РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 1, с. 75–89

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.2

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ НАВИГАЦИОННЫХ cosGBOC-СИГНАЛОВ КАК ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ

© 2020 г. М. С. Ярлыков[a], *, С. М. Ярлыкова[b], **

[a]*Редакция журнала "Радиотехника и электроника", ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

[b]*Институт кибернетики Российского технологического университета МИРЭА, просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация*

**E-mail: red@cplire.ru*

***E-mail: yarlykova@mirea.ru*

Поступила в редакцию 27.03.2019 г.
После доработки 27.03.2019 г.
Принята к публикации 08.04.2019 г.

Рассмотрены модулирующие функции (МФ) cosGBOC-сигналов (косинусных обобщенных BOC-сигналов) для нового поколения спутниковых радионавигационных систем, таких как Galileo (ЕС), GPS (США), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай). На основе обратного преобразования Фурье (ПФ) энергетических спектров получены аналитические выражения и построены графики корреляционных функций (КФ) одиночных элементов МФ cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_{\Pi} = 2$ и 4 для различных значений коэффициента заполнения ρ, где $\rho \in [0, 1]$. При вычислении КФ в основу методики положено представление энергетического спектра в виде взвешенной алгебраической суммы косинусов углов, определяемых характерными точками косинусного символа МФ (точками излома КФ) cosGBOC-сигналов. В ряде случаев вычисление КФ cosGBOC-сигналов путем обратного ПФ энергетических спектров оказывается более предпочтительным (в частности, по трудоемкости) при сравнении со способом получения КФ на основе ее общего определения.

DOI: 10.31857/S0033849420010088

ВВЕДЕНИЕ

Рост числа потребителей спутниковых радионавигационных систем (СРНС), таких как Galileo (ЕС), GPS (США), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай) при одновременном ужесточении требований, предъявляемых к многорежимности и качеству их функционирования, обусловливают возрастающую потребность в разработке и применении различных разновидностей и обобщений BOC-сигналов (binary offset carrier modulated signals) [1–4].

В связи с этим применительно к перспективным глобальным СРНС следует отметить исследование и разработку обобщенных (Generalized) BOC-сигналов (GBOC) [5–10].

Основное отличие GBOC-сигналов от BOC-сигналов заключается в том, что у обобщенных BOC-сигналов поднесущее колебание (ПК) представляет собой прямоугольный сигнал, т.е. периодическую биполярную последовательность прямоугольных видеоимпульсов, с произвольным значением коэффициента заполнения ρ, где $\rho \in [0, 1]$. Такое ПК навигационных GBOC-сигналов называется прямоугольным ПК (ППК) [7–9]. Иначе говоря, GBOC-сигналы – это шумоподобные сигналы с ППК, а BOC-сигналы – это шумоподобные сигналы с меандровым ПК (МПК).

Когда у ППК коэффициент заполнения $\rho = 0.5$, то в этом важном частном случае оно представляет собой МПК, а сами GBOC-сигналы при этом являются традиционными BOC-сигналами [1–4]. В другом частном случае, когда $\rho = 0$ или $\rho = 1$, GBOC-сигналы вырождаются в двоичные фазоманипулированные сигналы (binary phase shift keying signals – BPSK-сигналы) [11]. Этот случай является вырожденным, поскольку при этом утрачивается зависимость сигналов от значения коэффициента кратности импульсов прямоугольного ПК N_{Π} [7]. Возможность изменять у GBOC-сигналов значение коэффициента заполнения ρ в пределах от 0 до 1, позволяет варьировать в широких пределах форму и параметры корреляционных функций (КФ) и энергетических спектров таких сигналов. Это обстоятельство обусловливает преимущества (в частности, по электромагнитной совместимости) применения GBOC-сигналов по сравнению с BOC-сигналами или BPSK-сигналами в перспективных СРНС.

Использование GBOC-сигналов, как вариант, обсуждается в китайской СРНС BeiDou на третьей фазе ее развития. При этом рассматриваются следующие значения параметров таких GBOC-сигналов: несущая частота GBOC-сигнала $f_{\text{Н}} = 1561.098$ МГц, тип модуляции GBOC(2, 2, ρ), коэффициент заполнения $\rho = 0.3$, частота следования символов псевдослучайной последовательности (ПСП) дальномерного кода $f_{\text{С}} = 2.046$ МГц, частота ППК $f_{\text{П}} = 2.046$ МГц, базовая (опорная) частота $f_{\text{ОП}} = 1.023$ МГц [5, 6].

Свойства и возможности GBOC-сигналов во многом определяются их корреляционными характеристиками. Знание аналитических выражений и графиков КФ позволяет в принципе количественно рассчитать для приемников СРНС потенциальные характеристики точности слежения за ПСП дальномерного кода и оценить разрешающую способность сигналов в условиях многолучевости и при действии помех. Располагая формулами КФ GBOC-сигналов, удается разрабатывать дискриминаторы приемников, близкие к оптимальным, которые обеспечивали бы, по возможности, однозначное слежение за основным пиком КФ и минимизировали бы вероятность захвата ее боковых (ложных) пиков.

Получение явных формул КФ GBOC-сигналов (особенно при больших значениях коэффициента кратности импульсов $N_{\text{П}}$) представляет собой довольно трудоемкую задачу [8, 10].

В ряде случаев аналитические выражения КФ GBOC-сигналов (аналогично BOC-сигналам [12]) предпочтительнее получать как обратное преобразование Фурье (ПФ) их энергетических спектров. Кроме того, вычисление КФ GBOC-сигналов другим методом (на основе энергетических спектров, а не прямым методом, используя общее определение КФ) позволяет дополнительно подтвердить правильность полученных формул КФ.

Как известно, GBOC-сигналы (аналогично BOC-сигналам) в зависимости от относительного сдвига по времени между ПСП дальномерного кода и ППК делятся на sinGBOC-сигналы (синусные обобщенные BOC-сигналы) и cosGBOC-сигналы (косинусные обобщенные BOC-сигналы) [5–10].

Аналитические выражения КФ sinGBOC-сигналов как обратное ПФ энергетических спектров получены в [13], где предложена методика расчета КФ одиночных элементов МФ таких сигналов. В основе методики лежит представление энергетического спектра sinGBOC-сигналов в виде взвешенной алгебраической суммы косинусов углов, определяемых характерными точками синусного символа МФ $\mu_{\sin\text{GBOC}}(t)$ sinGBOC-сигнала (т.е. точками излома КФ $R_{\sin\text{GBOC}}(\tau,\rho)$).

В данной статье рассматриваются cosGBOC-сигналы.

Цель работы – на основе обратного ПФ энергетических спектров в соответствии с методикой [13] получить аналитические выражения КФ одиночных элементов МФ cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_{\text{П}} = 2$ и 4 при различных значениях коэффициента заполнения ρ, где $\rho \in [0, 1]$.

Рассматриваемые ПСП дальномерного кода и косинусные ППК имеют единичные амплитуды, поэтому полученные выражения характеризуют нормированные КФ.

Термин типа "одиночный элемент МФ cosGBOC-сигнала" означает, что рассматривается математическое выражение, описывающее один элемент МФ cosGBOC-сигнала.

1. СТРУКТУРА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧАЕМЫХ cosGBOC-СИГНАЛОВ

Навигационный cosGBOC-сигнал $s(t)$, излучаемый бортовым передатчиком какого-либо одного спутника из состава орбитальной группировки СРНС, имеет известный вид [2, 4, 7, 10]:

$$s(t - t_0) = A\, d_{\cos\text{GBOC}}(t - t_0)\cos[\omega_{\text{Н}}(t - t_0) + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $A = \sqrt{2P_{\text{ср}}}$ – амплитуда cosGBOC-сигнала на выходе передатчика; $P_{\text{ср}}$ – средняя мощность cosGBOC-сигнала на выходе передатчика; $d_{\cos\text{GBOC}}(t)$ – МФ cosGBOC-сигнала, $\omega_{\text{Н}} = 2\pi f_{\text{Н}}$ – круговая несущая частота радиосигнала; $f_{\text{Н}}$ – несущая частота cosGBOC-сигнала; $\varphi(t)$ – фаза радиосигнала; t_0 – начало отсчета.

Вся сложность и специфика cosGBOC-сигналов $s(t)$, как видно из (1), полностью определяется структурой и характеристиками МФ $d_{\cos\text{GBOC}}(t)$. Свойства и структура МФ $d_{\cos\text{GBOC}}(t)$, а также ее статистические характеристики в случаях cosGBOC-сигналов достаточно детально обсуждаются в [9, 10].

