

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО ПОСИМВОЛЬНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ КОДАМ С ПРОВЕРКОЙ НА ЧЕТНОСТЬ В НЕДВОИЧНЫХ ПОЛЯХ

© 2019 г. Л. Е. Назаров¹, *, П. В. Шишкун¹

¹Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Российская Федерация, 141190 Фрязино Московской обл., пл. Введенского, 1

*E-mail: levnaz2008@mail.ru

Поступила в редакцию 20.02.2019 г.

После доработки 20.02.2019 г.

Принята к публикации 18.03.2019 г.

Рассмотрен алгоритм оптимального посимвольного приема сигнальных конструкций на основе блоковых помехоустойчивых кодов в недвоичных полях. Показано, что основу разработанного алгоритма посимвольного приема составляет спектральное преобразование в базисе Уолша–Адамара. Показано, что результирующая сложность разработанного алгоритма приема определяется размерностью дуального кода, что обуславливает перспективность его применения для блоковых помехоустойчивых кодов с высокой кодовой скоростью. Приведены результаты моделирования разработанного алгоритма приема с целью исследования помехоустойчивости для сигналов на основе кодов с проверкой на четность.

DOI: 10.1134/S0033849419080138

ВВЕДЕНИЕ

Коды с проверкой на четность находят широкое применение в схемах помехоустойчивого кодирования, например, в блоковых турбокодах в качестве составляющих кодов, в каскадных схемах кодирования [1, 2]. Для этих кодовых схем разработаны процедуры итеративного приема на основе алгоритмов посимвольного приема составляющих кодов, реализующих вычисление выходных “мягких” (многоуровневых) решений для кодовых символов с использованием входных “мягких” решений с выхода демодулятора сигналов [1, 3–5]. Это определяет низкую сложность результирующих алгоритмов итеративного приема данных кодовых схем, что обуславливает их практическое применение в системах связи различного назначения, в частности, блоковые турбокоды на основе рассматриваемых составляющих кодов с проверкой на четность применяются в оптических системах связи, в системах магнитной записи [6, 7].

Правило оптимального посимвольного приема минимизирует вероятность ошибки на кодовый символ в отличие от правила приема максимального правдоподобия, минимизирующего вероятность ошибки на кодовое слово [8]. Известен ряд алгоритмов посимвольного приема сигналов

на основе помехоустойчивых линейных кодов в двоичном поле $GF(2)$, например, на основе использования решетчатой структуры дуальных кодов, а также на основе использования спектрального преобразования в базисе Уолша–Адамара [9, 10]. Актуальной является проблема разработки и исследования алгоритмов посимвольного приема для сигналов, соответствующих кодам в недвоичных полях $GF(2^m)$ [1, 2]. Этот подход позволяет расширить класс эффективных сигнальных и кодовых конструкций и согласуется с направлением развития теории класса помехоустойчивых кодов в недвоичных полях [1, 2, 8, 11–14]. В этот класс входят коды Рида–Соломона и низкоплотностные коды [15–18], интенсивно используемые в приложениях.

В статье рассматривается алгоритм оптимального посимвольного приема, реализующий вычисление “мягких” решений для кодовых символов с использованием входных “мягких” решений для сигнальных конструкций, соответствующих кодам в недвоичных полях $GF(2^m)$. Исследование помехоустойчивости этого алгоритма произведено для сигнальных конструкций, соответствующих кодам с проверкой на четность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\vec{A} = (a_i; 0 \leq i \leq k-1)$ — последовательность информационных символов — элементов поля $GF(2^m)$. Проверочный символ a_k кодового слова \vec{B} кода с проверкой на четность задается в виде суммы [14, 19]

$$a_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i. \quad (1)$$

Суммирование в (1) осуществляется в поле $GF(2^m)$, элементы поля a_i представляются многочленами [18]

$$a_i(x) = \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_p(a_i)x^p, \quad \alpha_p(a_i) \in GF(2). \quad (2)$$

Кодовые символы $a_i, i = 0, 1, \dots, k$ сопоставляются сигналам, которые передаются по физическим каналам. На вход приемного устройства поступает реализация $\vec{Y} = (\dot{y}_l; 0 \leq l \leq k)$, где \dot{y}_l — “мягкие” решения (в общем случае комплексные), поступающие с демодулятора сигналов.

