

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕОДНОРОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАЮЩИХ РЕШЕТОК

© 2020 г. С. Е. Банков*

*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

**E-mail: sbankov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 17.04.2019 г.

После доработки 25.08.2019 г.

Принята к публикации 01.09.2019 г.

Предложен метод решения граничных задач электродинамики бесконечных неоднородных двумерно-периодических антенных решеток — метод компенсирующих источников. Метод основан на представлении возбуждающего и рассеянного каждым элементарным излучателем решетки полей в виде разложения по системе векторных ортогональных волн. Введено понятие компенсирующего источника, который ассоциирован с элементом решетки и создает в пространстве поле, которое описывается заданным вектором амплитуд рассеянных волн. Решена задача о возбуждении бесконечной решетки компенсирующим источником и получена ее функция Грина, связывающая вектора амплитуд возбуждающих и рассеянных волн с компенсирующим источником. Предложена схема решения граничной задачи для решетки с дефектами в виде элементов, имеющих оператор рассеяния, отличный от оператора рассеяния элемента регулярной решетки. Рассмотрено решение задачи о решетке с удаленным из нее излучателем.

DOI: 10.31857/S0033849420020023

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Интерес к фазированным антенным решеткам (ФАР) с большим коэффициентом усиления (КУ) обусловлен их широким использованием в различных системах локации, связи, диагностики, научных исследованиях и т.д. Реализация высокого КУ неизбежно связана с увеличением числа элементарных излучателей (ЭИ) и, следовательно, электрических размеров ФАР. Несмотря на интенсивное развитие вычислительной техники и программного обеспечения, электродинамический анализ таких структур представляет сложную задачу, требующую больших затрат компьютерных ресурсов.

По этой причине широко используется приближение бесконечной решетки, в рамках которого ищется решение граничной задачи для одного периода структуры, так называемого канала Флоке [1]. Основанием для замены конечного объекта бесконечным является допущение о том, что ЭИ конечной решетки, достаточно удаленные от ее краев, функционируют в режиме, близком к режиму работы ЭИ бесконечной решетки. Такое допущение неоднократно проверялось и можно считать достаточно обоснованным.

Вместе с тем следует отметить, что важными этапами проектирования радиоэлектронной аппаратуры [2] являются такие виды работ как ана-

лиз чувствительности изделия к отклонениям его параметров от номинальных и статистический анализ, в рамках которого параметры устройства являются случайными величинами.

Выполнение указанных этапов связано с анализом неперриодических решеток, а точнее, неоднородных решеток с дефектами. Под дефектом понимаем любой ЭИ, имеющий параметры, отличающиеся от параметров излучателей регулярной решетки. При решении граничной задачи для решетки с дефектом мы уже не можем воспользоваться ее моделью в виде канала Флоке. В этом случае единственной возможностью оказывается решение задачи для неоднородной решетки конечных размеров.

Электродинамическому моделированию конечных ФАР больших размеров посвящено большое число работ, в которых анализируются различные методы, позволяющие рационализировать процесс решения граничной задачи и снизить затраты компьютерных ресурсов. Для нас наибольший интерес представляет группа методов, которую можно назвать методом обобщенной матрицы рассеяния (МОМР). Их объединяет общая идея, которая состоит в том, чтобы разделить поле в окрестности ЭИ на возбуждающее его поле, источником которого являются другие элементы

решетки, и рассеянное им поле [3, 4]. При этом в рассеянное поле входит также поле излучения ЭИ при возбуждении его со стороны входа излучателя и волны, отраженные от входа. Далее тем или иным образом вводится оператор рассеяния, связывающий два вида полей. Наиболее удобными являются матричные операторы, связывающие амплитуды возбуждающих и рассеянных волн. Такие операторы близки к известным в технике СВЧ обобщенным матрицам рассеяния (ОМР). Определение ОМР ЭИ является важным этапом данной группы методов.

Другим важным этапом является определение оператора связи между амплитудами волн на разных элементах решетки, поскольку волны, рассеянные некоторым ЭИ, являются одновременно падающими волнами для других ЭИ. Такой оператор имеет вид матрицы связи или матрицы взаимодействия. Применение операторов двух видов дает возможность формулировки матричной системы уравнений, которая полностью описывает волновые процессы в многоэлементной антенной системе.

Наиболее близким подходом к данной работе является вариант МОМР, в котором в качестве возбуждающих и рассеянных волн используются векторные сферические гармоники (ВСГ). Идея разложения по ВСГ (РВСГ) антенных полей была использована в работах [5–7], где развитие методы использовались не только для анализа ФАР, но и для решения задач рассеяния на аperiодически расположенных одинаковых объектах. Подходы, использованные в [7], наиболее близки к данной работе.