Далее для краткости, когда это не влияет на суть изложения, полагаем, что МФ $d_{\cos\text{GBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала $s(t)$ обусловлена собственно ПСП дальномерного кода и косинусным ППК. В

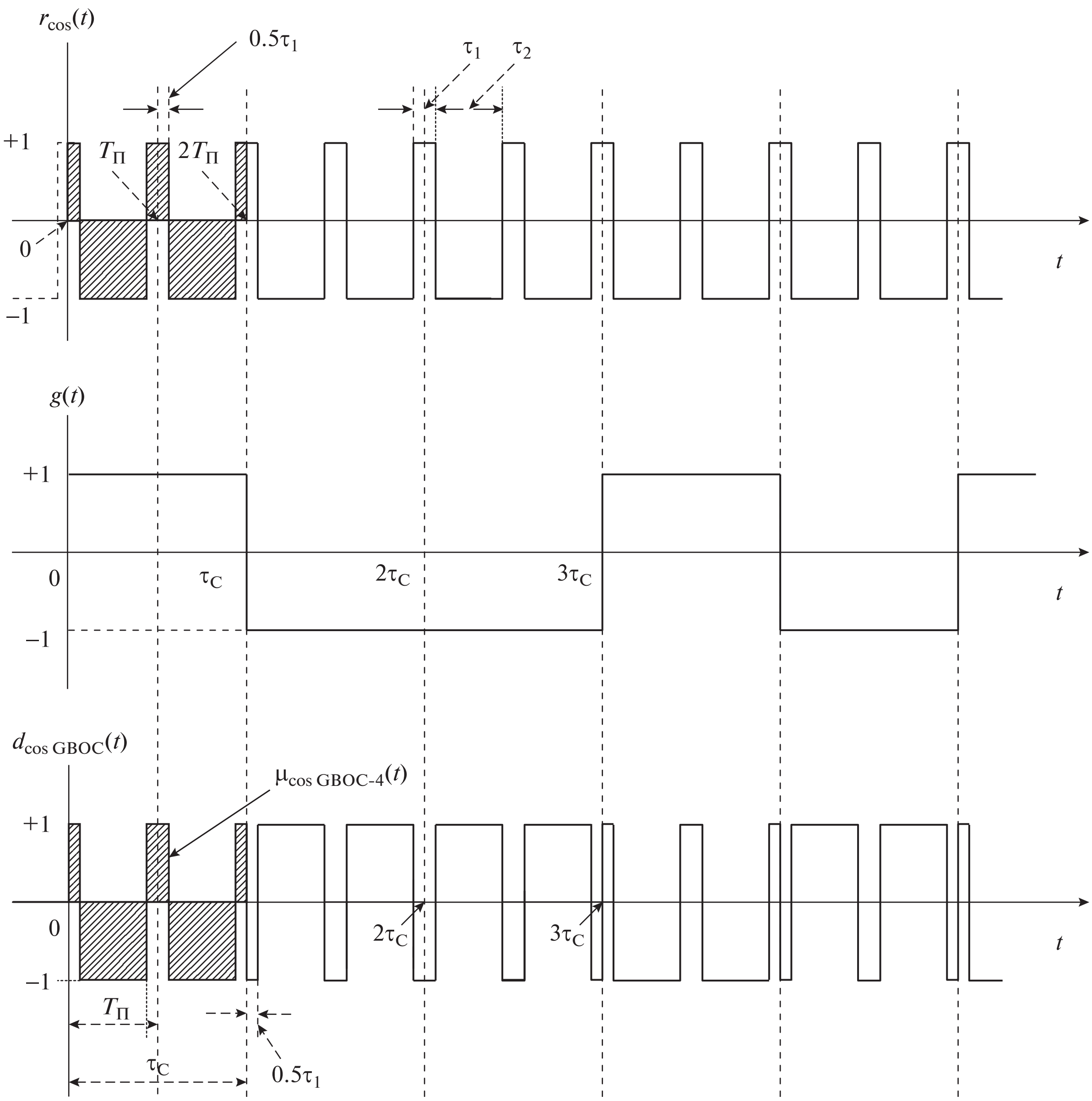

Рис. 1. Формирование модулирующей функции cosGBOC-сигнала при $\rho = 0.25$ и $N_П = 4$.

таком случае МФ $d_{\cos\,GBOC}(t)$ cosGBOC-сигнала $s(t)$ записывается в виде [9, 10]

$$d_{\cos\,GBOC}(t - t_0) = g(t - t_0)\, r_{\cos}(t - t_0), \tag{2}$$

где $g(t - t_0)$ – собственно ПСП дальномерного кода; $r_{\cos}(t - t_0)$ – косинусное ППК, отражающее специфику cosGBOC-сигналов $s(t)$.

Входящие в соотношение (2) ПСП $g(t)$ (для произвольно заданной реализации) и косинусное ППК $r_{\cos}(t)$ представлены на рис. 1, где введены следующие обозначения: τ_C – длительность элемента ПСП $g(t)$; $T_П$ – длительность периода косинусного ППК $r_{\cos}(t)$; τ_1 и τ_2 – длительности положительного и отрицательного импульсов косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ соответственно.

Длительность периода $T_П$ косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ (см. рис. 1) равна

$$T_П = 0.5\tau_1 + \tau_2 + 0.5\tau_1 = \tau_1 + \tau_2. \tag{3}$$

Частота косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ с учетом (3) характеризуется выражением

$$f_П = \frac{1}{T_П} = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}, \tag{4}$$

где $f_П$ – частота косинусного ППК $r_{\cos}(t)$.

Важный параметр косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ (и, соответственно, cosGBOC-сигналов $s(t)$), каким является коэффициент заполнения прямоугольного сигнала ρ, определяется как [6, 9, 10]

$$\rho \triangleq \frac{\tau_1}{T_\Pi}, \tag{5}$$

где $\rho \in [0, 1]$.

На рис. 1 коэффициент заполнения косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ в качестве примера принят равным $\rho = 0.25$, а начало отсчета $t_0 = 0$.

Согласно (3) и (5) имеем, что для коэффициента заполнения ρ выполняются следующие соотношения (см. рис. 1):

$$\tau_1 = \rho T_\Pi, \quad \tau_2 = (1-\rho)T_\Pi. \tag{6}$$

Частным случаем косинусного ППК $r_{\cos}(t)$, когда коэффициент заполнения $\rho = 0.5$, является меандровый сигнал, у которого длительности положительного и отрицательного импульсов равны, т.е.

$$\tau_1 = \tau_2 \triangleq \tau_\mathrm{M}, \tag{7}$$

где τ_M – длительность меандрового импульса. При этом длительность периода ПК равна $T_\Pi \triangleq T_\mathrm{M} = 2\tau_\mathrm{M}$, где T_M – период МПК [4].

Таким образом, если коэффициент заполнения $\rho = 0.5$, то косинусное ППК $r_{\cos}(t)$ представляет собой косинусное МПК, а cosGBOC-сигнал $s(t)$ является традиционным cosBOC-сигналом.

Соотношение для ПСП дальномерного кода $g(t)$, описывающее ее один период, имеет известный вид [4, 9, 11]:

$$g(t-t_0) = \sum_{k=0}^{L-1} \nu_k \mathrm{rect}_{\tau_\mathrm{C}}[t - k\tau_\mathrm{C} - t_0], \tag{8}$$

где L – коэффициент расширения спектра, т.е. число элементов на периоде ПСП $g(t)$; τ_C – длительность элемента ПСП $g(t)$; $k = 0, 1, 2, \ldots, (L-1)$ – номер элемента ПСП на периоде; t_0 – начало отсчета.

Функция $\mathrm{rect}_{\tau_\mathrm{C}}[\cdot]$ в (8) представляет собой импульс единичной амплитуды длительностью τ_C:

$$\mathrm{rect}_{\tau_\mathrm{C}}[t - k\tau_\mathrm{C}] = \begin{cases} 1 & \text{при } k\tau_\mathrm{C} \le t < (k+1)\tau_\mathrm{C}, \\ 0 & \text{при } k\tau_\mathrm{C} > t \ge (k+1)\tau_\mathrm{C}, \end{cases} \tag{9}$$

где $k = 0, 1, 2, \cdots, (L-1)$.

Кодовые коэффициенты $\nu_k = \nu(t_k)$, где $t_k = k\tau_\mathrm{C}$ – дискретное время, формируют ПСП дальномерного кода $g(t)$ (8). Они принимают на каждом элементе ПСП длительностью τ_C значения +1 или –1 согласно определяемому кодом закону чередования элементов на периоде. Длительность периода ПСП $g(t)$ (8) равна

$$T_L = L\tau_\mathrm{C}. \tag{10}$$

Например, в СРНС типа ГЛОНАСС дальномерный код стандартной точности представляет собой периодическую последовательность максимальной длины (М-последовательность, или последовательность Хаффмена) с периодом $T_L = 1$ мс и частотой следования символов $f_\mathrm{C} = 511$ кГц.

В СРНС типа GPS дальномерный C/A код является периодической последовательностью Голда с периодом $T_L = 1$ мс и частотой следования символов $f_\mathrm{C} = 1.023$ МГц [14, 15].

Для сравнения различных типов модуляции cosGBOC-сигналов (по аналогии с cosBOC-сигналами) используется следующее обозначение: cosGBOC(f_Π, f_C, ρ) [4–7]. Поскольку у СРНС частоты f_Π и f_C, как правило, кратны базовой (опорной) частоте $f_{\mathrm{О}\Pi}$ (в частности, для систем GPS и Galileo $f_{\mathrm{О}\Pi} = 1.023$ МГц), то обычно применяется несколько иная форма записи для обозначения типа модуляции cosGBOC-сигналов: cosGBOC(α, β, ρ), где $\alpha = f_\Pi/f_{\mathrm{О}\Pi}$ и $\beta = f_\mathrm{C}/f_{\mathrm{О}\Pi}$.