Оптимальное посимвольное правило приема заключается в вычислении апостериорных вероятностей $\Pr(a_i = \beta | \vec{Y})$, $\beta \in GF(2^m)$ и коэффициентов $\alpha_p(a_i) \in GF(2)$, $p = 0, 1, \dots, m-1$, на основе которых вычисляются “мягкие” решения $x_\beta(i)$ [1, 9]

$$x_\beta(i) = \ln \left(\frac{\Pr(a_i = \beta | \vec{Y})}{\Pr(a_i = 0 | \vec{Y})} \right). \quad (3)$$

С использованием $x_\beta(i)$ принимаются “жесткие” решения относительно оценки символов \hat{a}_i и значений коэффициентов $\hat{\alpha}_p(a_i)$

$$\hat{a}_i = \max_{\beta \in GF(2^m)} (\arg(x_\beta(i))). \quad (4)$$

Апостериорные вероятности кодовых символов a_i задаются выражением [9]

$$\begin{aligned} \Pr(a_i = \beta | \vec{Y}) &= \sum_{\vec{B}: a_i = \beta} \Pr(\vec{B} | \vec{Y}) = \\ &= \sum_{\vec{B}: a_i = \beta} \frac{\Pr(\vec{A})}{p(\vec{Y})} p(\vec{Y} | \vec{B}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Pr(\vec{B} | \vec{Y})$ — условная вероятность кодового слова \vec{B} для реализации \vec{Y} .

Функция правдоподобия $\Pr(\vec{Y} | \vec{B})$ в (5) определяется моделью физического канала, для канала без памяти —

$$p(\vec{Y} | \vec{B}) = \prod_{i=0}^k p(\vec{Y} | a_i).$$

Априорные вероятности сообщений \vec{A} полагаются равными $\Pr(\vec{A}) = 1/2^{mk}$.

Сложность реализации (5), определяемая требуемым объемом вычислительных операций, оценивается соотношением $P_1 \approx 2^{mk}$, и даже для малых значений m, k вычисление (5) представляет трудноразрешимую проблему.

Суть задачи — дать описание разработанного эффективного относительно сложности реализации алгоритма оптимального посимвольного приема с входными и выходными “мягкими” решениями для сигнальных конструкций, соответствующих помехоустойчивым кодам в недвоичных полях $GF(2^m)$, а также привести результаты моделирования разработанного алгоритма приема с целью оценки вероятностных характеристик для ряда сигнальных конструкций, соответствующих кодам с проверкой на четность.

2. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПОСИМВОЛЬНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ

Введем в рассмотрение функции [13]

$$\omega_b(a) = \exp(j\pi(a \times b)d), \quad (6)$$

где a, b, d — элементы поля $GF(2^m)$; $a \times b = [a(x)b(x)]$ — произведение элементов a, b в поле $GF(2^m)$, задаваемого по модулю неприводимого многочлена $\gamma(x)$ степени m ; $ad = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b_i$.

Функции $\omega_b(a)$ принимают значения ± 1 . Полагаем, что элементы b, a определяют номер и аргумент функции $\omega_b(a)$. При фиксированном $b \neq 0$ и для $a_i, i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ произведения $a_i \times b$ принимают все значения поля $GF(2^m)$ и функции $\omega_b(a)$ эквивалентны функциям Уолша $W_b(a)$ с перенесенными значениями номеров и аргументов. Функции Уолша с длительностью 2^m определяются соотношением

$$W_b(a) = \exp(j\pi ab) = \exp \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i b_i \right),$$

где a_i, b_i — двоичное представление чисел a и b . Справедливы условия ортогональности [13]

$$\sum_{a \in GF(2^m)} W_b(a) = \begin{cases} 0, b \neq 0, \\ 2^m, b = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\sum_{a \in GF(2^m)} W_b(a) W_c(a) = \sum_{a \in GF(2^m)} W_{b+c}(a) = \begin{cases} 0, b \neq 0, \\ 2^m, b = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Функции $\omega_b(a)$ также ортогональны в области их определения, их полное множество представляет

ортогональный базис, по которому можно разложить дискретные функции длительностью 2^m в ряд.

