

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ

УДК 519.633+621.372.22+681.5.017

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ФРАКТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МНОГОСЛОЙНЫХ РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНЫХ СРЕД

© 2020 г. А. Х. Гильмутдинов^{a, b, *}, Р. З. Даутов^c, П. А. Ушаков^d^aКазанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ-КАИ), ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111 Российская Федерация^bНаучно-производственное объединение “Радиоэлектроника” им. В.И. Шимко, ул. Журналистов, 50, Казань, 420029 Российская Федерация^cКазанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008 Российская Федерация^dИжевский государственный технический университет им. М.Т. Калашиникова, ул. Студенческая, 7, Ижевск, 426069 Российская Федерация

*E-mail: agilmutdinov@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.01.2020 г.

После доработки 15.01.2020 г.

Принята к публикации 31.03.2020 г.

Показано, что анализ фрактальных элементов, реализованных на основе неоднородной многослойной резистивно-емкостной среды, с помощью классического метода конечных элементов (МКЭ) дает неудовлетворительные результаты для нормированных частот $\omega RC > 10$. Предложена гибридная вычислительная схема МКЭ на основе L -сплайнов в качестве конечных элементов (КЭ), которые на каждом КЭ являются решением дифференциального уравнения однородной RC -линии. Предложено одномерные и двумерные КЭ различной формы (трех-, четырех-, и т.д. угольные) заменить соответствующей физической схемой замещения, где сторонами многоугольного КЭ являются отрезки однородной RC -линии, названного нами одномерным однородным RC -элементом с распределенными параметрами (ОО RC -ЭРП). Таким образом, задача определения характеристик и параметров исследуемого фрактального элемента заменяется задачей определения импеданса полученной электрической схемы замещения на основе ОО RC -ЭРП. Такой метод анализа был назван нами методом конечных распределенных элементов.

DOI: 10.31857/S0033849420120062

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что на основе многослойной резистивно-емкостной среды можно создавать пассивные электронные элементы, импеданс которых \dot{Z}_F зависит от частоты в дробной степени:

$$\dot{Z}_F = \frac{1}{(j\omega)^\alpha F},$$

где $0 \leq |\alpha| \leq 1$, ω – круговая частота, F – некоторая вещественная постоянная. Такой импеданс получил название фрактальный импеданс, а элементы, характеризующиеся фрактальным импедансом, – фрактальными элементами (ФЭ) [1–3].

В работах [1, 2] показано, что изменять дробно-степенную зависимость импеданса от частоты можно за счет использования статических и/или динамических неоднородностей в резистивных или диэлектрических слоях: заданием законов изменения толщины и геометрических размеров

конфигурации слоев; изменением количества, местоположения контактов и их формы; вводя вырезы различной формы в слои, а также заданием определенных электрофизических свойств материалов слоев и законов их изменения.

Очевидно, что для создания ФЭ на данной основе необходимо в первую очередь разработать методы анализа многослойных, в общем случае неоднородных, резистивно-емкостных элементов с распределенными параметрами (RC -ЭРП), что и является целью данной работы.

1. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ОДНОМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим достаточно простой случай элемента, который образован последовательным формированием пленок (в частном случае, слоев):

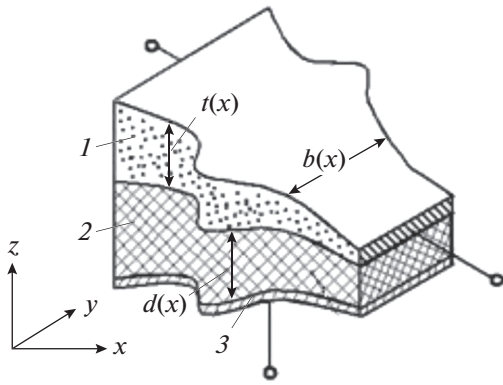


Рис. 1. Конструкция ОН R-C-0 ЭРП: 1 – резистивный слой, 2 – диэлектрик, 3 – идеальный проводник.

проводящего (слой с нулевым сопротивлением – слой 0), диэлектрического (слой C) и резистивного (слой R). Пусть ширина формируемых слоев b будет одинакова и зависит от координаты по длине слоев x по произвольному закону $b(x)$. Толщины диэлектрического и резистивного слоев также зависят от x по законам соответственно $d(x)$ и $t(x)$. Поскольку распределение потенциала в резистивном слое будет зависеть только от одной координаты, то такой элемент в дальнейшем будем называть “одномерный неоднородный резистивно-емкостный элемент с распределенными параметрами со структурой слоев вида R-C-0” (ОН R-C-0 ЭРП). Общий вид конструкции ОН R-C-0 ЭРП представлен на рис. 1.