В качестве еще одного показателя cosGBOC-сигналов $s(t)$ используется либо коэффициент кратности импульсов N_Π косинусного ППК $r_{\cos}(t)$, либо эквивалентный ему параметр $Q_\text{п}$ – коэффициент кратности периодов косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ [7–10].

Коэффициент кратности импульсов N_Π представляет собой число прямоугольных импульсов (положительных длительностью τ_1 и отрицательных длительностью τ_2) косинусного ППК $r_{\cos}(t)$, которые укладываются на длительности τ_C одного элемента ПСП $g(t)$ (см. рис. 1):

$$N_\Pi = \frac{2\tau_\mathrm{C}}{T_\Pi} = \frac{2f_\Pi}{f_\mathrm{C}} = \frac{2\alpha}{\beta}, \tag{11}$$

где N_Π – положительное четное число ($N_\Pi = 2, 4, 6, \ldots$).

Следует отметить, что в случае cosGBOC-сигналов при определении коэффициента кратности импульсов N_Π первый и последний импульсы длительностью $0.5\tau_1$ каждый, укладывающиеся на длительности τ_C одного элемента ПСП $g(t)$ (см. (3) и рис. 1), рассматриваются как половины одного импульса и при подсчете учитываются как один импульс длительностью τ_1. На рис. 1 график МФ $d_{\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ в качестве примера характеризует cosGBOC-сигналы с коэффициентом кратности импульсов $N_\Pi = 4$.

Коэффициент кратности периодов $Q_П$ представляет собой число периодов длительностью $T_П$ косинусного ППК $r_{\cos}(t)$, которые укладываются на длительности $\tau_С$ одного элемента ПСП $g(t)$ (см. рис. 1):

$$Q_П = \frac{1}{2}N_П = \frac{\tau_С}{T_П} = \frac{f_П}{f_С} = \frac{\alpha}{\beta},$$

где $Q_П = 1, 2, 3, ...$

В частном случае косинусного ППК $r_{\cos}(t)$, когда коэффициент заполнения $\rho = 0.5$, т.е. в случае cosBOC-сигналов, коэффициент кратности импульсов $N_П$ представляет собой используемый при рассмотрении cosBOC-сигналов параметр $N_М$ – коэффициент кратности меандровых импульсов:

$$N_М = \frac{\tau_С}{\tau_М} = \frac{2f_М}{f_С} = \frac{2\alpha}{\beta},$$

где $\tau_М$ – длительность меандрового импульса МПК, характеризуемая (7).

2. ОДИНОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МОДУЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ cosGBOC-СИГНАЛОВ

При сравнительной оценке свойств и возможностей cosGBOC-сигналов с cosBOC-сигналами и BPSK-сигналами многое определяется КФ и энергетическими спектрами одиночных элементов МФ этих сигналов.

Согласно (2) и (8) произвольный k-й элемент МФ $d_{\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ cosGBOC-сигналов (по аналогии с cosBOC-сигналами) имеет вид [4, 9, 10]

$$d_{\tau_С\text{-}\cos\mathrm{GBOC}}(t) = \nu_k \mu_{\mathrm{cosGBOC}}(t), \quad (12)$$

где $d_{\tau_С\text{-}\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ – одиночный элемент МФ $d_{\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала; $\mu_{\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ – одиночный косинусный символ МФ $d_{\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала; $\nu_k = \nu(t_k)$ – кодовый коэффициент k-го элемента ПСП дальномерного кода $g(t)$, характеризуемой (8); $t_k = k\tau_С$ – дискретное время ($k = 0, 1, 2, \cdots$).

В формуле (12) и далее для простоты принято, что начало отсчета $t_0 = 0$. Индекс $\tau_С$ у обозначения $d_{\tau_С\text{-}\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ отражает тот факт, что рассматривается одиночный элемент МФ $d_{\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ длительностью $\tau_С$. (Далее в выражениях типа “одиночный элемент“ или “одиночный символ“ слово “одиночный”, где это не вызывает сомнений, для краткости опускаем.)

В соответствии с (12) элемент МФ $d_{\tau_С\text{-}\cos\mathrm{GBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала $s(t)$ (1) представляет собой символ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}}(t)$, взятый со знаком “+” или “–” в зависимости от значения кодового коэффициента ν_k k-го элемента ПСП $g(t)$.

Косинусный символ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_П}(t)$, учитывая (2), (8) и (11), при различных значениях коэффициента кратности импульсов $N_П$ может быть записан в следующем виде [9, 10]:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_П}(t) = \sum_{m=0}^{0.5N_П-1} \big\{&\mathrm{rect}_{0.5\tau_1}[t - mT_П] - \\ &- \mathrm{rect}_{\tau_2}[t - mT_П - 0.5\tau_1] + \\ &+ \mathrm{rect}_{0.5\tau_1}[t - mT_П - 0.5\tau_1 - \tau_2]\big\},\end{aligned} \quad (13)$$

где $N_П = 2, 4, 6, ...$

В формуле (13) и далее индекс $N_П$ в обозначениях типа $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_П}(t)$ указывает значение коэффициента кратности импульсов $N_П$.

Как видно из (13) и рис. 1, косинусный символ МФ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_П}(t)$ представляет собой отрезок длительностью τ_C косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ при определенном значении коэффициента заполнения ρ. Длительность $\tau_С$ косинусного символа $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_П}(t)$ в соответствии с (11) равна

$$\tau_С = 0.5N_П T_П. \quad (14)$$

Косинусный символ МФ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-4}(t)$ на рис. 1 заштрихован.

В частном случае cosGBOC-сигналов, когда коэффициент заполнения $\rho = 0.5$, т.е. рассматриваются cosBOC-сигналы, формула (13) с учетом того, что $\tau_1 = \tau_2 = \tau_М$ и $N_П = N_М$, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{cosBOC}-N_М}(t) = &\,\mathrm{rect}_{0.5\tau_М}[t] + \\ &+ \sum_{m=1}^{N_М-1} (-1)^m \mathrm{rect}_{\tau_М}[t - (m - 0.5)\tau_М] + \\ &+ \mathrm{rect}_{0.5\tau_М}[t - (N_М - 0.5)\tau_М],\end{aligned} \quad (15)$$

где $N_М = 2, 4, 6,...$

Видно, что формула (15) совпадает, например, с выражением из работы [4, (2.2)] (при четном $N_М$).

На рис. 2 в соответствии с формулой (13) представлены графики косинусных символов МФ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_П}(t)$ при $\rho = 0.25$ применительно к двум типам МФ cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_П = 2$ и 4 для одной и той же длительности $\tau_С$ элемента ПСП $g(t)$.

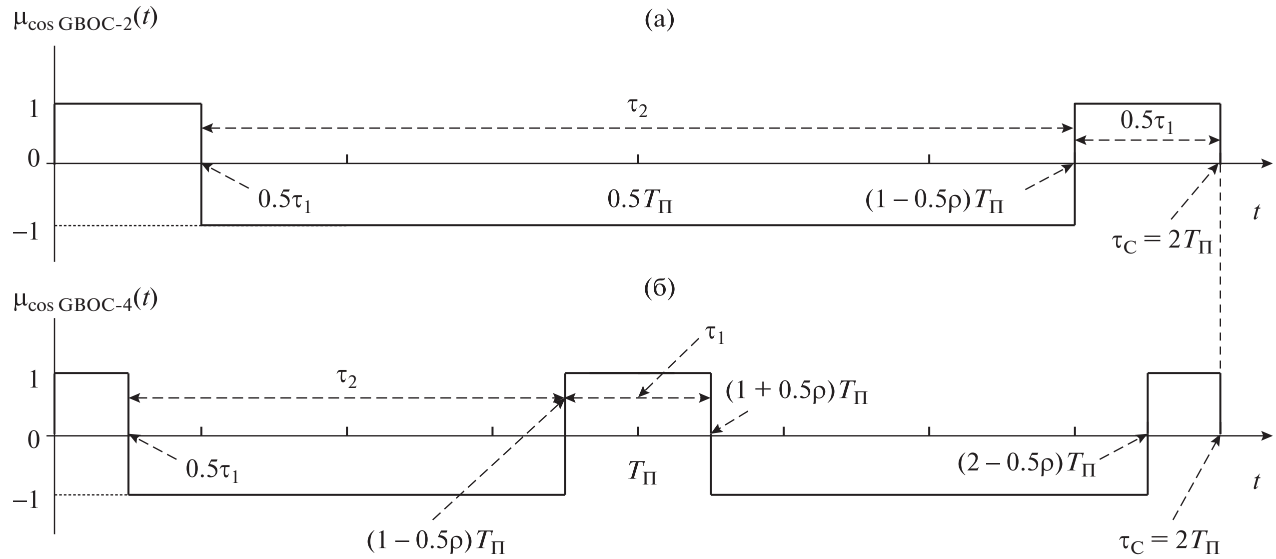

Рис. 2. Косинусные символы модулирующей функции cosGBOC-сигналов при $\rho = 0.25$, $N_\Pi = 2$ (а) и $N_\Pi = 4$ (б).