Для базисной системы функций Уолша разработаны производительные алгоритмы быстрого спектрального преобразования, которые также могут быть применены к перемеженной базисной системе (6).

Утверждение. Пусть неприводимый многочлен, порождающий поле $GF(2^m)$, имеет вид $\gamma(x) = 1 + x^k + x^m$ ($1 \leq k \leq m - 1$), элемент поля d имеет единичную компоненту на $(k - 1)$ -й позиции ($d_{k-1} = 1$) и нулевые на остальных позициях ($d_i = 0; i \neq k - 1$). В этом случае закон перемежения номеров b, b' для функций $W_b(a) = w_{b'}(a)$ определяется соотношением для компонент b_i, b'_i , $i = 0, 1, \dots, m - 1$

$$b'_i = \begin{cases} b_{k-i-1}, & 0 \leq i \leq k - 1 \\ b_{m+k-i-1}, & k \leq i \leq m - 1 \end{cases}. \quad (9)$$

Для доказательства утверждения представим произведение $[a \times b]$ в виде

$$[a(x) \times b(x)] = \sum_{l=0}^{2(m-1)} [x^l] \sum_{i+v=l} a_i b_v. \quad (10)$$

С использованием соотношения (10) имеем

$$(a \times b)d = \sum_{l=0}^{2(m-1)} T_{k-1}(l) \sum_{i+v=l} a_i b_v, \quad (11)$$

где $T_{k-1}(l)$ – $(k - 1)$ -я компонента многочлена $[x^l]$.

Для значений $0 \leq l \leq m - 1$ выполняется условие $[x^l] = x^l$ и справедливо соотношение $T_{k-1}(l) = \begin{cases} 1, & l = k - 1 \\ 0, & l \neq k - 1 \end{cases}$. В этом случае имеем $v = k - i - 1$. Верхнее соотношение (10) утверждения доказано.

Для значений $m \leq l \leq 2(m - 1)$ имеем

$$[x^l] = [x^{j+m}] = [x^j(1 + x^k)] = [x^j + x^{j+k}], \quad (12) \\ 0 \leq j \leq m - 2.$$

При $j = k - 1$ первое слагаемое в (13) имеет вид $[x^{k-1}]$. Второе слагаемое в (12) имеет подобное составляющее при условии $j = m - 1$, однако в соответствии с предположением $j \leq m - 2$. Поэтому имеем результирующее выражение $v = l - i = m + k - 1 - i$. Нижнее соотношение в (9) доказано.

Алгоритм оптимального посимвольного приема сигналов в поле $GF(2^m)$ включает три этапа [13].

На первом этапе выполняется спектральное преобразование в базисе $\omega_b(a)$ с размерностью 2^m

над последовательностью “мягких” решений $p(y_l | b(l))$

$$C_l(r) = \sum_{b(l) \in GF(2^m)} p(y_l | b(l)) w_{b(l)}(r). \quad (13)$$

Здесь $l = 0, 1, \dots, n - 1$ – номер позиции кодовых символов.

