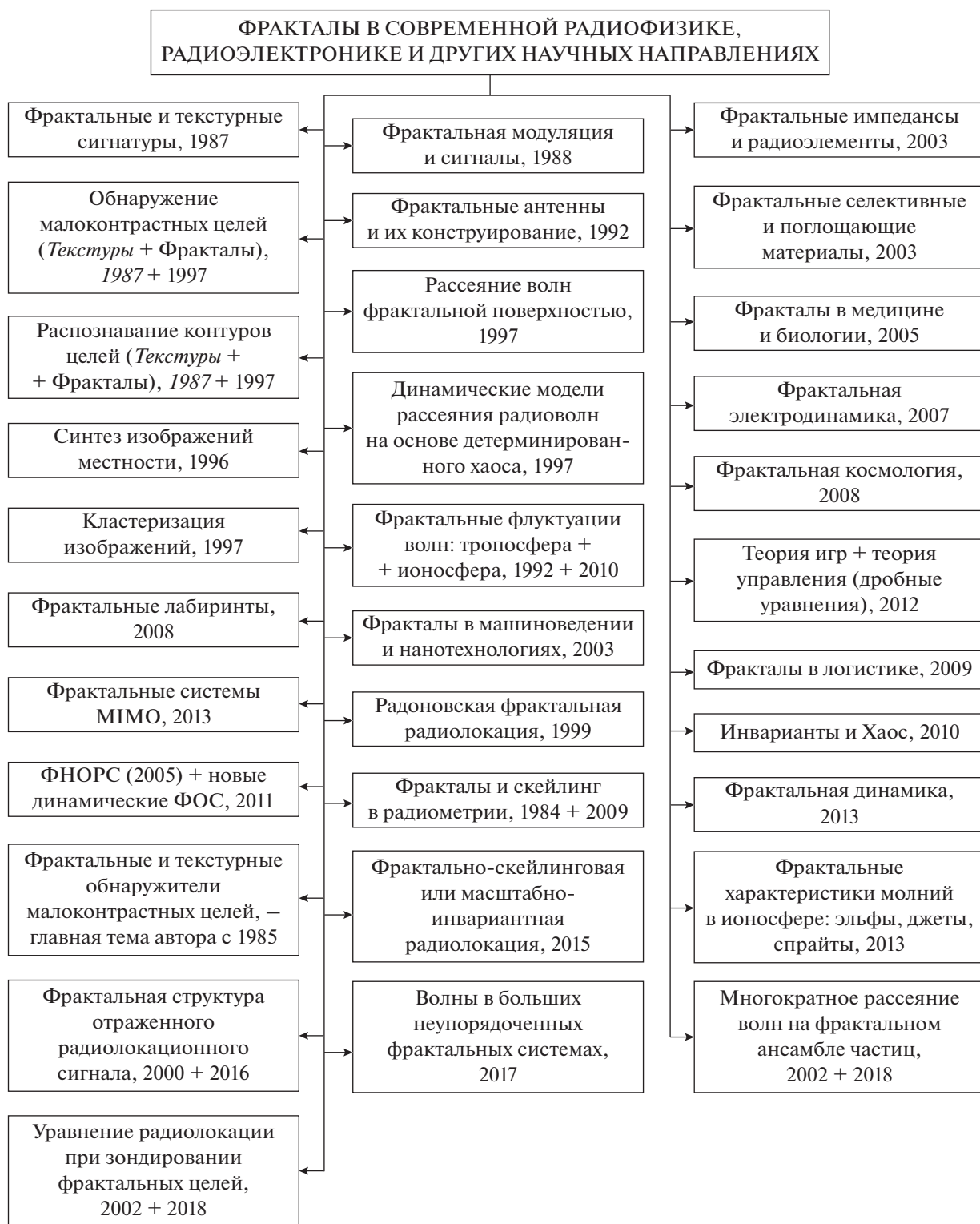


Рис. 4. Эскиз развития прорывных технологий на основе фракталов, дробных операторов и эффектов скейлинга для нелинейной физики и радиоэлектроники, ФНОРС – фрактальный непараметрический обнаружитель радиолокационных сигналов, ФОС – фрактальный обнаружитель сигналов.