График на рис. 2а соответствует случаю $N_\Pi = 2$ и представляет косинусный символ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-2}(t)$, который согласно (13) определяется соотношением

$$\mu_{\mathrm{cosGBOC}-2}(t) = \mathrm{rect}_{0.5\tau_1}[t] - \mathrm{rect}_{\tau_2}[t - 0.5\tau_1] + \\ + \mathrm{rect}_{0.5\tau_1}[t - 0.5\tau_1 - \tau_2]. \quad (16)$$

Косинусный символ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-2}(t)$ характеризует cosGBOC-сигналы с модуляцией, например, типа cosGBOC(1, 1, ρ) или cosGBOC(2, 2, ρ).

График на рис. 2б соответствует случаю $N_\Pi = 4$ и представляет косинусный символ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-4}(t)$, который в соответствии с (13)) характеризуется формулой

$$\mu_{\mathrm{cosGBOC}-4}(t) = \mathrm{rect}_{0.5\tau_1}[t] - \mathrm{rect}_{\tau_2}[t - 0.5\tau_1] + \\ + \mathrm{rect}_{\tau_1}[t - 0.5\tau_1 - \tau_2] - \mathrm{rect}_{\tau_2}[t - T_\Pi - 0.5\tau_1] + \quad (17) \\ + \mathrm{rect}_{0.5\tau_1}[t - T_\Pi - 0.5\tau_1 - \tau_2].$$

Косинусный символ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-4}(t)$ определяет cosGBOC-сигналы с модуляцией, например, типа cosGBOC(10, 5, ρ).

Из рассмотрения формулы (13) и рис. 2б видно, что в формировании косинусных символов $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_\Pi}(t)$ при $N_\Pi \geq 4$ используются импульсы (в зависимости от их длительности) трех видов:

– положительные импульсы длительностью $0.5\tau_1$,

– положительные импульсы длительностью τ_1,

– отрицательные импульсы длительностью τ_2.

Отметим, что при $N_\Pi = 2$ структура косинусного символа $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-2}(t)$ по сравнению с общим случаем упрощается и в ней положительные импульсы длительностью τ_1 не используются.

Если у cosGBOC-сигналов коэффициент заполнения ρ варьировать в пределах от 0 до 1, то тогда при определенных значениях ρ соотношения между длительностями этих трех видов импульсов косинусных символов $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_\Pi}(t)$ изменяются на противоположные (см. (3) и (6)).

По этой причине, согласно (13), с учетом (3) и (6) в зависимости от значения коэффициента заполнения ρ, где $\rho \in [0, 1]$, при $N_\Pi = 4, 6, 8,...$ возможен один из следующих трех вариантов формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ cosGBOC-сигналов [9, 10]:

$$\text{1-й вариант: } \tau_1 \leq \tau_2, \text{ т.е. } \rho \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \quad (18)$$

$$\text{2-й вариант: } 0.5\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_1, \text{ т.е. } \rho \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]; \quad (19)$$

$$\text{3-й вариант: } 0.5\tau_1 \geq \tau_2, \text{ т.е. } \rho \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \quad (20)$$

Как отмечали [9, 10], для cosGBOC-сигналов при $N_\Pi = 2$ в структуре косинусного символа $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-2}(t)$ положительные импульсы длительностью τ_1 не используются, поэтому в таком случае имеют место лишь два варианта формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ при $\rho \in [0, 1]$:

$$\text{1-й вариант: } 0.5\tau_1 \leq \tau_2, \text{ т.е. } \rho \in \left[0, \frac{2}{3}\right]; \quad (21)$$

$$\text{2-й вариант: } 0.5\tau_1 \geq \tau_2, \text{ т.е. } \rho \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \quad (22)$$

Каждому варианту формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ cosGBOC-сигналов соответствует свое аналитическое выражение КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}-N_{\Pi}}(\tau,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигналов [10].

3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПО РАСЧЕТУ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДИНОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МОДУЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ cosGBOC-СИГНАЛОВ

При вычислении КФ cosGBOC-сигналов на основе обратного преобразования Фурье энергетического спектра основные соотношения по расчету статистических характеристик (корреляционных и спектральных) по существу во многом подобны случаю sinGBOC-сигналов [13].

Спектральная плотность (спектральная функция) $G_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала представляет собой прямое ПФ от этого элемента МФ [9, 13, 16, 17]:

$$G_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho) \triangleq \mathrm{FT}\left\{d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)\exp\{-i\omega t\}dt, \quad t_0 = 0, \tag{23}$$

где $\mathrm{FT}\{\cdot\}$ – символ прямого ПФ.

Энергетический спектр (спектральная плотность мощности) $S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала характеризуется соотношением [9, 13, 16, 17]

$$S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho) \triangleq \frac{1}{\tau_C}\times \left[G_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)G^{*}_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)\right], \tag{24}$$

где $G^{*}_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)$ – комплексно-сопряженная спектральная плотность от $G_{\mathrm{GBOC}}(\omega,\rho)$.

В соответствии с определением КФ для одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала, характеризуемого (12) и (13), можно записать [16, 17]

$$R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho) \triangleq \frac{1}{\tau_C}\times \int\limits_{0}^{\tau_C} d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t-\tau)dt, \tag{25}$$

где $R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)$ – КФ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала; $\tau_C = 1/f_C$ – длительность элемента ПСП $g(t)$; $|\tau| \le \tau_C$.

Согласно общему положению статистической радиотехники, КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)$ и соответствующий энергетический спектр $S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигнала представляют собой пару ПФ (оригиналы и изображения) [16, 17].

В соответствии с этим выполняются следующие соотношения:

$$R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho) = \mathrm{FT}^{-1}\{S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)\exp\{i\omega\tau\}d\omega. \tag{26}$$

$$S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho) = \mathrm{FT}\{R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)\exp\{-i\omega\tau\}d\tau, \tag{27}$$

где $\mathrm{FT}^{-1}\{\cdot\}$ – символ обратного ПФ.

Учитывая, что КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)$ и энергетический спектр $S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)$ представляют собой четные функции своих аргументов, формулы (26) и (27) принимают вид

$$R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho) = \mathrm{FT}^{-1}\{S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)\cos\omega\tau d\omega, \tag{28}$$

$$S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho) = \mathrm{FT}\{R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)\} = 2\int\limits_{0}^{\infty} R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)\cos\omega\tau d\tau. \tag{29}$$

В статье [13] предложена методика расчета КФ $R_{\mathrm{sinGBOC}}(\tau,\rho)$ одиночных элементов МФ $d_{\tau_C\text{-sinGBOC}}(t)$ sinGBOC-сигналов на основе обратного ПФ их энергетического спектра $S_{\mathrm{sinGBOC}}(\omega,\rho)$. Распространим эту методику на cosGBOC-сигналы.

Суть методики, позволяющей получить аналитические выражения КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигналов как обратное ПФ энергетического спектра $S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)$, состоит в том, что он представляется в виде взвешенной алгебраической суммы косинусов углов, определяемых характерными точками (точками излома КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)$) косинусного символа МФ $\mu_{\mathrm{cosGBOC}-N_{\Pi}}(t)$ (13). При таком представлении энергетического спектра $S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)$ последующее вычисление оригиналов по изображениям затруднений не вызывает. Пары ПФ (оригиналы и изображения), которые необходимы для получения аналитических выражений КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)$, представлены в табл. 1 [4, 12, 17].

Таблица 1. Пары преобразований Фурье

Оригинал	Изображение
$R(\tau) = \mathrm{FT}^{-1}\{S(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\exp\{i\omega\tau\}d\omega$	$S(\omega) = \mathrm{FT}\{R(\tau)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\exp\{-i\omega\tau\}d\tau$
$\frac{1}{2}[\delta(\tau+T)+\delta(\tau-T)]$	$\cos\omega T$
$\mathrm{sign}(\tau)$	$\frac{2}{i\omega}$
τ^n	$i^n 2\pi\delta^{(n)}(\omega)$
τ	$i2\pi\delta^{(1)}(\omega)$
$\tau\,\mathrm{sign}(\tau)$	$-\frac{2}{\omega^2}$
$-\frac{1}{2}\tau\,\mathrm{sign}(\tau)$	$\frac{1}{\omega^2}$
$-\frac{1}{4}(\tau+bT)\,\mathrm{sign}(\tau+bT)-\frac{1}{4}(\tau-bT)\,\mathrm{sign}(\tau-bT)$	$\frac{1}{\omega^2}\cos b\omega T$

Примечание: $\delta^{(n)}(\omega)$ – n-я производная дельта-функции Дирака $\delta(\omega)$, $\delta^{(1)}(\omega)$ – 1-я производная дельта-функции Дирака $\delta(\omega)$,
$\mathrm{sign}\,z = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad z > 0; \\ 0 & \text{при} \quad z = 0; \\ -1 & \text{при} \quad z < 0. \end{cases}$ – функция “сигнум”.