Верным является обратное преобразование

$$p(y_l | b(l)) = \frac{1}{2^m} \sum_{r \in GF(2^m)} C_l(r) w_{b(l)}(r).$$

На втором этапе вычисляется спектральное множество $\{T_l(\lambda)\}$

$$T_l(\lambda) = \sum_{\beta \in GF(2^m)} \Pr(b(l) = \beta | \bar{Y}) w_\beta(\lambda), \quad (14) \\ \lambda \in GF(2^m).$$

Спектральное множество $\{T_l(\lambda)\}$ вычисляется с использованием величин $C_l(r)$ (13) и множества кодовых слов R дуального кода C_H с параметрами $(n, n - k)$

$$T_l(\lambda) = \frac{1}{\sum_{r_p: R \in C_H} \prod_{p=0}^{n-1} C_p(r_p)} \sum_{r_p: R \in C_H} \prod_{p=0}^{n-1} C_p(r_p) \frac{C_l(r_l - \lambda)}{C_l(r_l)}. \quad (15)$$

Сложность вычисления соотношения (14) оценивается приведенным выше значением P_1 , сложность вычисления (15) оценивается как $P_2 \cong 2^{m(n-k)}$, для значений $n - k \ll k$ справедливо условие $P_2 \ll P_1$.

Доказательство соотношения (15) основано на использовании свойств ортогональности (7), (8) для функций $\omega_b(a)$. Запишем (15) в виде

$$T_l(\lambda) = \sum_{\beta \in GF(2^m)} \sum_B \delta(b(l) - \beta) \Pr(b(l) = \beta | \bar{Y}) \exp(j\pi(\lambda \times \beta)d). \quad (16)$$

Здесь $\delta(x) = 1$, если $x = 0$, иначе $\delta(x) = 0$.

Выражение (16) преобразуется к следующему виду:

$$T_l(\lambda) = \frac{1}{2^{m(k+n)}} \frac{1}{p(\bar{Y})} \sum_A \sum_{r_0} \dots \sum_{r_{n-1}} C_0(r_0) \dots C_{n-1}(r_{n-1}) \times \\ \times \prod_{i=0}^{k-1} \exp \left(j\pi \left[a(i) \times \sum_{t=0}^{n-1} g(i, t) \times r_t \right] d + j\pi(\lambda \times a[i] \times g(i, l))d \right). \quad (17)$$

Рассмотрим выражение для $\Pr(B|\vec{Y})$, входящее в состав (17):

$$\Pr(B|\vec{Y}) = \frac{1}{2^{m(k+n)} p(\vec{Y})} \sum_{r_0} \dots \sum_{r_{n-1}} C_0(r_0) \dots C_{n-1}(r_{n-1}) \times \times \prod_{i=0}^{k-1} \exp\left(j\pi \left[a(i) \times \sum_{t=0}^{n-1} g(i,t) \times r_t\right] d\right). \quad (18)$$

Учитывая условие $\sum_B \Pr(B|\vec{Y}) = 1$ и свойство ортогональности (8)

$$\begin{aligned} \sum_A \exp\left(j\pi \left[a(i) \times \sum_{t=0}^{n-1} g(i,t) \times r_t\right] d\right) &= \\ &= 2^m \delta\left(\sum_{t=0}^{n-1} g(i,t) \times r_t\right), \end{aligned} \quad (19)$$

имеем соотношение

$$p(\vec{Y}) = \frac{1}{2^{mn}} \sum_{r_p \in C_H} \prod_{p=0}^{n-1} C_p(r_p).$$

Суммирование в соотношении производится для кодовых слов $R = (r_l; 0 \leq l \leq n-1)$ дуального кода C_H . С использованием (17)–(19) получается результирующее выражение (15) относительно $T_l(\lambda)$.

На третьем этапе вычисляются апостериорные вероятности $\Pr(b(l) = \beta|\vec{Y})$ с использованием обратного спектрального преобразования над $T_l(\lambda)$ (16)

$$\Pr(b(l) = \beta|\vec{Y}) = \sum_{\lambda \in GF(2^m)} T_l(\lambda) \omega_\beta(\lambda). \quad (20)$$

Наиболее простым является рассматриваемый алгоритм посимвольного приема для сигнальных конструкций на основе кодов с проверкой на четность. В этом случае множество кодовых слов R_i дуального кода C_H с параметрами $(k+1, 1)$ содержит 2^m последовательностей кодовых символов одинаковых элементов $\alpha \in GF(2^m)$ длительностью $k+1$ [19].