В работе [1] показано, что уравнение для распределения потенциала U в его резистивном слое будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} - \frac{1}{r_n(x)} \frac{dr_n(x)}{dx} \frac{\partial U(x, p)}{\partial x} = pr_n(x)c_n(x)U(x, p), \quad (1)$$

где $c_n(x)$ и $r_n(x)$ – соответственно погонная емкость и погонное сопротивление ОН R-C-0 ЭРП; p – комплексная частота.

В таком общем виде уравнение (1) из-за сложности зависимости погонных параметров RC-ЭРП от координаты x не имеет решения в замкнутой форме.

Очевидно, что с той или иной степенью приближения задачу можно решить численными методами. В настоящее время для решения подобного рода задач широко используют метод конечных элементов (МКЭ).

1.1. Конечно-элементная постановка задачи (классическая схема)

Рассмотрим ОН R-C-0-ЭРП в случае постоянной зависимости его погонных параметров от координаты x . При этом

$$r_n(x)c_n(x) = \text{const}. \quad (2)$$

Уравнение (1) в этом случае запишем в виде

$$-U'' + \gamma^2 U = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3)$$

где $\gamma^2 = j\omega RC$. Учитывая, что конечной целью анализа является определение первичных y -параметров элемента как четырехполюсника, для примера рассмотрим следующие краевые условия для уравнения (3):

$$U(0) = 0, \quad U(1) = 1. \quad (4)$$

Решением задачи (3), (4) является функция

$$U(x) = \text{sh}(\gamma x) / \text{sh} \gamma,$$

а интересующие нас y -параметры равны $y_{21} = -U'(0)$, $y_{22} = U'(1)$.

Приближенное решение задачи (3), (4) классическим методом конечных элементов отыскивается в виде

$$\tilde{U}(x) = \sum_{i=2}^{N-1} \tilde{U}_i P_i(x) + P_N(x),$$

где $P_i(x)$ – базисные функции, графическое представление которых показано на рис. 2 в предположении, что сетка по оси x равномерная, т.е. $x^i = (i-1)h$, $h = 1/(N-1)$, где h – длина конечного элемента (КЭ).

Узловые потенциалы U_i находятся из решения системы уравнений

$$a(\tilde{U}, P_i) \equiv \int_0^1 (\tilde{U}' P_i' + \gamma^2 \tilde{U} P_i) dx = 0, \quad i = \overline{2, N-1},$$

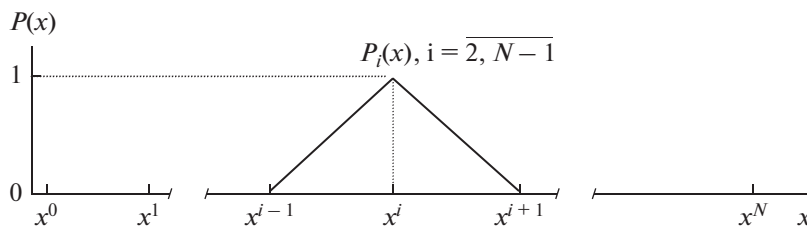


Рис. 2. Графическое представление базисных функций.

Таблица 1. y -Параметры ОО R - C -0 ЭРП, полученные методом конечных элементов в диапазоне частот $\omega_n = \omega RC$ от 1 до 100 для различных шагов сетки

ω_n	h	y_{21}/\tilde{y}_{21}		y_{22}/\tilde{y}_{22}	
		Re	Im	Re	Im
1	0	-0.980763	0.164638	1.022013	0.331238
	1/15	-0.980832	0.164654	1.021874	0.331256
	1/30	-0.980778	0.164641	1.021983	0.331242
10	0	-0.088180	0.668284	2.174056	2.272742
	1/15	-0.086953	0.671765	2.168975	2.278306
	1/30	-0.087910	0.669042	2.172950	2.273952
50	0	0.045499	-0.083721	4.999372	4.999866
	1/15	0.044399	-0.090324	4.946428	5.053342
	1/30	0.045252	-0.085121	4.987794	5.011464
100	0	-0.016986	0.000042	7.071058	7.071078
	1/15	-0.019762	0.002432	6.922388	7.222934
	1/30	-0.017551	0.000530	7.038418	7.103868

Примечание. Для каждого ω_n в первой строке ($h = 0$) приведены точные значения, соответствующие y_{2i} , во второй – значения \tilde{y}_{2i} при $h = 1/15$, в третьей – при $h = 1/30$.