Были впервые исследованы *полные* ансамбли текстурных и пространственных корреляционно-спектральных признаков оптических и радиолока-

ционных изображений реальных земных покровов с последующим выделением кластеров и определением наиболее информативных признаков для



Рис. 5. Топологические признаки и новые методы обнаружения малококонтрастных объектов на фоне интенсивных помех, ТП – текстурные признаки, ЧФК – частотная функция когерентности, РЛИ – радиолокационное изображение.

наиболее распространенных классов текстур. Доказано, что область существования текстурных признаков радиолокационных изображений в

диапазоне ММ-волн полностью определяется соответствующими областями признаков оптических изображений. Проведенные эксперименты проде-



Рис. 6. Основные виды предложенных фрактально-скейлинговых или топологических обнаружителей сигналов.

монстрировали эффективность и общность предложенного подхода в задачах классификации земных покровов при комплексировании изображений на оптических и ММ-волнах [16, 22–28]. Комплексирование изображений повышает эффективность обнаружения, распознавания и классификации на основе расширенного вектора информативных и устойчивых признаков. Результатом обработки изображений стали детальные цифровые радиолокационные карты местности, позволившие представить радиолокационную информацию в виде, удобном для дальнейшего пользования в радионавигации летательных аппаратов и распознавании различных типов наземных объектов. (Следует отметить, что эти исследования не имели аналогов как в СССР, так и в России и не потеряли своей актуальности в настоящее время).

Впервые разработан ряд текстурных методов (см. рис. 2 и 5) обнаружения различных объектов и их контуров на реальных оптических и радиолокационных изображениях земной поверхности при малых отношениях сигнал/фон. Установлена связь размеров объекта и анализируемого фрагмента оптических и радиолокационных изображений широкого класса земных покровов в случае оптимального обнаружения [16, 22, 26, 40].

Теоретически обоснована и экспериментально подтверждена возможность стохастического

авторегрессионного синтеза оптических и радиолокационных изображений земных покровов с операцией преобразования гистограмм яркости. Определены оптимальные размеры яркостного пространства и порядок авторегрессионных рядов, участвующих в прогнозировании, для адекватного синтеза изображений. При увеличении порядка корреляции области определения текстурных признаков синтезированных изображений сужаются. При сравнении участков исходного оптического или радиолокационного изображения с синтезированным эталоном показано, что итоговое двумерное бинарное поле коэффициентов взаимной корреляции непосредственно фиксирует местоположение объекта в исходном изображении. Это позволило сформировать карту движения и динамику обнаруживаемого объекта. С помощью различных алгоритмов совмещения (классический корреляционный, метод парных функций, метод абсолютной разности) установлено, что физическая достоверность стохастического авторегрессионного синтеза достигает величины 90% [5, 16, 19].

Разработан и реализован на основе приведенных выше радиофизических исследований системный подход к формированию информационно-аксиоматической модели радиолокационных карт неоднородной местности. Создана обобщен-



Рис. 7. Точки приложения фракталов, скейлинга и дробных операторов в классическом радиолокаторе с целью перехода к фрактальной радиолокационной системе; БПЛА – беспилотный летательный аппарат, СДЦ – селекция движущихся целей, ПИД-регулятор – пропорционально интегрально-дифференцирующий регулятор.

ная радиофизическая модель формирования радиолокационных карт неоднородной местности, включающая в себя как методы стохастического авторегрессионного синтеза изображений, так и информацию о поле удельных ЭПР земных покровов. Установлено характерное число градаций удельных ЭПР земной поверхности. На основе анализа архитектуры системы для получения эталона реализован алгоритм синтеза в радиодиапазоне контурных и полутоновых радиолокационных карт неоднородной местности. Показано, что разрушение корреляционного максимума происходит для контурной радиолокационной карты местности на длине волны 8.6 мм при угле взаимного поворота $5^{\circ} \dots 7^{\circ}$, а для полутоновой радиолокационной карты – при угле в пределах $14^{\circ} \dots 17^{\circ}$. Затем в обобщенную радиофизическую модель формирования радиолокационных карт неоднородной местности были впервые введены фрактальные параметры, что повысило информативность синтеза [5, 16, 19, 49].

Предсказано наличие странного аттрактора, контролирующего радиолокационное рассеяние от растительных покровов [38]. Впоследствии, в 2002 г., эффект был обнаружен экспериментально на длине волны 2.2 мм. Полученные результаты подтвердили теоретические представления о существовании режима хаоса в динамической системе, описывающей характер рассеяния электромагнитных волн растительными покровами.