Для двоичного поля $GF(2)$ множество кодовых слов R дуального кода содержит лишь два кодовых слова с элементами $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Для канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с односторонней спектральной плотностью N_0 и для сигналов длительностью T с двоичной фазовой манипуляцией (ФМ2) условная плотность вероятности $p(y_l|\alpha)$ задается выражением

$$p(y_l|\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0} N/4} \exp\left(-\frac{(y_l - (-1)^\alpha AT/2)^2}{N_0 T/2}\right).$$

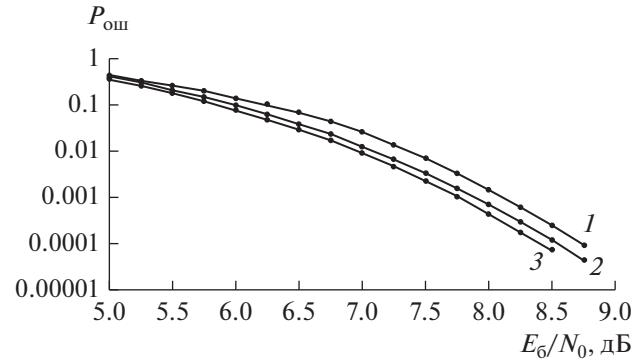


Рис. 1. Зависимости вероятности ошибки $P_{\text{ошиб}}$ от отношения сигнал/помеха при посимвольном приеме сигнальных конструкций на основе сигналов ФМ2 и кода с проверкой на четность в полях $GF(2)$ (кривая 1), $GF(2^3)$ (кривая 2), $GF(2^6)$ (кривая 3).

Подставляя это выражение в соотношения (13), (15) и (20), получаем результирующее выражение для отношения правдоподобия

$$\begin{aligned} x(l) &= \frac{\Pr(b(l) = 0|\vec{Y})}{\Pr(b(l) = 1|\vec{Y})}, \\ x(l) &= \exp(2y_l) \frac{1 + \prod_{p=0, p \neq l}^{n-1} \text{th}(y_p)}{1 - \prod_{p=0, p \neq l}^{n-1} \text{th}(y_p)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Значения $x(l)$ эквивалентны выходным “мягким” решениям, при условии $x(l) \geq 1$ принимается “жесткое” решение $b(l) = 0$, иначе $b(l) = 1$. Здесь $\text{th}(x)$ – функция тангенс гиперболический.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 1 и 2 приведены вероятностные характеристики (вероятности ошибки $P_{\text{ошиб}}$ на кодовое слово в зависимости от отношения сигнал/помеха E_6/N_0 (E_6 – энергия сигналов на информационный бит)) для АБГШ-канала при приеме сигнальных конструкций на основе сигналов ФМ2 и кодов с проверкой на четность в полях $GF(2^3)$, $GF(2^4)$ и $GF(2^6)$, порождающие многочлены которых приведены в таблице [19].

Вероятностные характеристики получены путем моделирования приведенного алгоритма оптимального посимвольного приема с вычислением выходных “мягких” решений при передаче кодовых слов с информационным объемом ≈ 150 битов. При этом число информационных символов, эквива-

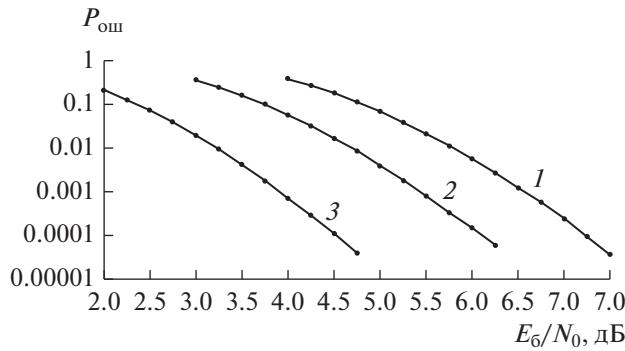


Рис. 2. Зависимости вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ от отношения сигнал/помеха при посимвольном приеме сигнальных конструкций на основе ортогональных функций Уолша и кода с проверкой на четность в поле $GF(2^3)$ (кривая 1), $GF(2^4)$ (кривая 2), $GF(2^6)$ (кривая 3).