которая равносильна следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} + \frac{h^2 \gamma^2}{6} (U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1}) = 0, \\ i = 2, N-1 \\ U_1 = 0, \quad U_N = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Найдя решение системы (5) получаем искомые значения y -параметров \tilde{y}_{2i} :

$$\tilde{y}_{21} = a(\tilde{U}, P_1) = \frac{U_1 - U_2}{h} + \frac{\gamma^2 h}{6} (U_2 + 2U_1),$$

$$\tilde{y}_{22} = a(\tilde{U}, P_N) = \frac{U_N - U_{N-1}}{h} + \frac{\gamma^2 h}{6} (2U_N + U_{N-1}),$$

представленные в табл. 1.

Как видно из таблицы, МКЭ очень чувствителен к значению ω_n . При больших значениях ω_n ($\omega_n > 10$) результаты вычислений явно неудовлетворительны. Особенно большую погрешность имеет $\text{Im}(y_{21})$.

Итак, рассмотрение модельной задачи (3), (4) показывает, что метод конечных элементов, основанный на линейных функциях на конечном элементе, дает хороший результат лишь при $\omega_n \leq 1$ и не может обеспечивать требуемой точности при больших значениях ω_n . Объяснить это можно тем, что при $\omega_n \gg 1$ решение искомой задачи имеет сложный вид: φ колеблется примерно как $\sin \sqrt{\omega} x_1$ и имеет пограничный слой при $x_1 = 1$ шириной порядка $1/\sqrt{\omega_n}$.

Функции $U(x)$ плохо приближаются линейными функциями при небольшом числе КЭ. Для повышения точности решения рассматриваемой задачи необходимо уменьшать размеры КЭ в пограничном слое шириной $1/\sqrt{\omega_n}$, поэтому размеры КЭ вблизи границ контактных площадок должны быть $h \ll 1/\sqrt{\omega_n}$.

1.2. Гибридная схема

Поскольку классическая схема МКЭ, основанная на линейных функциях, мало пригодна для анализа RC -ЭРП даже с простейшей структурой слоев вида R - C -0 на частотах $\omega_n > 10$, то построим схему, которая лишена этого недостатка.

При построении расчетной схемы методом конечных элементов в качестве базисных функций будем использовать не полиномиальные сплайны, а так называемые L -сплайны. В связи с этим рассмотрим следующую задачу: найти такую конечно-элементную функцию U_h , которая является решением задачи

$$\left. \begin{aligned} L(U) &= -U'' + \gamma^2 U = 0, \quad x \in (0, 1), \\ U(0) &= U_0, \quad U(1) = U_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для определения U_h разобьем нормированную длину ОН R - C -0 ЭРП, т.е. отрезок $(0, 1)$, на конечные элементы так, как показано на рис. 3. Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ являются конечными элементами, где $i = \overline{1, n}$. Их длины обозначим через h_i . На каж-

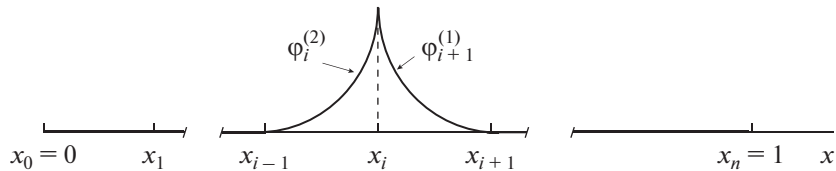


Рис. 3. Функция $\varphi_i(x)$ для конечного элемента.