Далее получим аналитические выражения КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)$ одиночных элементов МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигналов на основе формулы (28) как обратное ПФ энергетических спектров $S_{\mathrm{cosGBOC}}(\omega,\rho)$ при коэффициенте кратности импульсов $N_\Pi = 2$ и 4 для различных значений коэффициента заполнения ρ, где $\rho \in [0,\,1]$.

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ОДИНОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МОДУЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ cosGBOC-СИГНАЛОВ

Применительно к cosGBOC-сигналам энергетический спектр $S_{\mathrm{cosGBOC}}(f,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$, характеризуемого (12) и (13), при произвольном значении коэффициента кратности импульсов N_Π определяется следующей формулой [9]:

$$S_{\mathrm{cosGBOC}-N_\Pi}(f,\rho) = \frac{1}{f_C}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi f}{f_C}\right)}{\left(\frac{\pi f}{f_C}\right)^2\sin^2\left(\frac{2\pi f}{N_\Pi f_C}\right)}\times$$
$$\times\left[2\sin\left(\rho\frac{\pi f}{N_\Pi f_C}\right)\cos\left((2-\rho)\frac{\pi f}{N_\Pi f_C}\right)-\right.$$
$$\left.-\sin\left((1-\rho)\frac{2\pi f}{N_\Pi f_C}\right)\right]^2, \tag{30}$$

где f_C – частота следования символов ПСП $g(t)$ (8); $N_\Pi = 2, 4, 6,...$ – коэффициент кратности импульсов, характеризуемый (11); $\rho \in [0,\,1]$ – коэффициент заполнения (5).

Методика вычисления аналитических выражений КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}}(\tau,\rho)$ одиночных элементов МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}}(t)$ на основе обратного ПФ (28) энергетических спектров $S_{\mathrm{cosGBOC}}(f,\rho)$ (30) применительно к cosGBOC-сигналам в случаях $N_\Pi = 2$ и 4 по существу одинакова.

4.1. Корреляционная функция $R_{\mathrm{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ одиночного элемента модулирующей функции cosGBOC-сигнала с коэффициентом кратности импульсов $N_\Pi = 2$

При коэффициенте кратности импульсов $N_\Pi = 2$ энергетический спектр $S_{\mathrm{cosGBOC}-2}(f,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}-2}(t)$ cosGBOC-сигналов, согласно (30), описывается следующим выражением:

$$S_{\mathrm{cosGBOC}-2}(f,\rho) = \frac{1}{f_C}\frac{1}{\left(\frac{\pi f}{f_C}\right)^2}\times$$
$$\times\left[2\sin\rho\frac{\pi f}{2f_C}\cos(2-\rho)\frac{\pi f}{2f_C}-\sin(1-\rho)\frac{\pi f}{f_C}\right]^2, \tag{31}$$

где $\rho \in [0,\,1]$, $N_\Pi = 2$, $\tau_C = T_\Pi$.

В соответствии с предложенной методикой (по аналогии с sinGBOC-сигналами [13]) представим энергетический спектр $S_{\text{cosGBOC}-2}(f,\rho)$(31) при $N_\Pi = 2$ в виде взвешенной алгебраической суммы косинусов углов, определяемых характерными точками косинусного символа МФ $\mu_{\text{cosGBOC}-2}(t)$ (16) cosGBOC-сигналов (т.е. точками излома КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$).

В таком случае формула (31) принимает следующий вид:

$$S_{\text{cosGBOC}-2}(\omega,\rho) = \frac{2}{\omega^2\tau_C}\sum_{i=0}^{4} h_i \cos g_i\omega\tau_C, \tag{32}$$

где $\rho \in [0,\ 1]$, $N_\Pi = 2$, $\tau_C = T_\Pi$, $\omega = 2\pi f$, а коэффициенты h_i и g_i $(i = \overline{0,4})$ представлены в табл. 2.

Видно, что формула (32) совпадает с соответствующим выражением для энергетического спектра $S_{\text{cosGBOC}-2}(\omega,\rho)$ из работы [10, ф-ла (38)].

Найдем КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ (25) одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}-2}(t)$ (см. (12) и (16)) cosGBOC – сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_\Pi = 2$ как обратное ПФ (28) энергетического спектра $S_{\text{cosGBOC}-2}(\omega,\rho)$ (32).

Подставив (32) в (28), получим

$$\begin{aligned} R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho) &= \mathrm{FT}^{-1}\{S_{\text{cosGBOC}-2}(\omega,\rho)\} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_{\text{cosGBOC}-2}(\omega,\rho)\cos\omega\tau d\omega = \\ &= \mathrm{FT}^{-1}\left\{\frac{2}{\omega^2\tau_C}\sum_{i=0}^{4} h_i\cos g_i\omega\tau_C\right\} = \\ &= \frac{2}{\tau_C}\sum_{i=0}^{4} h_i \mathrm{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2}\cos g_i\omega\tau_C\right\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Оригиналы $\mathrm{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2}\cos g_i\omega\tau_C\right\}$, где $i = \overline{0,4}$, приведены в табл. 1 и имеют вид

$$\begin{aligned} \mathrm{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2}\cos g_i\omega\tau_C\right\} &= -\frac{1}{4}(\tau + g_i\tau_C)\operatorname{sign}(\tau + g_i\tau_C) - \\ &-\frac{1}{4}(\tau - g_i\tau_C)\operatorname{sign}(\tau - g_i\tau_C), \end{aligned} \tag{34}$$

коэффициенты g_i $(i = \overline{0,4})$ приведены в табл. 2.

Входящая в формулу (34) функция "сигнум" z (см. табл. 1) имеет вид

$$\operatorname{sign} z = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad z > 0; \\ 0 & \text{при} \quad z = 0; \\ -1 & \text{при} \quad z < 0. \end{cases} \tag{35}$$

Таблица 2. Коэффициенты формулы энергетического спектра $S_{\text{cosGBOC}-2}(\omega,\rho)$

i	h_i	g_i
0	5	0
1	– 1	1
2	– 4	0.5ρ
3	– 4	1 – ρ
4	4	1 – 0.5ρ

Подставив (34) в (33), находим, что КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ равна

$$\begin{aligned} R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho) = -\frac{1}{2}\times \\ \times\sum_{i=0}^{4} h_i\left\{\frac{\tau}{\tau_C}[\operatorname{sign}(\tau + g_i\tau_C) + \operatorname{sign}(\tau - g_i\tau_C)] + \right. \\ \left. + g_i[\operatorname{sign}(\tau + g_i\tau_C) - \operatorname{sign}(\tau - g_i\tau_C)]\right\}, \end{aligned} \tag{36}$$

где $\rho \in [0,\ 1]$, $N_\Pi = 2$, $\tau_C = T_\Pi$, а коэффициенты h_i и g_i $(i = \overline{0,4})$ приведены в табл. 2.

Для cosGBOC-сигналов при $N_\Pi = 2$ в зависимости от значения коэффициента заполнения ρ, где $\rho \in [0,\ 1]$, возможен, как отмечали (см. (21) и (22)), один из двух вариантов формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$.

Так, 1-й вариант формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ cosGBOC-сигналов при $N_\Pi = 2$ (21) соответствует условию, что $0.5\tau_1 \le \tau_2$, т.е. $\rho \in \left[0,\frac{2}{3}\right]$, и 2-й вариант формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ cosGBOC-сигналов при $N_\Pi = 2$ (22) соответствует условию, что $0.5\tau_1 \ge \tau_2$, т.е. $\rho \in \left[\frac{2}{3},1\right]$.

Каждому варианту формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ присуща своя последовательность чередования характерных точек КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ на оси времени смещения τ (т.е. точек излома КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$) и соответственно свое аналитическое выражение КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}-2}(t)$ cosGBOC-сигналов [10].

Согласно предложенной методике с учетом значений функции "сигнум" (35) произведем вычисления в формуле (36) отдельно для 1-го и 2-го вариантов формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$.

