РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 11, с. 1079–1082

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396

ЗАВИСИМОСТЬ ВХОДНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ВИБРАТОРНЫХ И МИКРОПОЛОСКОВЫХ АНТЕНН ОТ ПЕРВИЧНОГО ПОЛЯ

© 2020 г. С. И. Эминов*

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003 Российская Федерация

**E-mail: eminovsi@mail.ru*

Поступила в редакцию 13.03.2020 г.
После доработки 13.03.2020 г.
Принята к публикации 07.05.2020 г.

Исследована зависимость входных сопротивлений вибраторных и микрополосковых антенн от профиля первичного поля с использованием аналитического обращения главного гиперсингулярного оператора и явного вида обратного интегрального оператора. Найдены общие закономерности в поведении входных сопротивлений для произвольных первичных полей. Проведены численные расчеты и получено согласие с теоретическими результатами.

DOI: 10.31857/S0033849420110054

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Электродинамический анализ вибраторных антенн основан на решении гиперсингулярного уравнения вида [1, 2]

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt + \int_{-1}^{1}K(\tau,t)u(t)\,dt = f(\tau),\quad -1\le\tau\le 1. \tag{1}$$

Уравнение (1) также описывает микрополосковые [3, 4] и щелевые антенны [5]. К числу неисследованных задач относится изучение зависимости решения (1) от профиля первичного поля, т.е. от $f(\tau)$. Для активных антенн первичное поле локализовано в небольшой области, по сравнению с длиной антенны и с длиной волны. Поэтому при разработке приближенных методов расчета первичное поле представлялось в виде [6–8]

$$f(\tau)=\delta(\tau), \tag{2}$$

где $\delta(\tau)$ – дельта функция Дирака. Однако еще в работе [9] было выяснено, что точное решение уравнения (1) в нуле обращается в бесконечность. Поэтому модель (2) не применима.

В связи с этим в теории активных антенн часто полагают, что функция $f(\tau)$ отлична от нуля на малом участке $[-\varepsilon,\varepsilon]$ (ε много меньше единицы), а на этом промежутке постоянна и равна $1/2\varepsilon$. Нас интересует вопрос: как изменится решение уравнения (1) и характеристики антенн, если взять другую функцию, также локализованную на промежутке $[-\varepsilon,\varepsilon]$?

Предположим, что функция $f(\tau)$ равна нулю вне промежутка $[-1,1]$, непрерывна на $[-1,1]$, неотрицательна и

$$\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=1. \tag{3}$$

На основе $f(\tau)$ сконструируем функцию

$$f_\varepsilon(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}f\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right), & |\tau|\le\varepsilon,\\ 0, & |\tau|>\varepsilon.\end{cases} \tag{4}$$

Функция $f_\varepsilon(\tau)$ локализована на малом промежутке $[-\varepsilon,\varepsilon]$ и удовлетворяет соотношению (3), т.е. интеграл от нее равен 1. Далее $f_\varepsilon(0)=\frac{1}{\varepsilon}f(0)$ и по мере уменьшения ε растет значение функции в нуле $f_\varepsilon(0)$.

Как показано в [10, стр. 97], такая функция $f_\varepsilon(\tau)$ аппроксимирует $\delta(\tau)$ в интегральном смысле, т.е. для произвольной гладкой функции $\varphi(\tau)$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f_\varepsilon(t)\varphi(t)\,dt\to\int_{-1}^{1}\delta(t)\varphi(t)\,dt=\varphi(0)$$
$$\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Таким образом, модель $\delta(\tau)$ – дельта функции заменяем на аппроксимирующую функцию $f_\varepsilon(\tau)$, которая непрерывна и как следствие принадлежит пространству квадратично-суммируемых функций $L_2[-1,1]$.

Целью данной работы является изучение влияния аппроксимирующей функции $f_\varepsilon(\tau)$ на характеристики антенн при малых значениях ε, выявление общих закономерностей для произвольных аппроксимирующих функций.

1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt = f_\varepsilon(\tau),\quad -1\le\tau\le 1. \tag{5}$$

Решение этого уравнения находится аналитически [1]

$$\begin{gathered} u(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f_\varepsilon(t)\times \\ \times\left(\frac{\ln 2}{2} + \ln\sin\frac{\arccos t + \arccos\tau}{2} - \frac{1}{2}\ln|\tau - t|\right)dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f_\varepsilon(t)\ln\left|\frac{1-\tau t+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}{\tau - t}\right|dt. \end{gathered} \tag{6}$$

Входные сопротивления и входные проводимости определяются через значение решения в нуле $u(0)$. Поэтому далее изучим поведение $u(0)$. Из (6) получим

$$\begin{gathered} u(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right|dt = \\ = -\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)\ln|t|\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)\ln\left|1+\sqrt{1-t^2}\right|dt. \end{gathered} \tag{7}$$