дом КЭ $[x_{i-1}, x_i]$ введем две функции, $\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}$, как решения следующих задач:

$$\begin{cases} -(\varphi_i^{(1)})'' + \gamma^2 \varphi_i^{(1)} = 0, \\ \varphi_i^{(1)}(x_{i-1}) = 1, \quad \varphi_i^{(1)}(x_i) = 0, \\ -(\varphi_i^{(2)})'' + \gamma^2 \varphi_i^{(2)} = 0, \\ \varphi_i^{(2)}(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi_i^{(2)}(x_i) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что решения системы уравнений (7) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(1)}(x) &= \text{sh}(\gamma(x_i - x)) / \text{sh}(\gamma h_i), \\ \varphi_i^{(2)}(x) &= \text{sh}(\gamma(x - x_{i-1})) / \text{sh}(\gamma h_i). \end{aligned} \quad (8a)$$

Определим функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n-1}$ в соответствии с рис. 3:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(2)}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \varphi_i^{(1)}(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8b)$$

Для начального $[x_0, x_1]$ и последнего $[x_{n-1}, x_n]$ КЭ потребуем:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x), & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1], \end{cases} \\ \varphi_n(x) &= \begin{cases} \varphi_{n-1}^{(2)}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \notin [x_{n-1}, x_n]. \end{cases} \end{aligned}$$

Функцию $U_h(x)$ определим следующим образом:

$$U_h(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x), \quad (9)$$

где c_i – комплексные числа, $i = \overline{1, n-1}$, $c_0 = U_0$, $c_n = U_1$. Функция $U_h(x)$ вида (9) называется L -сплайном. Очевидно, $U_h(x)$ – непрерывная на $(0, 1)$ функция, $c_i = U_h(x_i)$. Кроме того, на каждом конечном элементе $U_h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L(U_h) = -U_h'' + \gamma^2 U_h = 0. \quad (10)$$

Для определения коэффициентов c_i воспользуемся методом Галеркина [5]. Обозначим через H_0

множество L -сплайнов ϑ_h , удовлетворяющих условию

$$\vartheta_h(0) = \vartheta_h(1) = 0.$$

Сплайн U_h определим из тождества:

$$a(U_h, \vartheta_h) = 0 \quad \text{для любых } \vartheta_h \in H_0. \quad (11)$$

Как видим, отличие от стандартного метода конечных элементов заключается лишь в том, что вместо кусочно-линейных сплайнов и соответствующих базисных функций используются L -сплайны и базисные функции, построенные выше.

Для определения коэффициентов сплайна $U_h(x)$ стандартно, как это принято в МКЭ, получается система алгебраических уравнений $\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{F}$. Матрица \mathbf{A} собирается из локальных матриц проводимости конечных элементов $\mathbf{A}' = \{a'_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1}^2$, с элементами

$$\begin{aligned} a'_{\alpha\beta} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} [d\varphi_l^{(\alpha)} / dx d\varphi_l^{(\beta)} / dx + \gamma^2 \varphi_l^{(\alpha)} \varphi_l^{(\beta)}] dx = \\ &= \frac{d\varphi_l^{(\alpha)}}{dx} \varphi_l^{(\beta)} \Big|_{x=x_{j-1}}^{x_j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя сюда выражение (8a), можно записать окончательно матрицу проводимости для l -го конечного элемента в следующем виде:

$$\mathbf{A}' = \frac{\gamma}{\text{sh}\gamma h_i} \begin{pmatrix} \text{ch}\gamma h_i & -1 \\ -1 & \text{ch}\gamma h_i \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Обозначим $H_i = \gamma h_i$, $a_i = (H_i / \text{sh} H_i) / h_i$ и проведем сборку матриц проводимости конечных элементов. Получим систему алгебраических уравнений МКЭ в следующем виде:

$$\begin{cases} -a_i c_{i-1} + (a_i \text{ch} H_i + a_{i+1} \text{ch} H_i) c_i - a_{i+1} c_{i+1} = 0, \\ i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = U_0, \quad c_n = U_1. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_i(c_i - c_{i-1}) - a_{i+1}(c_{i+1} - c_i) + \\ + [a_i(\text{ch} H_i - 1) + a_{i+1}(\text{ch} H_{i+1} - 1)] c_i = 0, \\ i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = U_0, \quad c_n = U_1. \end{cases} \quad (14)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} a_i(\operatorname{ch}H_i - 1) &= 2a_i \operatorname{sh}^2 \frac{H_i}{2} = \frac{\gamma \operatorname{sh}^2 \frac{H_i}{2}}{\operatorname{sh} \frac{H_i}{2} \operatorname{ch} \frac{H_i}{2}} = \\ &= \gamma \operatorname{th} \frac{H_i}{2} = \gamma^2 \left(\operatorname{th} \frac{H_i}{2} \right) \frac{h_i}{H_i}, \end{aligned}$$