В результате находим, что КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}-2}(t)$ cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов

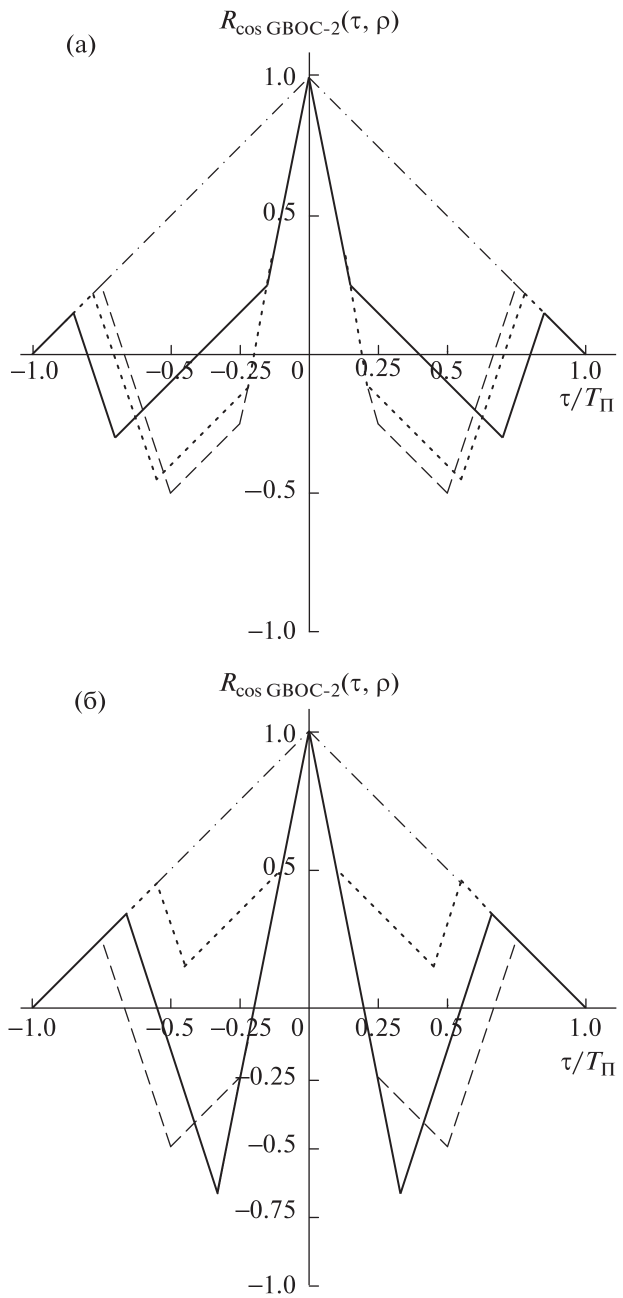

Рис. 3. Корреляционные функции $R_{\mathrm{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ одиночного элемента модулирующей функции cosGBOC-сигнала с коэффициентом кратности импульсов $N_\Pi = 2$ при $\rho \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ (а) и $\rho \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ (б).

$N_\Pi = 2$ характеризуется следующими соотношениями:

$$R_{\mathrm{cosGBOC}-2}(\tau,\rho) = \\ = \begin{cases} R_{\mathrm{cosGBOC}-2-1}(\tau,\rho) & \text{при} \quad 0 \le \rho \le \dfrac{2}{3}, \\ R_{\mathrm{cosGBOC}-2-2}(\tau,\rho) & \text{при} \quad \dfrac{2}{3} \le \rho \le 1. \end{cases} \tag{37}$$

Входящие в формулу (37) КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}-2-1}(\tau,\rho)$ и $R_{\mathrm{cosGBOC}-2-2}(\tau,\rho)$ равны соответственно

$$R_{\mathrm{cosGBOC}-2-1}(\tau,\rho) = \\ = \begin{cases} 1 - 5\dfrac{|\tau|}{\tau_C} & \text{при} \quad 0 \le |\tau| \le 0.5\rho\tau_C, \\ 1 - 2\rho - \dfrac{|\tau|}{\tau_C} & \text{при} \quad 0.5\rho\tau_C \le |\tau| \le (1-\rho)\tau_C, \\ -3 + 2\rho + 3\dfrac{|\tau|}{\tau_C} & \text{при} \quad (1-\rho)\tau_C \le |\tau| \le (1-0.5\rho)\tau_C, \\ 1 - \dfrac{|\tau|}{\tau_C} & \text{при} \quad (1-0.5\rho)\tau_C\,|\tau| \le \tau_C, \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| \ge \tau_C, \end{cases} \tag{38}$$

где $\rho \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$, $N_\Pi = 2$, $\tau_C = T_\Pi$;

$$R_{\mathrm{cosGBOC}-2-2}(\tau,\rho) = \\ = \begin{cases} 1 - 5\dfrac{|\tau|}{\tau_C} & \text{при} \quad 0 \le |\tau| \le (1-\rho)\tau_C, \\ -3 + 4\rho - \dfrac{|\tau|}{\tau_C} & \text{при} \quad (1-\rho)\tau_C \le |\tau| \le 0.5\rho\tau_C, \\ -3 + 2\rho + 3\dfrac{|\tau|}{\tau_C} & \text{при} \quad 0.5\rho\tau_C \le |\tau| \le (1-0.5\rho)\tau_C, \\ 1 - \dfrac{|\tau|}{\tau_C} & \text{при} \quad (1-0.5\rho)\tau_C \le |\tau| \le \tau_C, \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| \ge \tau_C, \end{cases} \tag{39}$$

где $\rho \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $N_\Pi = 2$, $\tau_C = T_\Pi$.

В формулах (37)–(39) и далее, характеризующих КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}-2-1}(\tau,\rho)$ и $R_{\mathrm{cosGBOC}-2-2}(\tau,\rho)$, последние цифры в индексах означают, что рассматривается 1-й или 2-й вариант формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ cosGBOC-сигналов.

Формулы (37)–(39), как и следовало ожидать, совпадают с соответствующими выражениями для КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ из [10] (см. (30)–(32)), которые получены другим методом (на основе общего определения КФ и без использования энергетического спектра).

На рис. 3а и 3б представлены графики КФ $R_{\mathrm{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$, построенные согласно (37)–(39), для одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}-2}(t)$ cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_\Pi = 2$ при различных значениях коэффициента заполнения ρ: а) при $\rho \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$, б) при $\rho \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. На этих же рисунках изображены графики КФ $R_{\mathrm{cosBOC}-2}(\tau)$ и $R_{\mathrm{BPSK}}(\tau)$ соответствующих cosBOC-сигналов (штриховые линии) и BPSK-сигналов (штрихпунктирные линии).

Графики на рис. 3а характеризуют КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ cosGBOC-сигналов при $\rho = 0.3$ (сплошная линия) и 0.45 (пунктирная линия), на рис. 3б – при $\rho = 2/3$ (сплошная линия) и 0.9 (пунктирная линия). Все КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ на рис. 3а и 3б являются нормированными. Особенности КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ обсуждаются в [10].

4.2. Корреляционная функция $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$ *одиночного элемента модулирующей функции* cosGBOC-*сигнала с коэффициентом кратности импульсов* $N_\Pi = 4$

Энергетический спектр $S_{\text{cosGBOC}-4}(f,\rho)$ (24) одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}-4}(t)$, характеризуемого (12) и (17), cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_\Pi = 4$, в соответствии с (30), имеет вид

$$S_{\text{cosGBOC}-4}(f,\rho) = \frac{1}{f_C}\frac{\cos^2\dfrac{\pi f}{2f_C}}{\left(\dfrac{\pi f}{2f_C}\right)^2}\times \\ \times\left[2\sin\rho\frac{\pi f}{4f_C}\cos(2-\rho)\frac{\pi f}{4f_C} - \sin(1-\rho)\frac{\pi f}{2f_C}\right]^2, \qquad (40)$$

где $\rho \in [0, 1]$, $N_\Pi = 4$, $\tau_C = 2T_\Pi$.

Согласно предложенной методике, чтобы получить аналитическое выражение КФ $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$ (25) одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-cosGBOC}-4}(t)$ cosGBOC-сигналов, представим энергетический спектр $S_{\text{cosGBOC}-4}(f,\rho)$ (40) при $N_\Pi = 4$ (по аналогии с sinGBOC-сигналами [13]) в виде взвешенной алгебраической суммы косинусов углов, определяемых характерными точками косинусного символа МФ $\mu_{\text{cosGBOC}-4}(t)$ (17) (т.е. точками излома КФ $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$). В таком случае находим, что формула энергетического спектра $S_{\text{cosGBOC}-4}(f,\rho)$ (40) может быть записана в следующем виде:

$$S_{\text{cosGBOC}-4}(\omega,\rho) = \frac{1}{\omega^2 T_\Pi}\sum_{i=0}^{9} h_i \cos g_i\omega T_\Pi, \qquad (41)$$

где $\rho \in [0, 1]$, $N_\Pi = 4$, $\tau_C = 2T_\Pi$, $\omega = 2\pi f$, а коэффициенты h_i и g_i ($i = \overline{0,9}$) представлены в табл. 3.

Видно, что формула (41) совпадает с соответствующим выражением для энергетического спектра $S_{\text{cosGBOC}-4}(\omega,\rho)$ из [10] (см. ф-ла (54)).

Таблица 3. Коэффициенты формулы энергетического спектра $S_{\text{cosGBOC}-4}(\omega,\rho)$

i	h_i	g_i
0	9	0
1	– 4	0.5ρ
2	– 4	ρ
3	– 8	$1-\rho$
4	8	1
5	4	$1-0.5\rho$
6	– 4	$1+0.5\rho$
7	– 4	$2-\rho$
8	4	$2-0.5\rho$
9	– 1	2

Далее получим КФ $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$ (25) при $N_\Pi = 4$ как обратное ПФ энергетического спектра $S_{\text{cosGBOC}-4}(\omega,\rho)$ (41). Подставив (41) в (28), получим

$$\begin{aligned} R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho) &= \mathrm{FT}^{-1}\{S_{\text{cosGBOC}-4}(\omega,\rho)\} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_{\text{cosGBOC}-4}(\omega,\rho)\cos\omega\tau d\omega = \\ &= \mathrm{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2 T_\Pi}\sum_{i=0}^{9} h_i\cos g_i\omega T_\Pi\right\} = \\ &= \frac{1}{T_\Pi}\sum_{i=0}^{9} h_i \mathrm{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2}\cos g_i\omega T_\Pi\right\}. \end{aligned} \qquad (42)$$

Оригиналы $\mathrm{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2}\cos g_i\omega T_\Pi\right\}$, где $i = \overline{0,9}$, входящие в (42), приведены в табл. 1 и имеют вид

$$\mathrm{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2}\cos g_i\omega T_\Pi\right\} = -\frac{1}{4}(\tau + g_iT_\Pi)\mathrm{sign}(\tau + g_iT_\Pi) - \\ -\frac{1}{4}(\tau - g_iT_\Pi)\mathrm{sign}(\tau - g_iT_\Pi), \qquad (43)$$

коэффициенты g_i ($i = \overline{0,9}$) приведены в табл. 3.