Метод ОМР разрабатывался для учета влияния конечных размеров ФАР. Такая решетка может рассматриваться как частный случай неоднородной периодической решетки. В рамках данной статьи нас будут интересовать, однако, неоднородности другого типа, а именно ЭИ с параметрами, отличными от параметров ЭИ регулярной решетки, которая остается бесконечной. При таком ограничении получаем возможность отдельного исследования влияния разных факторов на характеристики ФАР. Одним фактором является конечность ее размеров, а другим – сосредоточенные дефекты указанного выше типа.

Несмотря на то, что рассматриваемые в работе структуры имеют конечные размеры, будем использовать принятый в МОМР способ описания ЭИ и их связей друг с другом. В наиболее удобной для нашего исследования форме он изложен в работе [8], в которой рассматривается применение метода для анализа решеток щелевых и ленточных ЭИ.

Отметим, что задачи электродинамического анализа неоднородных периодических сред и структур характерны не только для теории ФАР,

но и для теории искусственных сред: метаматериалов, фотонных и электромагнитных кристаллов и т.д. [9]. Известно, что дефекты в кристаллических средах, находящихся в запрещенной зоне (полосе запираия) могут служить основой для создания разнообразных функциональных узлов СВЧ- и оптического диапазонов [10, 11]. При проектировании таких устройств возникают задачи, во многом аналогичные описанным выше, когда в бесконечной периодической среде создаются специальным образом организованные дефекты.

Для решения таких задач в работе [12] был предложен метод компенсирующих источников (МКИ). В наиболее полном виде он описан в работе [13]. В рамках МКИ, так же как и в рамках ОМР, возбуждающее и рассеянное поля представляются в стандартной форме разложения по некоторой системе волн.

Отличие МКИ состоит в определении понятия компенсирующего источника (КИ) и решении задачи о возбуждении таким источником бесконечной регулярной периодической структуры. Такое решение связывает амплитуды рассеянных элементами решетки волн с КИ. В рамках МКИ принята векторная запись амплитуд возбуждающих и рассеянных волн. При этом каждый элемент решетки характеризуется своими амплитудными векторами. Аналогично и КИ записывается в виде вектора.

Решение отмеченной выше задачи о возбуждении бесконечной структуры дает нам матрицу, связывающую амплитудные векторы с вектором, описывающим КИ. Эта матрица имеет смысл функции Грина однородной периодической структуры. Знание функции Грина позволяет простым способом описывать дефекты в фотонных и электромагнитных кристаллах. Отметим высокую вычислительную эффективность алгоритмов на основе МКИ [14]. Достаточно сказать, что размерность системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к которой сводится граничная задача, пропорционально числу дефектов, тогда как при использовании других подходов она пропорциональна общему числу элементов периодической структуры.

Цель данной работы – развить МКИ на случай бесконечной антенной решетки. Для этого, сохраняя описание ЭИ, принятое в МОМР, определим понятие КИ для данного класса структур и получим функцию Грина бесконечной антенной решетки. Затем предложим схему формулировки и решения граничной задачи для бесконечной структуры с дефектами. И в заключение рассмотрим пример использования данной теории для анализа решетки, в которой удален один ЭИ.

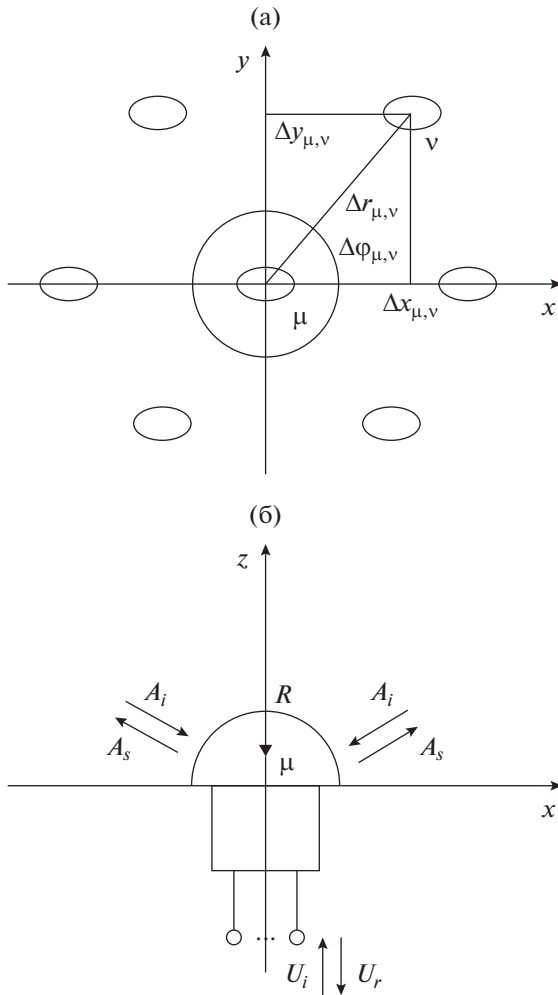


Рис. 1. Элементарные излучатели в решетке (а), возбуждающие, рассеянные, падающие и отраженные волны (б).