лентных элементам полей $GF(2)$, $GF(2^3)$, $GF(2^4)$ и $GF(2^6)$, равно $k = 150, 50, 38$ и 25 соответственно.

При выполнении моделирования производится интервальная оценка вероятности $P_{\text{ош}}$ путем вычисления частоты $w = x/u$, где x – число ошибочных решений в последовательности испытаний u . Требуемое количество вычислительных экспериментов u определяется размером доверительного интервала, вероятностью $P_{\text{ош}}$, доверительной вероятностью $P_{\text{дов}}$ [20]. Например, для значения $P_{\text{ош}} = 10^{-4}$, доверительного интервала $[0.5P_{\text{ош}}, 1.5P_{\text{ош}}]$ и $P_{\text{дов}} = 0.95$ требуемое количество экспериментов оценивается значением 1540000.

На рис. 1 вероятностная кривая 1 соответствует результату моделирования алгоритма посимвольного приема (23) ФМ2 сигналов на основе кода с проверкой на четность в поле $GF(2)$. Вероятностные кривые 2 и 3 получены в результате моделирования алгоритма посимвольного приема (13), (15), (20) сигналов на основе кода с проверкой на четность в поле $GF(2^3)$ и $GF(2^6)$. Видно, что при увеличении объема полей вероятности

Порождающие многочлены $\gamma(x)$ для полей $GF(2^3)$, $GF(2^4)$, $GF(2^6)$

Поле	$\gamma(x)$
$GF(2^3)$	$x^3 + x + 1$
$GF(2^4)$	$x^4 + x + 1$
$GF(2^6)$	$x^4 + x + 1$

ошибки $P_{\text{ош}}$ монотонно уменьшаются для фиксированных значений E_6/N_0 : вероятность $P_{\text{ош}} = 10^{-4}$ достигается при $E_6/N_0 = 8.75$ дБ для поля $GF(2)$, при $E_6/N_0 = 8.5$ дБ для поля $GF(2^3)$ и при $E_6/N_0 = 8.35$ дБ для поля $GF(2^6)$.

На рис. 2 приведены вероятностные кривые, полученные в результате моделирования алгоритма (13), (15), (20) посимвольного приема сигнальных конструкций на основе ортогональных функций Уолша с объемом 8, 16 и 64 и на основе кода с проверкой на четность в полях $GF(2^3)$, $GF(2^4)$ и $GF(2^6)$. В этом случае условная плотность вероятности $p(y_{l0}, y_{l1}, \dots, y_{l(m-1)} | \alpha)$, $\alpha \in GF(2^m)$ определяется выражением

$$p(y_{l0}, y_{l1}, \dots, y_{l(m-1)} | \alpha) = \prod_{p=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} N_0 N/4} \exp\left(-\frac{(y_{lp} - (-1)^{\alpha_p} AT/2)^2}{N_0 T/2}\right),$$

где α_p , $p = 0, 1, \dots, m-1$ – двоичные коэффициенты при представлении соотношением (2) элемента поля α в виде многочлена степени m . Видно, что при увеличении объема ортогональных функций Уолша вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ монотонно уменьшаются для фиксированных значений E_6/N_0 : вероятность $P_{\text{ош}} = 10^{-4}$ достигается при $E_6/N_0 = 7.25$ дБ для поля $GF(2^3)$, при $E_6/N_0 = 6.1$ дБ для поля $GF(2^4)$ и при $E_6/N_0 = 4.5$ дБ для поля $GF(2^6)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено описание алгоритма оптимального посимвольного приема сигнальных конструкций на основе сигнальных “созвездий” и блоковых помехоустойчивых кодов в недвоичных полях $GF(2^m)$, формируемых по модулю неприводимого многочлена степени m . Правило посимвольного приема минимизирует вероятность ошибки на кодовый символ в отличие от известного правила максимального правдоподобия, минимизирующего вероятность ошибки на кодовое слово. При реализации правила посимвольного приема вычисляются апостериорные вероятности кодовых символов, эквивалентные “мягким” решениям, используемым в алгоритмах итеративного приема наиболее эффективных кодовых конструкций, например, блоковых турбокодов, турбоподобных кодов.