Реконструкция аттрактора позволила определить его фрактальную размерность D , максимальный показатель Ляпунова, размерность вложения, интервал (время) предсказания. Экспериментальные характеристики странного аттрактора легли в основу принципиально новой негауссовской модели радиолокационного рассеяния ММ-волн растительными покровами на основе теории динамических систем и устойчивых распределений. Показано, что интервал (время) предсказания интенсивности отраженного радиолокационного сигнала примерно на порядок превышает классическое время корреляции. Это позволило ввести в

теорию радиолокации новую существенную характеристику, а именно интервал (время) предсказания, что расширило методы и схемотехнику радиолокаторов [1, 5, 25, 38, 73, 81].

В середине 80-х годов XX в. совместно с КБ “Алмаз” был создан действующий макет когерентного малогабаритного цифрового твердотельного радиолокатора (ЦТР) на параметронах с длиной зондирующей волны 8.6 мм со сложным сигналом и базой $>10^6$, а также с обработкой входного подшумового сигнала на несущей частоте [1, 4, 5, 36]. При оптимальной обработке энергетический потенциал ЦТР возрастал на 50 дБ. Затем был создан ЦТР на двух зондирующих частотах в диапазонах ММ- и СМ-волн с фрактальной шелевой антенной (первой в СССР); для синтеза изображений использовано преобразование Радона. В 1997 г. впервые разработаны методы фрактальной модуляции и фрактальные сигналы, включая впервые введенные автором *H*-сигналы [4, 5, 16].

Впервые обнаружена и доказана эффективность и перспективность применения теории дробной меры и скейлинговых соотношений (для текстуры и фракталов) в случае обнаружения и распознавания (обобщенной фильтрации) одномерных и многомерных радиолокационных сигналов от малоконтрастных целей на фоне интенсивных негауссовских помех разного рода [4, 5, 16–18, 26, 32–35, 40, 42, 43, 47–49, 68–93]. Таким образом, это *принципиально новая* радиотехника.

Доказано, что при сборе, преобразовании и хранении информации в современных сложных системах мониторинга удаленных и мобильных объектов в условиях интенсивных помех большое значение приобретают новейшие методы обработки информационных потоков и многомерных сигналов, предложенные автором. Обычно особенности таких сложных систем проявляются на разных пространственно-временных масштабах. Наиболее адекватные оценки состояний исследуемой системы и динамики изменения состояния ее подсистем реализуются при использовании теории фракталов и обработке многомерных сигналов в пространстве дробной размерности с неизменным учетом эффектов скейлинга [4, 5, 16, 17].

Предложен и обоснован новый, названный авторами “локально-дисперсионный”, метод измерения фрактальной размерности и соответствующих фрактальных сигнатур сигналов, изображений и волновых полей. Данный метод, а также его эффективность, подтверждены на практике многочисленными примерами соответствующей цифровой обработки оптических и радиолокационных природных и синтезированных изображений, в том числе и с малоконтрастными объектами [43]. Текстурные и фрактальные цифровые методы (см. рис. 2 и 5) позволяют частично преодолевать

априорную неопределенность в радиолокационных задачах с помощью *геометрии* или *топологии выборки* – одномерной или многомерной [4, 5, 16–18, 42]. При этом большое значение приобретают топологические особенности выборки, а не усредненные реализации, имеющие зачастую другой характер.

Впервые исследованы на больших массивах экспериментальных данных в виде оптических и радиолокационных изображений реальных земных покровов с поверхностными и подповерхностными объектами методы фрактальной классификации, кластеризации и распознавания многих типов природных и искусственных объектов. Число областей, вокруг которых группируются значения фрактальной размерности, зависит от параметров алгоритма и метода измерения. Например, при малом размере измерительного окна имеем большое число групп; увеличивая размер, получаем фиксированное число групп или кластеров; и, наконец, при очень большом размере окна остаются две-три группы (фрактальные объекты – нефрактальные объекты – объекты исключения) [1, 4, 5, 17, 40, 43].

Изучение вида или топологии выборки одномерного (многомерного) сигнала для задач, например, искусственного интеллекта, впервые позволило создать словари фрактальных признаков на основе фрактальных примитивов, являющихся элементами фрактального языка с фрактальной грамматикой. Полученные данные были заложены в синтез эталонных и текущих радиолокационных карт неоднородной местности, а также в неэнергетические радиолокационные обнаружители [5, 16–18, 54, 93].