то, определяя

$$\tilde{h}_i = \left(\operatorname{th} \frac{H_i}{2} \right) \frac{h_i}{H_i} + \left(\operatorname{th} \frac{H_{i+1}}{2} \right) \frac{h_{i+1}}{H_{i+1}},$$

представим систему (14) в следующем виде:

$$\begin{cases} -(D_x^2 c)_i + \gamma^2 c_i = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = U_0, & c_n = U_1, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$(D_x^2 c)_i = \frac{1}{\tilde{h}_i} \left[\frac{H_{i+1}}{\operatorname{sh} H_{i+1}} \frac{(c_{i+1} - c_i)}{h_{i+1}} - \frac{H_i}{\operatorname{sh} H_i} \frac{(c_i - c_{i-1})}{h_i} \right]. \quad (16)$$

Сравнивая (15) с дифференциальным уравнением (6) видим, что D_x^2 может рассматриваться как сеточная аппроксимация второй производной, где оператор D_x^2 определен выражением (16).

Оператор D_x^2 имеет простой и ясный вид в случае равномерной сетки, т.е. когда $h_i = h$, где $i = \overline{1, n}$. В этом случае имеем

$$(D_x^2 c)_i = -\delta \frac{c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}}{h^2},$$

где $\delta = (H/\operatorname{sh}H)^2$, $H = \gamma h/2$, а система уравнений (14) записывается в виде

$$\begin{cases} -\delta \frac{c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}}{h^2} + \gamma^2 c_i = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_0 = U_0, & c_n = U_1. \end{cases} \quad (17)$$

Найдя решение системы (17), вычисляем первичные параметры по формулам $\tilde{y}_{21} = -U_h'(0)$, $\tilde{y}_{22} = -U_h'(1)$. Расчеты показывают, что для этой схемы, названной нами “гибридной”, с ростом ω_n точность вычисляемых u -параметров ОН R - C -0 ЭРП не ухудшается, как в случае использования линейных функций. Более того, рассчитанные u -параметры совпадают с u -параметрами, вычисленными по аналитическим выражениям. Поэтому гибридная схема стала основой для разработки метода конечных распределенных элементов (МКРЭ).

Отмеченный выше факт легко понять, если рассмотреть лишь один конечный элемент. В этом случае ясно, что сплайн U_h является решением задачи (6). Докажем, что это верно и при произвольном числе конечных элементов. Для этого

достаточно убедиться в том, что схема (16) является точной для задачи (6) в том смысле, что после решения системы алгебраических уравнений мы получаем вектор $c = (U_0, c_1, \dots, c_{n-1}, U_1)$ такой, что $c_i = U(x_i)$, где U – аналитическое решение задачи (6).

Докажем это. Обозначим через z_k функцию погрешности:

$$z_h = \sum_{i=0}^n [c_i - U(x_i)] \varphi_i(x) \equiv U_h - U_I,$$

где

$$U_h = U_h(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x), \quad U_I = \sum_{i=0}^n U(x_i) \varphi_i(x).$$

Через \bar{z}_h обозначим сопряженную к z_h функцию. На каждом элементе в соответствии с (10) имеем

$$-\bar{z}_h'' + \gamma^2 \bar{z}_h = 0. \text{ Поэтому}$$

$$\begin{aligned} a(U - U_I, \bar{z}_h) &= \\ &= \sum_{i=1}^h \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[(U - U_I)' \bar{z}_h' + \gamma^2 (U - U_I) \bar{z}_h \right] dx = \quad (18) \\ &= \sum_{i=1}^h \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[-\bar{z}_h'' + \gamma^2 \bar{z}_h \right] (U - U_I) dx = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что по определению $a(U_h, \bar{z}_h) = 0$, $a(U, \bar{z}_h)$, получим

$$\begin{aligned} a(z_h, \bar{z}_h) &= a(U_h - U_I, \bar{z}_h) = a(U_h, \bar{z}_h) - a(U_I, \bar{z}_h) = \\ &= a(U, \bar{z}_h) - a(U_I, \bar{z}_h) = a(U - U_I, \bar{z}_h) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку из равенства

$$a(z_h, \bar{z}_h) = \int_0^1 \left(|z_h'|^2 + \gamma^2 |z_h|^2 \right) dx = 0$$

следует, что $z_h \equiv 0$, то $c_i = U(x_i)$, т.е. утверждение доказано.