Преобразуем первый интеграл с учетом свойств функции $f_\varepsilon(\tau)$

$$\begin{gathered} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)\ln|t|\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)(\ln|t| - \ln|\varepsilon|)\,dt + \\ + \ln|\varepsilon|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\ln\left|\frac{t}{\varepsilon}\right|dt + \\ + \ln|\varepsilon|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(x)\ln|x|\,dx + \ln|\varepsilon|. \end{gathered} \tag{8}$$

Второй интеграл в (7) найдем приближенно

$$\begin{gathered} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)\ln\left|1+\sqrt{1-t^2}\right|dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\ln\left|1+\sqrt{1-t^2}\right|dt = \\ = \int_{-1}^{1} f(x)\ln\left|1+\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}\right|dx \approx \ln 2,\quad\text{при}\quad \varepsilon\to+0. \end{gathered} \tag{9}$$

Окончательно получим формулу

$$\begin{gathered} u(0) = \frac{1}{\pi}\left(\ln\left|\frac{2}{\varepsilon}\right| - \int_{-1}^{1} f(x)(\ln|x|)\,dx\right) = \\ = \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{2}{\varepsilon}\right|\left(1 - \frac{\int_{-1}^{1} f(x)(\ln|x|)\,dx}{\ln\left|\frac{2}{\varepsilon}\right|}\right). \end{gathered} \tag{10}$$

Из полученной формулы (10) следует замечательное свойство решения характеристического уравнения: $u(0)$ асимптотически, при малых ε, не зависит от функции $f_\varepsilon(\tau)$, аппроксимирующей дельта функцию Дирака.

В работе [1] развит численно-аналитический метод решения гиперсингулярных уравнений. Решение ищется в виде суммы двух функций, одна из которых находится из решения характеристического уравнения, а второе численно. Можно показать, что второе решение от ε не зависит. Поэтому формула (10) на самом деле определяет зависимость решения для всего уравнения (1).

2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В предыдущем пункте проведено теоретическое исследование и выявлена закономерность в поведении входного сопротивления: при малых ε входное сопротивлении *асимптотически* не зависит от функции $f_\varepsilon(\tau)$, аппроксимирующей дельта функцию Дирака.

В этом пункте проведем точные расчеты на основе численно-аналитического метода работы [1] и сравним результаты расчета для двух моделей. В первой модели, как и в работе [1], функция $f(\tau)$ постоянна, соответственно этому

$$f_\varepsilon^1(\tau) = \begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon}, & |\tau|\le\varepsilon,\\ 0, & |\tau|>\varepsilon.\end{cases} \tag{11}$$

Для второй модели $f(\tau)$ на концах интервала обращается в нуль по корневому закону

$$f_\varepsilon^2(\tau) = \frac{2}{\pi\varepsilon}\begin{cases}\sqrt{1-\frac{\tau^2}{\varepsilon^2}}, & |\tau|\le\varepsilon,\\ 0, & |\tau|>\varepsilon.\end{cases} \tag{12}$$

Таблица 1. Относительные отклонения δ при $\varepsilon = 0.01$, $l = 0.25\lambda$

l/a	Z_1, Ом	Z_2, Ом	δ, %
20	$116.43 + i19.97$	$117.14 + i\,17.84$	1.9
50	$100.40 + i\,44.13$	$100.96 + i\,43.60$	0.7
100	$92.34 + i\,48.05$	$92.63 + i\,47.84$	0.34
200	$87.51 + i\,48.59$	$87.65 + i\,48.50$	0.17
400	$84.47 + i\,48.12$	$84.53 + i\,48.08$	0.074
500	$83.73 + i\,47.90$	$83.78 + i\,47.87$	0.06
1000	$81.92 + i\,47.18$	$81.95 + i\,47.16$	0.04

Таблица 2. Относительные отклонения δ при $l = 200a$, $l = 0.25\lambda$

ε	Z_1, Ом	Z_2, Ом	δ, %
0.2	$84.78 + i\,51.60$	$84.93 + i\,51.18$	0.45
0.1	$85.38 + i\,50.21$	$85.59 + i\,50.00$	0.3
0.01	$87.51 + i\,48.59$	$87.65 + i\,48.50$	0.17
0.001	$89.15 + i\,47.53$	$89.28 + i\,47.43$	0.16

Таблица 3. Относительные отклонения δ при $\varepsilon = 0.01$, $l = 0.5\lambda$

l/a	Z_1, Ом	Z_2, Ом	δ, %
20	$43.48 - i\,140.14$	$39.81 - i\,134.63$	4.7
50	$136.03 - i\,311.36$	$125.72 - i\,301.48$	4.4
100	$280.35 - i\,505.37$	$262.77 - i\,493.96$	3.8
200	$505.63 - i\,744.14$	$481.51 - i\,734.11$	3.0
400	$815.95 - i\,1014.84$	$788.04 - i\,1008.28$	2.2
500	$933.55 - i\,1107.09$	$905.09 - i\,1101.81$	2
1000	$1350.69 - i\,1406.26$	$1322.15 - i\,1404.77$	1.5

Вторая модель применялась в монографии [11, стр. 164] с целью построения эффективного численного алгоритма.