Результаты (БПЛА, РСА, медицина и т.д.) показывают, что фрактальные методы обработки в несколько раз повышают качество и детализацию объектов и целей в пассивном и активном режиме. Эти методы могут быть успешно применены для обработки информации, полученной с космических, авиационных комплексов, малозаметных высотных псевдоспутников (НАРС), или обнаружения кластеров НАРС и БПЛА, синтезированных кластеров космических антенн и космического мусора [1, 4, 5, 16–18, 32–34, 42–44, 47, 54, 59, 61, 78, 93].

Исследованы фрактальные характеристики эльфов, джетов и спрайтов – наиболее интересных типов недавно открытых высотных разрядов в ионосфере [82].

Синтезированы алгоритмы выделения движущегося удаленного объекта неизвестной формы (фрактального или не фрактального) на малоконтрастном изображении, формируемом в оптико-электронных системах [17]. Экспериментальные результаты на изображениях, полученных в на-

турных условиях, подтверждают эффективность предлагаемых методов обработки.

Впервые доказана принципиальная возможность синтеза новых фрактальных функций и фрактальных функционалов на основе теории нечетких множеств [1, 5]. Формализовано построение новых классов фрактальных и мультифрактальных подмножеств на нечетких множествах [17]. В качестве пробных функций можно использовать любые классические недифференцируемые функции.

Впервые показано, что физическое содержание теории дифракции волн на многомасштабной поверхности становится более четким при фрактальном подходе и выделении фрактальной размерности D или фрактальной сигнатуры как параметра. Учет фрактальности значительно сближает теоретические и экспериментальные характеристики индикатрис рассеяния земных покровов, что важно для задач радиолокации и дистанционного зондирования [4, 5, 16, 39, 50, 67, 70, 82, 83, 86].

Исследован и представлен впервые в мире обширный каталог характерных видов более 70 фрактальных поверхностей на основе функций Вейерштрасса, а также более 70 трехмерных индикатрис рассеяния и их сечений, рассчитанных для длин волн $\lambda = 2.2, 8.6$ мм и 3.0 см при разных значениях фрактальной размерности D и изменяющейся геометрии рассеяния [67, 83].

Получены аналоги уравнений Максвелла с дробными производными Капуто. Рассмотрена калибровочная инвариантность и выведено диффузионно-волновое уравнение для скалярного и векторного потенциалов. Найдено и проанализировано частное решение диффузионно-волнового уравнения [55, 56].

Проведен строгий электродинамический расчет многочисленных типов фрактальных антенн, принципы конструирования которых лежат в основе фрактальных частотно-избирательных поверхностей и объемов (фрактальные “сэндвичи”) [4, 5, 16, 45, 57, 64, 73, 84, 92].

Синтезировано на основе топологии фрактальных лабиринтов семейство широкополосных миниатюрных фрактальных антенн [48, 73, 92]. Предложено синтезировать большие стохастические робастные антенные решетки с использованием свойств фрактальных лабиринтов. Объединение нескольких фрактальных лабиринтных кластеров с различной фрактальной размерностью позволяет создавать адаптивные широкополосные фрактальные антенны.

Созданы, разработаны и применены фрактально-скейлинговые методы для задач радиолокации и формирования основ фрактальной элементной базы, фрактальных датчиков и фрактальных радиосистем. Впервые предложена и реализована модель “фрактального” конденсатора как фрак-

тального импеданса [48]. Перспективными элементами фрактальной радиоэлектроники являются функциональные элементы, фрактальные импедансы которых реализуются на основе фрактальной геометрии проводников на поверхности (фрактальные наноструктуры) и в пространстве (фрактальные антенны), фрактальной геометрии поверхностного микрорельефа материалов и т.д. [4, 5, 16, 18, 44, 48, 74, 80, 92, 93].

Открыт, предложен и обоснован новый вид и новый метод современной радиолокации, а именно, *фрактально-скейлинговая или масштабно-инвариантная радиолокация*. Доказана эффективность функционалов, которые определяются топологией, дробной размерностью и текстурой принятого многомерного сигнала, для синтеза принципиально новых не энергетических обнаружителей малоконтрастных объектов на фоне помех (см. рис. 3–7). Подтверждено повышение чувствительности радиосистемы (что эквивалентно увеличению дальности действия) при использовании фрактальных и текстурных признаков в топологических обнаружителях. Это влечет за собой коренные изменения в самой структуре теоретической радиолокации, а также в ее математическом аппарате [4, 5, 16, 18, 46, 54, 68–70, 72, 75, 80, 82, 85, 90, 93].