1.3. Метод конечных распределенных элементов

Анализируя выражение для матрицы проводимости для l -го конечного элемента (13), можно заметить, что оно полностью совпадает с соответствующим выражением для отрезка однородной RC -линии со структурой слоев вида R - C -0 [1], который мы назвали одномерным однородным R - C -0-ЭРП.

Таким образом, конечный элемент “гибридной” схемы МКЭ может быть представлен в виде ее электрического аналога – ОО R - C -0-ЭРП, который назовем ОО конечным распределенным элементом (ОО КРЭ) со структурой слоев вида R - C -0. Тогда модель ОН R - C -0-ЭРП (см. рис. 1) на основе метода конечных распределенных элементов (МКРЭ) может быть представлена схемой замещения в виде каскадного соединения ОО КРЭ (рис. 4).

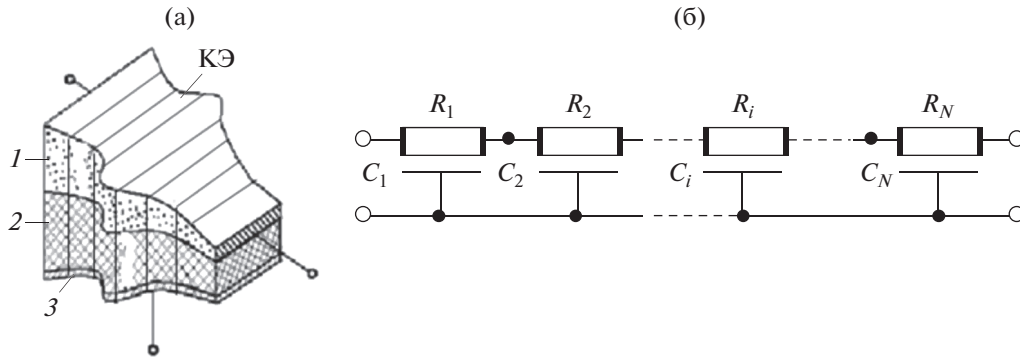


Рис. 4. Иллюстрация метода конечных распределенных элементов: а – ОН RC -0 ЭРП, разбитый на КЭ; б – схема замещения ОН RC -0-ЭРП на основе МКРЭ; 1 – резистивный слой, 2 – диэлектрик, 3 – идеальный проводник.

В данном случае при анализе конструкции ОН RC -ЭРП, представленной на рис. 4, схема замещения i -го КРЭ – ОО R_i - C_i -0 ЭРП (рис. 4б) имеет следующую Y -матрицу:

$$[Y_i]_{R-C-0} = \frac{\theta_i}{R_i \operatorname{sh} \theta_i} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \theta_i & -1 \\ -1 & \operatorname{ch} \theta_i \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $\theta_i = \sqrt{j\omega R_i C_i}$ – постоянная распространения i -го КРЭ, R_i , C_i – соответственно полное сопротивление и полная емкость i -го КРЭ.

В более общем случае в качестве КРЭ могут быть использованы и ОН RC -ЭРП с соответствующей структурой слоев, для которых имеются точные аналитические решения. Как видно, МКРЭ позволяет перевести задачу анализа конструкций RC -ЭРП (см. рис. 1) из области численных методов в область теории цепей (см. рис. 4б), которая отличается большей наглядностью.

В случае более сложной структуры слоев резистивно-емкостной среды для анализа конкретной конструкции RC -ЭРП необходимо разбить эту конструкцию на n КЭ, представить каждый КЭ соответствующим ему КРЭ, определить аналитически или численно параметры соответствующих многополюсников и применить МКРЭ.

Использование для решения этого класса задач классических методов решения уравнений в частных производных в известной нам литературе не встречалось.

2. АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ RC -ЭРП МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим приближенное решение двумерной задачи на основе гибридной схемы применительно к трехслойному двумерному однородному (ДО) RC -0 ЭРП, в котором потенциал в резистивном слое является функцией двух координат на плоскости. Уравнение распределения потен-

циала в его резистивном слое в установившемся режиме имеет вид [1]

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - T^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \gamma^2 \phi = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

где $T = l/b$ – коэффициент формы ДО RC -0 ЭРП (l – длина, b – ширина элемента).

Пусть в области нормированных координат $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ введена ортогональная сетка (рис. 5а). Узлы сетки пронумерованы в сквозном порядке слева-направо-снизу-вверх (глобальная нумерация), число узлов по оси x – N_1 , по оси y – N_2 . Пусть далее, $\dot{U}_i = \dot{U}(x_i)$ – значение функции U в точке сетки x_i .