Для первой модели, входное сопротивление обозначим как Z_1, а для второй модели – через Z_2. Для сравнения входных сопротивлений, введем относительное отклонение по формуле

$$\delta = \frac{|Z_1 - Z_2|}{|Z_1|} \times 100\%. \qquad (13)$$

Ниже в таблицах приведены значения относительного отклонения для различных значений l/a, l/λ и ε (a – радиус, l – длина плеча вибраторной антенны, $2l$ – длина антенны, 2Δ – длина участка антенны, где первичное поле отлично от нуля, $\varepsilon = \Delta/l$, λ – длина волны).

Таблица 4. Относительные отклонения δ при $l = 200a$, $l = 0.5\lambda$

ε	Z_1, Ом	Z_2, Ом	δ, %
0.2	$1620.39 + i\,192.64$	$1623.92 - i\,118.05$	19.1
0.1	$1263.25 - i\,663.03$	$1137.75 - i\,731.91$	10.6
0.01	$505.63 - i\,744.14$	$481.51 - i\,734.11$	3.0
0.001	$297.84 - i\,622.92$	$286.22 - i\,613.36$	2.2

Таблица 5. Относительные отклонения δ при $l = 200a$, $l = 0.75\lambda$

ε	Z_1, Ом	Z_2, Ом	δ, %
0.2	$127.10 + i\,74.48$	$125.45 + i\,70.19$	3.2
0.1	$122.90 + i\,61.50$	$123.39 + i\,59.79$	1.3
0.01	$130.51 + i\,48.54$	$131.13 + i\,47.81$	0.69
0.001	$137.31 + i\,39.23$	$137.82 + i\,38.39$	0.69

Проанализируем результаты, представленные в табл. 1–5. Из табл. 1 и 3 следует сильная зависимость относительного отклонения от радиуса вибратора, чем меньше радиус вибраторной антенны или отношение радиуса к длине, тем отклонение меньше.

Для полуволнового вибратора (табл. 1, 2) при малых значениях a и ε относительное отклонение значительно меньше 1%, т.е. *входное сопротивление тонкого полуволнового вибратора практически не зависит от модели*. Это положение подтвердилось и для других моделей, в частности была рассмотрена модель бесконечно дифференцируемой функции, приведенной в [10, стр. 86] (в указанной работе функция называется “шапочкой”).

Для волнового вибратора относительное отклонение больше, чем для полуволнового и даже полутора волнового вибратора.

Из табл. 2, 4, 5 следует, что для всех антенн уменьшение ε приводит к уменьшению относительного отклонения и численные результаты подтверждают теоретические выводы, полученные на основе формулы (10).

ВЫВОДЫ

1. Дана математическая постановка задачи исследования зависимости входных сопротивлений антенн от профиля первичного поля: как зависят входные сопротивления от функции, аппроксимирующей дельта-функцию Дирака.

2. Доказано, что если область локализации первичного поля мала по сравнению с длиной антенны, то входное сопротивление асимптотически не зависит от аппроксимирующей функции.

Доказательство основано на явной формуле обращения гиперсингулярного оператора.

3. Проведены численные расчеты и получено согласие с теоретическими результатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сочилин А.В., Эминов С.И.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 5. С. 553.
2. *Лифанов И.К., Ненашев А.С.* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 1. С. 121.
3. *Клюев Д.С., Соколова Ю.В.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 1. С. 52.
4. *Клюев Д.С., Коршунов С.А., Осипов О.В. и др.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 5. С. 429.
5. *Плотников В.Н., Радциг Ю.Ю., Эминов С.И.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 1. С. 68.
6. *Hallen E.* // Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Ser. 4. 1938. V. 11. № 4. P. 1.
7. *Леонтович М.А., Левин М.Л.* // ЖТФ. 1944. Т. 14. № 9. С. 481.
8. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977.
9. *Вайнштейн Л.А., Фок В.А.* // ЖТФ. 1967. Т. 37. № 7. С. 1189.
10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
11. *Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П.* Современная теория и практические применения антенн. М.: Радиотехника, 2009.