Фрактальная радиолокация способна адекватно описать и объяснить значительно более широкий класс радиолокационных явлений. В основе впервые созданного научного направления лежат концепция фрактальных радиосистем и фрактальных радиоэлементов, топология выборки и глобальный фрактально-скейлинговый метод. Проведенные исследования в области теоретической радиолокации позволяют эффективно решать проблемы обнаружения сигналов в условиях интенсивных помех и создавать новые фрактальные многочастотные ММО-системы.

Разработаны *постулаты фрактальной радиолокации*: 1 – интеллектуальная обработка сигнала/изображения, основанная на теории дробной меры и скейлинговых эффектов, для расчета поля фрактальных размерностей; 2 – выборка принимаемого сигнала в шумах относится к классу устойчивых негауссовых распределений вероятностей D сигнала; 3 – максимум топологии при минимуме энергии входного случайного сигнала (т.е. максимальный “уход” от энергии принимаемого сигнала) [69, 75, 82, 84, 85, 93].

Данные постулаты открывают новые возможности для обеспечения устойчивой работы при малых отношениях сигнал/(шум + помеха) или увеличения дальности действия радиолокаторов.

Существенно развиты совместно с коллегами из России (Москва, Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений, ВНИИОФИ) и Израиля (Хайфа,

“Технион”) теоретические вопросы фрактальной неинерциальной релятивистской радиолокации и квантовой космологии в искривленном пространстве – времени отрицательной фрактальной размерности [4, 5, 19, 58, 93]. Приведем пример: на основе уравнения Шредингера с оператором дробного исчисления по пространственным координатам вычислен фейнмановский интеграл по траекториям для обобщенного лагранжиана с оператором дробного дифференцирования по времени. Отметим, что в настоящее время в США данное фундаментальное научное направление получило яркое название “фрактальная космология (Fractal Cosmology).

Полученные результаты экспериментальных и теоретических исследований были внедрены и использованы при проектировании радиосистем различного назначения, при интерпретации данных дистанционных радиофизических исследований окружающей среды и в других прикладных задачах, в которых информационными материалами служат оптические и радиолокационные изображения земной поверхности.

На основе проведенных многолетних исследований сформулированы и развиты новые теоретические направления в теории статистических решений, статистической радиотехнике и статистической радиофизике, например, “Статистическая теория фрактальной радиолокации”, “Статистическая фрактальная радиотехника”, “Теоретические основы фрактальной радиолокации” и т.п.

Авторы обозначили лишь наиболее важные вопросы, связанные с использованием фракталов, текстур и эффектов скейлинга в радиофизике и радиолокации. В развитии фрактальных направлений уже пройдены многие важные этапы, в том числе и этап становления этой области наук. Однако много задач еще предстоит решить. Подчеркнем, что не результаты и не конкретные решения представляют самую большую ценность, а именно *метод решения*, подход к нему. Глобальный фрактально-скейлинговый метод создан и развивается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные исследования являются приоритетными в мире и служат базой для дальнейшего развития и обоснования практического применения фрактально-скейлинговых и текстурных методов в современной радиофизике, радиоэлектронных системах и нанотехнологиях, а также в создании принципиально новых и более точных фрактально-текстурных (топологических) методов обнаружения и измерения параметров радиосигналов в пространственно-временном радиолокационном канале распространения электромагнитных волн с рассеянием.

Коренное отличие предложенных текстурно-фрактальных методов от классических связано с принципиально иным подходом к основным составляющим сигнала и поля. Это позволило перейти на новый уровень информационной структуры реальных немарковских сигналов и полей. Таким образом, это *принципиально новая* радиотехника. Внедрение фракталов, эффектов скейлинга и дробных операторов дает “импульс” и современной радиоэлектронике, так как вся предыдущая и настоящая радиоэлектроника базируется исключительно (и только!) на основе теории целочисленных функций.

Проблему, вынесенную в название работы, начали изучать ровно 40 лет назад в ИРЭ АН СССР в связи с выполнением цикла фундаментальных исследований, посвященных созданию новых прорывных радиофизических технологий для радиолокации. Основное – это обнаружение по одномерной (сигнал) и многомерной (оптические и радиолокационные изображения) выборке разнообразных малоконтрастных объектов на фоне интенсивных помех от поверхности Земли.