Подставив (43) в (42), после вычислений находим, что КФ $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$ равна

$$R_{\cos\mathrm{GBOC}-4}(\tau,\rho)=$$
$$=-\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{9}h_i\left\{\frac{\tau}{T_\Pi}[\mathrm{sign}(\tau+g_iT_\Pi)+\mathrm{sign}(\tau-g_iT_\Pi)]+\right.$$
$$\left.+\,g_i\left[\mathrm{sign}(\tau+g_iT_\Pi)-\mathrm{sign}(\tau-g_iT_\Pi)\right]\right\},\tag{44}$$

где $\rho\in[0,\,1]$, $N_\Pi=4$, $\tau_C=2T_\Pi$, а коэффициенты h_i и g_i $(i=\overline{0,9})$ приведены в табл. 3.

Для cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_\Pi=4$ в зависимости от значения коэффициента заполнения ρ, где $\rho\in[0,\,1]$, возможен, как отмечали (см. (18)–(20)), один из трех вариантов формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ [10]. Так, 1-й вариант (18) соответствует условию, что $\tau_1\le\tau_2$, т.е. $\rho\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$; 2-й вариант (19) соответствует условию, что $0.5\tau_1\le\tau_2\le\tau_1$, т.е. $\rho\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$; 3-й вариант (20) соответствует условию, что $\tau_2\le 0.5\tau_1$, т.е. $\rho\in\left[\frac{2}{3},1\right]$.

Каждому варианту формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$ присуща своя последовательность чередования характерных точек КФ $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4}(\tau,\rho)$ на оси времени смещения τ (т.е. точек излома КФ) и, соответственно, свое аналитическое выражение КФ $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4}(\tau,\rho)$ [10].

В соответствии с используемой методикой (аналогично случаю при $N_\Pi=2$) произведем с учетом (35) вычисления в формуле (44) отдельно для каждого варианта формирования косинусного ППК $r_{\cos}(t)$.

В результате находим, что КФ $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4}(\tau,\rho)$ одиночного элемента МФ $d_{\tau_C\text{-}\cos\mathrm{GBOC}-4}(t)$ cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_\Pi=4$ характеризуется следующими соотношениями:

$$R_{\cos\mathrm{GBOC}-4}(\tau,\rho)=$$
$$=\begin{cases}R_{\cos\mathrm{GBOC}-4-1}(\tau,\rho) & \text{при}\quad 0\le\rho\le\dfrac{1}{2},\\ R_{\cos\mathrm{GBOC}-4-2}(\tau,\rho) & \text{при}\quad \dfrac{1}{2}\le\rho\le\dfrac{2}{3},\\ R_{\cos\mathrm{GBOC}-4-3}(\tau,\rho) & \text{при}\quad \dfrac{2}{3}\le\rho\le 1.\end{cases}\tag{45}$$

Входящие в формулу (45) КФ $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4-1}(\tau,\rho)$, $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4-2}(\tau,\rho)$ и $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4-3}(\tau,\rho)$ равны соответственно:

$$R_{\cos\mathrm{GBOC}-4-1}(\tau,\rho)=\begin{cases}1-4.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\quad 0\le|\tau|\le 0.5\rho T_\Pi,\\ 1-\rho-2.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\quad 0.5\rho T_\Pi\le|\tau|\le\rho T_\Pi,\\ 1-3\rho-0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\quad \rho T_\Pi\le|\tau|\le(1-\rho)T_\Pi,\\ -3+\rho+3.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\ (1-\rho)T_\Pi\le|\tau|\le(1-0.5\rho)T_\Pi,\\ -1+1.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\quad (1-0.5\rho)T_\Pi\le|\tau|\le T_\Pi,\\ 3-2.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\quad T_\Pi\le|\tau|\le(1+0.5\rho)T_\Pi,\\ 1-\rho-0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\quad (1+0.5\rho)T_\Pi\le|\tau|\le(2-\rho)T_\Pi,\\ -3+\rho+1.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\quad (2-\rho)T_\Pi\le|\tau|\le(2-0.5\rho)T_\Pi,\\ 1-0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при}\quad (2-0.5\rho)T_\Pi\le|\tau|\le 2T_\Pi=\tau_C,\\ 0 & \text{при}\quad |\tau|\ge 2T_\Pi=\tau_C,\end{cases}\tag{46}$$

где $\rho\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $N_\Pi=4$,$\tau_C=2T_\Pi$;

$$R_{\text{cosGBOC}-4-2}(\tau,\rho) = \begin{cases} 1 - 4.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad 0 \le |\tau| \le 0.5\rho T_\Pi, \\ 1 - \rho - 2.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad 0.5\rho T_\Pi \le |\tau| \le (1-\rho)T_\Pi, \\ -3 + 3\rho + 1.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (1-\rho)T_\Pi \le |\tau| \le \rho T_\Pi, \\ -3 + \rho + 3.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad \rho T_\Pi \le |\tau| \le (1-0.5\rho)T_\Pi, \\ -1 + 1.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (1-0.5\rho)T_\Pi \le |\tau| \le T_\Pi, \\ 3 - 2.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad T_\Pi \le |\tau| \le (1+0.5\rho)T_\Pi, \\ 1 - \rho - 0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (1+0.5\rho)T_\Pi \le |\tau| \le (2-\rho)T_\Pi, \\ -3 + \rho + 1.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (2-\rho)T_\Pi \le |\tau| \le (2-0.5\rho)T_\Pi, \\ 1 - 0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (2-0.5\rho)T_\Pi \le |\tau| \le 2T_\Pi = \tau_C, \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| \ge 2T_\Pi = \tau_C, \end{cases} \tag{47}$$

где $\rho \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$, $N_\Pi = 4$,$\tau_C = 2T_\Pi$;

$$R_{\text{cosGBOC}-4-3}(\tau,\rho) = \begin{cases} 1 - 4.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad 0 \le |\tau| \le (1-\rho)T_\Pi, \\ -3 + 4\rho - 0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (1-\rho)T_\Pi \le |\tau| \le 0.5\rho T_\Pi \\ -3 + 3\rho + 1.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad 0.5\rho T_\Pi \le |\tau| \le (1-0.5\rho)T_\Pi, \\ -1 + 2\rho - 0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (1-0.5\rho)T_\Pi \le |\tau| \le \rho T_\Pi, \\ -1 + 1.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad \rho T_\Pi \le |\tau| \le T_\Pi, \\ 3 - 2.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad T_\Pi \le |\tau| \le (2-\rho)T_\Pi, \\ -1 + 2\rho - 0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (2-\rho)T_\Pi \le |\tau| \le (1+0.5\rho)T_\Pi, \\ -3 + \rho + 1.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (1+0.5\rho)T_\Pi \le |\tau| \le (2-0.5\rho)T_\Pi, \\ 1 - 0.5\dfrac{|\tau|}{T_\Pi} & \text{при} \quad (2-0.5\rho)T_\Pi \le |\tau| \le 2T_\Pi = \tau_C, \\ 0 & \text{при} \quad |\tau| \ge 2T_\Pi = \tau_C, \end{cases} \tag{48}$$

где $\rho \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ $N_\Pi = 4, \tau_C = 2T_\Pi$.