Сеточную задачу с учетом соотношений (15) и (16) запишем в виде

$$-(D_x^2 \phi)_i - (D_y^2 \phi)_i + \gamma^2 \phi_i = 0, \quad x_i \in \omega_h,$$

$$(D_x^2 \phi)_i = \frac{1}{\hbar_i^x} \left[\frac{H_{i+1}^x}{\operatorname{sh} H_{i+1}^x} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h_{i+1}^x} - \frac{H_i^x}{\operatorname{sh} H_i^x} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h_i^x} \right],$$

$$(D_y^2 \phi)_i = \frac{1}{\hbar_i^y} \left[\frac{H_{i+N_1}^y}{\operatorname{sh} H_{i+N_1}^y} \frac{\phi_{i+N_1} - \phi_i}{h_{i+N_1}^y} - \frac{H_i^y}{\operatorname{sh} H_i^y} \frac{\phi_i - \phi_{i-N_1}}{h_i^y} \right],$$

где D_x^2 и D_y^2 – одномерные операторы, аппроксимирующие соответственно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad H_i^x = \gamma h_i^x, \quad H_i^y = \gamma h_i^y / T,$$

$$\hbar_i^x = \frac{h_i^x}{H_i^x} \operatorname{th} \frac{H_i^x}{2} + \frac{h_{i+1}^x}{H_{i+1}^x} \operatorname{th} \frac{H_{i+1}^x}{2},$$

$$\hbar_i^y = \frac{h_i^y}{H_i^y} \operatorname{th} \frac{H_i^y}{2} + \frac{h_{i+1}^y}{H_{i+1}^y} \operatorname{th} \frac{H_{i+1}^y}{2}.$$

При равномерной по каждому направлению сетки с шагами $h_1 = 1/(N_1 - 1)$, $h_2 = 1/(N_2 - 1)$ се-

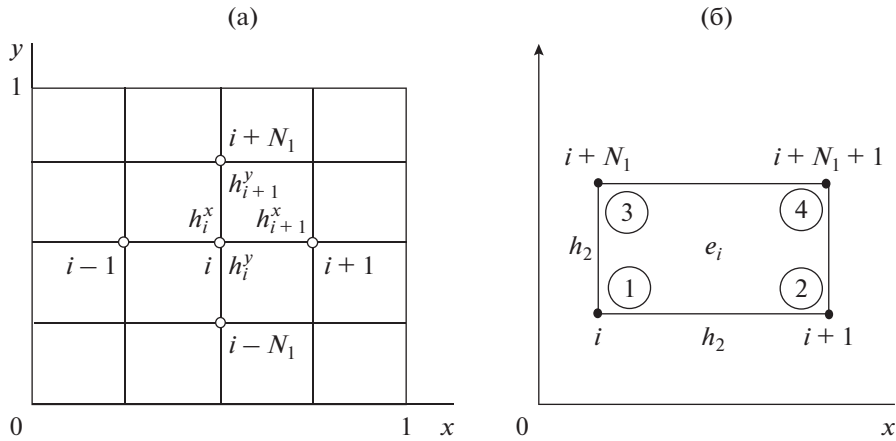


Рис. 5. Нумерация узлов сетки: а – глобальная; б – локальная.