Сначала были исследованы *полные* семейства текстурных признаков (впервые в мире), затем начался переход к фрактальным признакам (также впервые в мире). Затем эти семейства признаков были объединены в общий кластер признаков. Исходным материалом служили огромные массивы данных, полученных в оптике и на ММ-волнах в многолетних натуральных экспериментах. Результаты научной деятельности в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН по фрактально-скейлинговой и текстурной обработке информации в интенсивных помехах, а также по фрактальным радиосистемам и фрактальным радиоэлементам были опубликованы в четырех отчетных докладах Президиума Российской академии наук за 2008, 2010, 2012, 2013 гг.

Фрактальная геометрия – громадная и гениальная заслуга Б. Мандельброта, но ее радиофизическое/радиотехническое и практическое воплощение – заслуга Российской научной школы фрактальных методов (ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН). Несколько утрируя, можно сказать, что фракталы составляли тонкую амальгаму на мощном остоле науки конца XX в. В современной ситуации интеллектуальное фиаско потерпели попытки принизить их значение и опираться только на классические знания.

Полученные результаты и выводы имеют большой инновационный потенциал, реализация которого, на наш взгляд, обеспечит решение целого ряда современных задач радиофизики, радиотехники, радиолокации, связи и управления, позволит обеспечить новое качество систем обнаружения и распознавания, развития новых информационных технологий и повышения

конкурентоспособности отечественных изделий радиоэлектроники.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания и частично подержана Международным научно-техническим центром (проект № 0847.2, 2000–2005, США), Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 05-07-90349, 07-07-07005, 07-07-12054, 07-08-00637, 11-07-00203, 18-08-01356-а), а также проектом “Leading Talents” (№ 00201502, 2016–2020) в Джинанском университете (Гуанджоу, Китай).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бункин Б.В., Реутов А.П., Потапов А.А. и др. Вопросы перспективной радиолокации (Коллективная монография). М.: Радиотехника, 2003.
2. Skolnik M.I. Radar Handbook. 3rd ed. N.Y.: McGraw Hill, 2008.
3. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. N.Y.: Freeman and Company, 1982.
4. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002.
5. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005.
6. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. N.Y.: Acad. Press, 1974.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
8. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
9. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
10. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.
11. Потапов А.А., Черных В.А. Дробное исчисление А.В. Летникова в физике фракталов. Saarbrücken: LAMBERT Academic Publ., 2012.
12. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Немарковские физические процессы. М.: Физматлит, 2018.
13. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
14. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949.
15. Rogers C.A. Hausdorff Measures. London: Cambridge Univ. Press, 1970.
16. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах // Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. С. 374.
17. Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А. и др. Новейшие методы обработки изображений. М.: Физматлит, 2008.
18. Потапов А.А. Фрактальный метод и фрактальная парадигма в современном естествознании. Воронеж: ИПЦ “Научная книга”, 2012.
19. Подосенов С.А., Потапов А.А., Фоукзон Дж., Менькова Е.Р. Неголономные, фрактальные и связанные структуры в релятивистских сплошных средах, электродинамике, квантовой механике и космологии. В 3-х тт. М: Ленанд (URSS), 2015.
20. Андреев Г.А., Потапов А.А., Хохлов Г.И. // РЭ. 1982. Т. 27. № 10. С. 1863.
21. Андреев Г.А., Потапов А.А. // РЭ. 1986. Т. 31. № 7. С. 1405.
22. Потапов А.А., Галкина Т.В., Орлова Т.И., Хлявич Я.Л. // РЭ. 1990. Т. 35. № 11. С. 2295.
23. Потапов А.А. // Радиотехника. 1989. № 12. С. 61.
24. Андреев Г. А., Потапов А.А., Опаленов Ю.В. и др. // Исследование Земли из космоса. 1990. № 1. С. 112.
25. Потапов А.А. // РЭ. 1991. Т. 36. № 2. С. 239.
26. Потапов А.А., Галкина Т.В., Орлова Т.И., Хлявич Я.Л. // РЭ. 1991. Т. 36. № 11. С. 2240.
27. Потапов А.А., Колесников А.И. // РЭ. 1993. Т. 38. № 7. С. 1270.
28. Потапов А.А., Колесников А.И. // РЭ. 1993. Т. 38. № 10. С. 1851.
29. Павельев В.А., Потапов А.А. // РЭ. 1994. Т. 39. № 4. С. 573.
30. Потапов А.А. // РЭ. 1996. Т. 41. № 7. С. 816.
31. Потапов А.А., Соколов А.В. // РЭ. 1996. Т. 41. № 9. С. 1071.
32. Rotarov A.A., German V.A. // Pattern Recognition and Image Analysis, 1998. V. 8. № 2. P. 226.
33. Потапов А.А., Герман В.А. // РЭ. 2000. Т. 45. № 8. С. 946.
34. Потапов А.А. // Зарубеж. радиоэлектроника. Успехи совр. радиоэлектроники. 2000. № 6. С. 3.
35. Потапов А.А. // РЭ. 2000. Т. 45. № 11. С. 1285.
36. Опаленов Ю.В., Потапов А.А. // РЭ. 2000. Т. 45. № 12. С. 1447.
37. Потапов А.А. // РЭ. 2001. Т. 46. № 3. С. 261.
38. Потапов А.А., Герман В.А. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. № 14. С. 19.
39. Потапов А.А. // РЭ. 2002. Т. 47. № 5. С. 517.
40. Потапов А.А. // РЭ. 2003. Т. 48. № 9. С. 1101.
41. Потапов А.А., Соколов А.В. // Изв. РАН. Сер. Физическая. 2003. Т. 67. № 12. С. 1775.
42. Потапов А.А. // Нелинейный мир. 2004. Т. 2. № 1. С. 4.
43. Потапов А.А., Герман В.А. // РЭ. 2004. Т. 49. № 12. С. 1468.
44. Потапов А.А., Булавкин В.В., Герман В.А., Вячеславова О.Ф. // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 5. С. 28.
45. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Давыдов А.Г. // РЭ. 2005. Т. 50. № 9. С. 1070.
46. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Герман В.А. // РЭ. 2006. Т. 51. № 8. С. 968.
47. Потапов А.А., Герман В.А. // Автометрия. 2006. Т. 42. № 5. С. 3.
48. Потапов А.А., Потапов А.А. (мл.), Потапов В.А. // Нелинейный мир. 2006. Т. 4. № 4–5. С. 172.
49. Потапов А.А. // РЭ. 2007. Т. 52. № 3. С. 261.
50. Потапов А.А., Лактюнькин А.В. // Нелинейный мир. 2008. Т. 6. № 1. С. 3.