Основу разработанного алгоритма посимвольного приема составляет спектральное преобразование в базисе Уолша-Адамара, размерность которого

определяется размерностью поля 2^m . Результирующая сложность разработанного алгоритма посимвольного приема определяется размерностью двоичного кода, что обуславливает перспективность его применения для блоковых помехоустойчивых кодов с высокой кодовой скоростью (с низкой избыточностью).

Исследование вероятностных характеристик рассматриваемого алгоритма посимвольного приема произведено путем его моделирования для сигнальных конструкций на основе “созвездия” ФМ2 сигналов и ортогональных функций Уолша и высокоскоростных кодов с проверкой на четность в полях $GF(2)$, $GF(2^3)$, $GF(2^4)$, $GF(2^6)$. Показано, что при увеличении размерности поля m повышается помехоустойчивость передачи информации по каналу АБГШ, в частности, для вероятности ошибки на кодовое слово $P_{\text{ош}} = 10^{-4}$ энергетический выигрыш достигает 0.4 dB для поля $GF(2^6)$ по отношению к полю $GF(2)$.

Разработка алгоритмов итеративного приема на основе рассмотренного алгоритма оптимального посимвольного приема для эффективных кодовых конструкций, например для блоковых турбокодов, формируемых на основе блоковых кодов в недвоичных полях $GF(2^m)$, представляет перспективное направление исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson S.J. Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes. Cambridge: Univ. Press, 2010.
2. Бакулин М.Г., Крейндельин В.Б., Панкратов Д.Ю. Технологии в системах радиосвязи на пути к 5G. М.: Горячая линия-Телеком, 2018.
3. Ping Li, Chan S., Yeng K.L. // Electronic Lett. 1997. V. 33. № 19. P. 1614.
4. Назаров Л.Е., Головкин И.В. // Журн. радиоэлектроники. 2011. № 1. <http://jre.cplire.ru/jan11/3/text.pdf>.
5. Назаров Л.Е., Батанов В.В., Кузнецов О.О. // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 9. <http://jre.cplire.ru/jre/sep14/1/text.pdf>.
6. Li J., Narayanan R., Kurtas E., Georghiades C.N. // IEEE Trans. 2002. V. COM-50. № 5. P. 723.
7. Farhadi G., Jamali S.H. // IEEE Trans. 2006. V. COM-54. № 9. P. 1643.
8. Волков Л.Н., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи. Базовые методы и характеристики. М.: Эко-Трендз, 2005.
9. Bahl L.R., Cocke J., Jelinek F., Raviv J. // IEEE Trans. 1974. V. IT-20. № 3. P. 284.
10. Назаров Л.Е. // РЭ. 2002. Т. 47. № 12. С. 1474.
11. Kaipa K. // IEEE Commun. Lett. 2018. V. 22. № 11. P. 2210.
12. Ben-Haim X., Litsyn S.A. // Adv. Mathem. Commun. 2007. V. 1. № 1. P. 83.
13. Смольянинов В.М., Назаров Л.Е. // РЭ. 1999. Т. 44. № 7. С. 838.
14. Назаров Л.Е., Шишкун П.В. // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 12. <http://jre.cplire.ru/jre/dec18/10/text.pdf>.
15. Lin S.-J. // IEEE Trans. 2018. V. COM-66. № 8. P. 3235.
16. Steiner F., Bocherer G., Liva G. // IEEE Commun. Lett. 2018. V. 22. № 11. P. 2210.
17. Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные сети передачи. М.: Техносфера, 2005.
18. Yeo S., Park I.-C. // IEEE Trans. 2018. V. IT-64. № 7. P. 5170.
19. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976.
20. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М.: Гостехиздат, 1955.