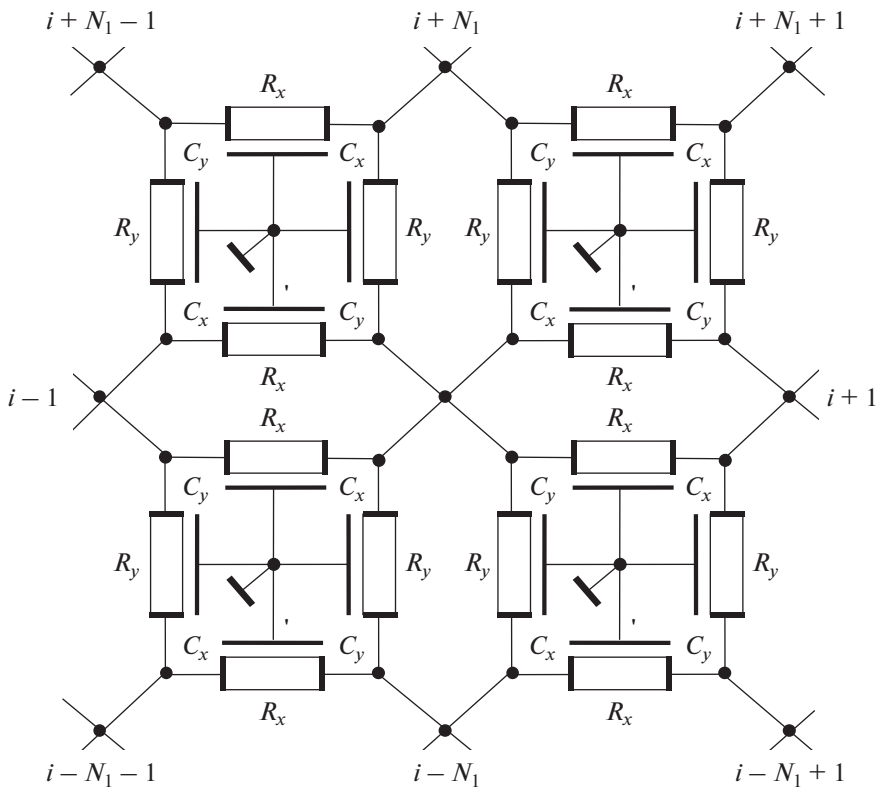


Рис. 6. Фрагмент схемы замещения участка ДО RC-ЭРП со структурой слоев вида R-C-0.

точная задача значительно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -\delta_x \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h_1^2} - \\
 & -\delta_y \frac{\varphi_{i+N_1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-N_1}}{h_2^2} + \gamma^2 \varphi_i = 0, \quad (21) \\
 & \delta_x = (H^x / \text{sh} H^x)^2, \quad \delta_y = (H^y / \text{sh} H^y)^2, \\
 & H^x = \gamma h_1 / 2, \quad H^y = \gamma h_2 / 2\Gamma.
 \end{aligned}$$

Матрица проводимости i -го конечного элемента (рис. 5б) в случае равномерной сетки имеет вид

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} c & -S_1 & -S_2 & 0 \\ -S_1 & c & 0 & -S_2 \\ -S_2 & 0 & c & -S_1 \\ 0 & -S_2 & -S_1 & c \end{bmatrix},$$

где с учетом (21) получаем

$$S_1 = \frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} \delta_x, \quad S_2 = \frac{1}{2} \frac{h_1}{h_2} \delta_y, \quad c = \frac{h_1 h_2 \gamma^2}{4} + S_1 + S_2.$$

Проведя сборку глобальной матрицы проводимости, учитывая матрицы проводимостей каждого конечного элемента и краевые условия, получим окончательную систему алгебраических уравнений, решение которой и даст приближенный ответ исходной задачи.

Физическая интерпретация сеточной задачи изображена на рис. 6, на котором представлен фрагмент схемы замещения участка ДО RC -ЭРП со структурой слоев вида $R-C-0$.

u -Параметры ДО $R-C-0$ ЭРП с заданной топологией при использовании МКРЭ легко вычислить в математических пакетах Mathcad, Matlab или в программах схемотехнического моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе предложен метод анализа элементов, выполненных на основе многослойной, в общем случае неоднородной, резистивно-емкостной среды, основанный на методе конечных элементов. Однако в отличие от классического МКЭ, основанном на линейных или билинейных функциях на конечном элементе, здесь используется гибридная схема, в которой функция, аппроксимирующая распределение потенциала на конечном элементе, является точным решением уравнения однородной или неоднородной RC -линии. На основе гибридной схемы

предложен метод конечных распределенных элементов, суть которого заключается в том, что каждый конечный элемент замещается ОО или ОН RC -ЭРП с соответствующей структурой слоев (ОО КРЭ для одномерной задачи) или набором ОО КРЭ по граням КЭ (ДО КРЭ для двумерной задачи). При этом для вычисления u -параметров функционального элемента на основе резистивно-емкостной среды нет необходимости находить распределение потенциалов в резистивных слоях этой среды. Достаточно определить первичные u -параметры полученного многополюсника – схемы замещения, составленной из КРЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гильмутдинов А.Х.* Резистивно-емкостные элементы с распределенными параметрами: анализ, синтез и применение. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2005.
2. *Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А.* Фрактальные элементы: Учебное пособие / Под ред. А.Х. Гильмутдинова / Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2013.
3. *Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 413.
4. *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986.
5. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир, 1988.