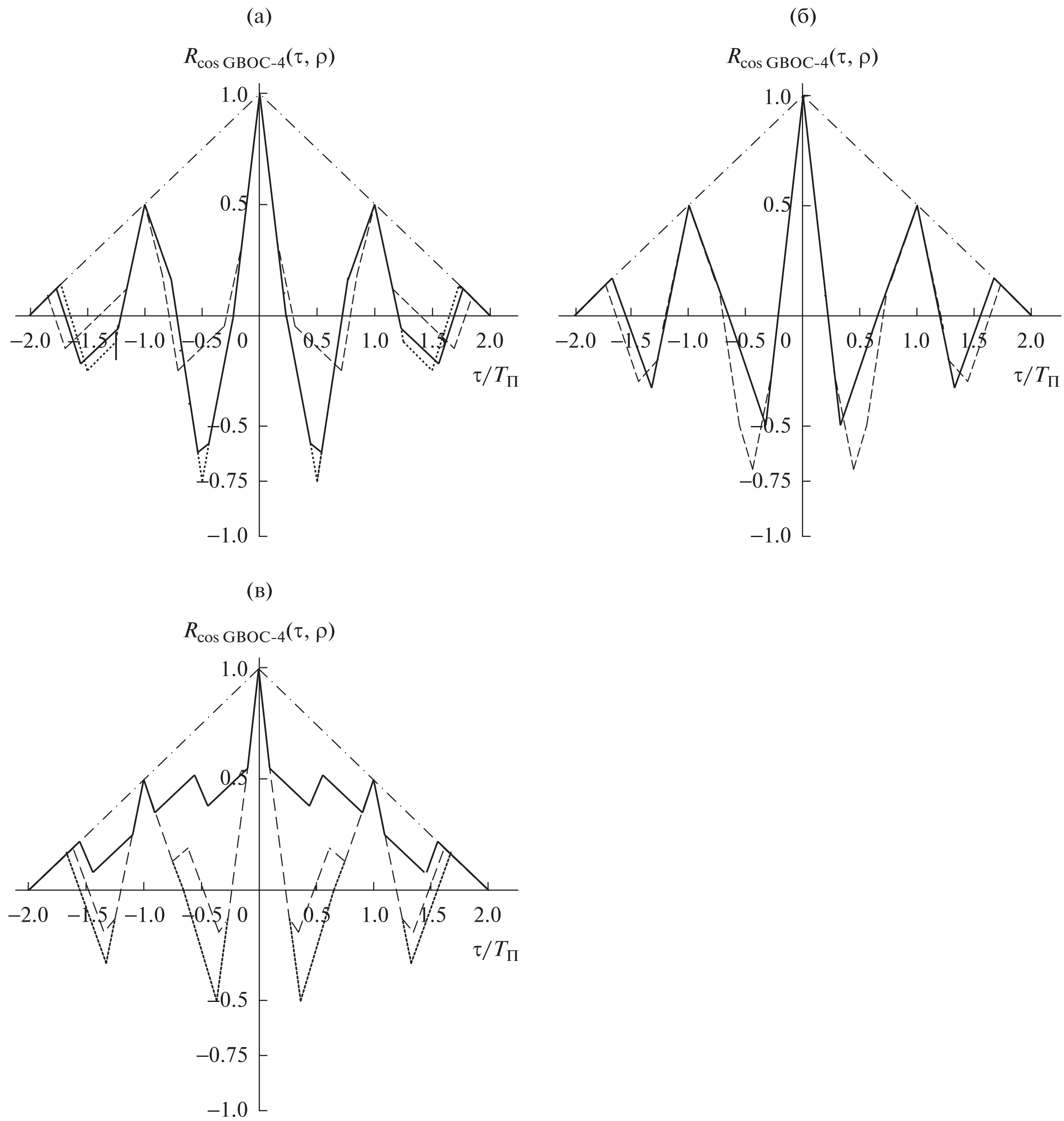

Рис. 4. Корреляционные функции $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4}(\tau,\rho)$ одиночного элемента модулирующей функции cosGBOC-сигнала с коэффициентом кратности импульсов $N_{\Pi} = 4$ при $\rho \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ (а), $\rho \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ (б) и $\rho \in \left[\frac{2}{3},1\right]$ (в).

Как и следовало ожидать, формулы (45)–(48), совпадают с соответствующими выражениями для КФ $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4}(\tau,\rho)$ из [10], которые получены другим методом (на основе общего определения КФ и без использования энергетического спектра).

На рис. 4а–4в согласно (45)–(48) представлены графики КФ $R_{\cos\mathrm{GBOC}-4}(\tau,\rho)$ для одиночного элемента МФ $d_{\tau_{\mathrm{C}}\text{-}\cos\mathrm{GBOC}-4}(t)$ cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_{\Pi} = 4$ при различных значениях коэффициента заполнения ρ, где $\rho \in [0, 1]$ (при $\rho \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ – рис. 4а, при $\rho \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ – рис. 4б и при $\rho \in \left[\frac{2}{3},1\right]$ – рис. 4в). На этих же рисунках изображены графики КФ $R_{\mathrm{BPSK}}(\tau)$ BPSK-сигналов (штрихпунктирные).

На рис. 4а–4в представлены графики КФ $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$ cosGBOC-сигналов при различных ρ:

а) $\rho = 0.45$ (сплошная кривая), $\rho = 0.3$ (штриховая) и $\rho = 0.5$ (пунктирная) (случай соответствующих cosBOC-сигналов);

б) $\rho = 2/3$ (сплошная) и $\rho = 0.55$ (штриховая);

в) $\rho = 0.9$ (сплошная), $\rho = 0.75$ (штриховая) и при $\rho = 2/3$ (пунктирная).

Все КФ $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$ на рис. 4а–4в являются нормированными.

Особенности КФ $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$ cosGBOC-сигналов рассматриваются в [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Шумоподобные cosGBOC-сигналы, являющиеся обобщением cosBOC-сигналов, предназначены для применения в перспективных глобальных СРНС) таких, как GPS (США), Galileo (ЕС), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай).

Основной научный результат работы состоит в том, что предложенная в [13] методика вычисления КФ одиночных элементов МФ sinGBOC-сигналов на основе обратного ПФ энергетических спектров распространена на cosGBOC-сигналы, и этим способом получены аналитические выражения КФ $R_{\text{cosGBOC}-N_{\Pi}}(\tau,\rho)$ одиночных элементов МФ $d_{\tau_{\text{C}}\text{-cosGBOC}}(t)$ cosGBOC-сигналов с коэффициентом кратности импульсов $N_{\Pi} = 2$ и 4 для различных значений коэффициента заполнения ρ, где $\rho \in [0, 1]$.

В основе методики лежит представление энергетического спектра GBOC-сигналов в виде взвешенной алгебраической суммы косинусов углов, определяемых характерными точками синусного символа МФ $\mu_{\text{GBOC}}(t)$ (т.е. точками излома КФ).

Полученные аналитические выражения КФ $R_{\text{cosGBOC}-2}(\tau,\rho)$ и $R_{\text{cosGBOC}-4}(\tau,\rho)$, как и следовало ожидать, совпадают с соответствующими формулами из [10], найденными другим методом (на основе общего определения КФ и без использования энергетических спектров).

Вычисление КФ $R_{\text{cosGBOC}-N_{\Pi}}(\tau,\rho)$ путем обратного ПФ энергетических спектров $S_{\text{cosGBOC}-N_{\Pi}}(\omega,\rho)$ в ряде случаев оказывается более предпочтительным при сравнении со способом получения КФ на основе их общего определения.

По изложенной методике аналогичным образом можно получить аналитические выражения КФ $R_{\text{cosGBOC}-N_{\Pi}}(\tau,\rho)$ одиночных элементов МФ cosGBOC-сигналов при любом другом значении коэффициента кратности импульсов N_{Π}, где $N_{\Pi} = 2, 4, 6, \ldots$.

Располагая аналитическими выражениями КФ $R_{\text{cosGBOC}-N_{\Pi}}(\tau,\rho)$ одиночных элементов МФ cosGBOC-сигналов, удается осознанно преодолевать трудности при разработке навигационной аппаратуры потребителей (в частности, дискриминаторов) с целью обеспечения, по возможности, однозначного слежения за основным пиком КФ и минимизации вероятности захвата ее боковых (ложных) пиков. Для СРНС грядущего поколения на этой же основе можно в принципе количественно рассчитать потенциальные характеристики точности слежения за ПСП дальномерного кода и оценить разрешающую способность сигналов в условиях многолучевости и при действии помех различного рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Betz J.W.* // Proc. National Technical Meeting of the Institute of Navigation (ION – NTM'99), January 1999. P. 639.
2. *Betz J.W.* // Navigation, J. ION. 2001. V. 48. № 4. P. 227.
3. *Hein G.W., Godet J., Issler J.-L. et al.* // Proc. Institute of Navigation Global Positioning System Meeting (ION GPS 2002). Portland. USA. 24–27 Sep. 2002. Fairfax: ION, 2002. P. 266.
4. *Ярлыков М.С.* Меандровые шумоподобные сигналы (ВОС-сигналы) и их разновидности в спутниковых радионавигационных системах. М.: Радиотехника, 2017.
5. *Liu W., Hu Y., Zhan X.Q.* // Electronics Lett. 2012. V. 48. № 5. P. 284.
6. *Liu W., Hu Y.* // J. Communications Technology and Electronics. 2014. V. 59. № 11. P. 1206.
7. *Ярлыков М.С.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 10. С. 964.
8. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 2. С. 157.
9. *Ярлыков М.С.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 8. С. 808.
10. *Ярлыков М.С.*, *Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 7. С. 694.
11. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
12. *Ярлыков М.С.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 8. С. 725.
13. *Ярлыков М.С.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 8. С. 775 .
14. Global Positioning Systems Directorate. Systems Engineering and Integration. Interface Specification IS – GPS – 200. – Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces, IS – GPS –200G, 05 September 2012.
15. *Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др.* Сетевые спутниковые радионавигационные системы. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1993.
16. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. 2-е изд. М.: Сов. радио, 1982.
17. *Стеценко О.А.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2007.