51. *Потапов А.А., Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 9. С. 1033.
52. *Потапов А.А., Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 11. С. 1347.
53. *Потапов А.А.* // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. № 6. С. 1121.
54. *Потапов А.А.* // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2008. № 5. С. 3.
55. *Боголюбов А.Н., Потапов А.А., Рехвиашвили С.Ш.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2009. № 4. С. 9.
56. *Боголюбов А.Н., Потапов А.А., Рехвиашвили С.Ш.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2010. № 3. С. 54.
57. *Потапов А.А., Матвеев Е.Н.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 10. С. 1157.
58. *Podosenov S.A., Foukzon J., Potapov A.A.* // Gravitation and Cosmology. 2010. V. 16. № 4. P. 307.
59. *Гуляев Ю.В., Панасенко С.В., Потапов А.А., Черногор Л.Ф.* // ДАН. 2011. Т. 436. № 5. С. 606.
60. *Рехвиашвили С.Ш., Потапов А.А.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 2. С. 207.
61. *Панасенко С.В., Потапов А.А., Черногор Л.Ф.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 3. С. 330.
62. *Потапов А.А.* // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование. Оптимальное управление. 2012. № 5. С. 172.
63. *Малышев К.В., Потапов А.А., Чернышев С.Л.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 4. С. 367.
64. *Потапов А.А., Шифрин Я.С., Кузеев Р.Р.* // Антенны. 2014. № 3. С. 25.
65. *Леонов К.Н., Потапов А.А., Ушаков П.А.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 12. С. 1209.
66. *Потапов А.А.* // Радиотехника. 2015. № 8. С. 95.
67. *Потапов А.А., Лактунькин А.В.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 9. С. 906.
68. *Potapov A.A.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 918. № 012015.
69. *Потапов А.А.* // Труды IV Всерос. науч.-техн. конф. “РТИ Системы ВКО-2016”, посв. 100-летию НИИДАР и 70-летию РТИ им. академика А.Л. Минца (Москва, 02–03.06.2016). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. С. 438.
70. *Потапов А.А.* // Сб. аннотаций Междунар. конф. XIV Харитоновские тематические научные чтения “Мощная импульсная электрофизика”, посв. 110-летию со дня рождения академика Ю.Б. Харитона (Саров, 21–25 апреля 2014 г.). Саров, 2014. С. 80.
71. *Потапов А.А.* // Сб. материалов XIII Междунар. конф. “Забабахинские научные чтения”, посв. 100-летию со дня рождения Е.И. Забабахина (Снежинск, 20–24 марта 2017 г.). Снежинск, 2017. С. 137.
72. *Потапов А.А.* // Сб. науч. статей по материалам II Всерос. науч.-практ. конф. “Авионика” (Воронеж, 16–17 марта 2017 г.). Воронеж, 2017. С. 143.
73. *Потапов А.А.* // Сб. науч. статей по материалам III Всерос. науч.-практ. конф. “Авионика” (15–16 марта 2018 г.). Воронеж, 2018. С. 267.
74. *Potapov A.A., Potapov Alexey A., Potapov V.A.* // Proc. 14th Sino - Russia Symp. on Advanced Materials and Technologies (Sanya, Hainan Province, China: November 28–December 1, 2017) / Beijing: Metallurgical Industry Press, 2017. P. 499.
75. *Потапов А.А.* // Вестник воздушно-космической обороны. 2018. № 2. С. 15.
76. *Potapov A.A.* // Proc. IET Int. Radar Conf. 2018 (China, Nanjing, 17–19 October, 2018). Beijing: The Institution of Engineering and Technology (IET), 2018. № F0275.
77. *Потапов А.А., Рехвиашвили С.Ш.* // ЖТФ. 2018. Т. 88. № 6. С. 803.
78. *Потапов А.А.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 9. С. 915.
79. *Багманов В.Х., Потапов А.А., Султанов А.Х., Вей Жанг* // РЭ. 2018. Т. 63. № 10. С. 1062.
80. *Potapov A.A.* // Eurasian Phys. Techn. J. 2018. V. 15. № 2. P. 5.
81. *Potapov A.A.* // Eurasian Phys. Techn. J. 2018. V. 15. № 2. P. 16.
82. *Potapov Alexander A.* // The Foundations of Chaos Revisited: From Poincaré to Recent Advancements. Switzerland, Basel: Springer Int. Publ., 2016. P. 195.
83. *Potapov Alexander A.* // Fractal Analysis – Applications in Physics, Engineering and Technology. Rijeka: In-Tech, 2017. P. 187.
84. *Potapov Alexander A.* // Nonlinearity: Problems, Solutions and Applications. N.-Y.: Nova Science Publ., 2017. V. 2. P. 35.
85. *Потапов А.А.* // Сб. науч. работ к 65-летию создания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН и 110-летию со дня рождения академика В.А. Котельникова М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2018. С. 99.
86. *Потапов А.А.* // Сб. науч. работ к 65-летию создания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН и 110-летию со дня рождения академика В.А. Котельникова. М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2018. С. 155.
87. *Alisultanov Z.Z., Agalarov A.M., Potapov A.A., Ragimkhanov G.B.* // Fractional Dynamics, Anomalous Transport and Plasma Science. Switzerland: Springer Int. Publ., 2018. P. 125.
88. *Акиншин Р.Н., Румянцев В.Л., Потапов А.А. и др.* Физические основы устройства ракетно-артиллерийского вооружения. Алгоритмы и устройства функционирования бортовых радиотехнических средств воздушной разведки артиллерии. Пенза, 2018.
89. *Потапов А.А.* // Сб. тр. Междунар. конф. “Турбулентность, динамика атмосферы и климата”, посв. столетию со дня рождения академика А.М. Обухова (Москва, 16–18 мая 2018 г.). М.: Физматкнига, 2018. С. 564.
90. *Потапов А.А.* // Радиотехника. 2019. № 1. С. 80.
91. *Потапов А.А.* // Сб. материалов XIV Междунар. конф. “Забабахинские научные чтения” (Снежинск, 18–22 марта 2019 г.). Снежинск, 2019. С. 105.
92. *Потапов А.А.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 7. С. 735.
93. *Профессор Александр Алексеевич Потапов.* Библиографический указатель / Под ред. Гуляева Ю.В. М.: Научная книга, 2019.