2. УРАВНЕНИЕ РЕШЕТКИ БЕЗ КОМПЕНСИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА ПО МЕТОДУ ОМР

В данном разделе приведем основные понятия и соотношения МОМР, необходимые для решения поставленных задач. Положение ЭИ в решетке обычно описывают при помощи двух индексов. В ряде случаев будем использовать такую нумерацию, однако на этапе вывода общих соотношений метода для сокращения записи удобнее ввести один векторный индекс v (см. рис. 1а):

$$v = (p, q), \quad (1)$$

где индекс p задает положение ЭИ по оси $0x$, а q — по оси $0y$. Также используем один векторный индекс N для определения типа ВСГ вместо двух обычно используемых индексов:

$$N = (n, m). \quad (2)$$

Здесь n — угломестный индекс ВСГ, а m — азимутальный индекс.

Введем далее следующие векторы:

$$\vec{E}_{i,sv} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \vec{E}_{i,sv,N-1} \\ \vec{E}_{i,sv,N} \\ \vec{E}_{i,sv,N+1} \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad \vec{H}_{i,sv} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \vec{H}_{i,sv,N-1} \\ \vec{H}_{i,sv,N} \\ \vec{H}_{i,sv,N+1} \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_{i,sv} = \begin{bmatrix} \cdot \\ A_{i,sv,N-1} \\ A_{i,sv,N} \\ A_{i,sv,N+1} \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Здесь $\vec{E}_{i,sv,N}$ — вектор электрического поля ВСГ, возбуждающей или рассеянной (нижние индексы i, s), заданной в локальной сферической системе координат связанной с центром ЭИ с номером v (см. рис. 1б). Индекс N задает номер волны. Аналогично задаются векторы магнитного поля $\vec{H}_{i,sv,N}$. Величины $A_{i,sv,N}$ — это амплитуды возбуждающих и рассеянных волн ЭИ с номером v . Явные выражения для полей ВСГ можно найти в [15].

Каждый ЭИ окружен полусферой с радиусом R . Важно, что полусфера выделенного ЭИ не имеет точек пересечения с соседними ЭИ. Источником возбуждающих волн для μ -го ЭИ являются волны, рассеянные всеми элементами решетки, за исключением μ -го. Источником рассеянных волн этого излучателя является дифракция возбуждающих волн на нем, а также падающие на его входы волны. Мы предполагаем, что таких входов может быть не один, а несколько. Объединяя амплитуды падающих волн $U_{i\mu,j}$ (j — номер входа), получаем вектор падающих волн μ -го ЭИ- $U_{i\mu}$. Аналогично можно получить вектор отраженных волн $U_{r\mu}$.

Отметим, что при отсутствии пересечений сфер, окружающих ЭИ, они оказываются расположенными вне областей, занятых источниками, что позволяет нам представить поля на них в виде разложений по ВСГ:

$$\vec{E}_v = \vec{E}_{iv} + \vec{E}_{sv}, \quad \vec{H}_v = \vec{H}_{iv} + \vec{H}_{sv},$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_{i,sv} \\ \vec{H}_{i,sv} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{i,sv} \begin{pmatrix} \vec{E}_{i,sv} \\ \vec{H}_{i,sv} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Нам необходимо различать векторы в пространстве ВСГ и векторы отраженных/падающих волн от векторов, заданных в физическом пространстве. Для обозначения векторов первых типов используем символы вида $\mathbf{A}$, а для обозначения векторов физического пространства используем стрел-

ки $\rightarrow$. В этом случае символ $\vec{E}$ обозначает вектор в пространстве ВСГ, элементами которого являются векторы из физического пространства, символ $\mathbf{A}$ описывает вектор из пространства ВСГ, элементами которого являются скалярные величины. Произведение вида $\mathbf{A}\vec{E}$ — это скалярное произведение в пространстве ВСГ, результатом которого является вектор из физического пространства.

Следующий этап МОМР — определение связи между амплитудами волн, рассеянных v -м ЭИ, и амплитудами волн, падающих на μ -й ЭИ. Для определения указанной связи нам необходимо осуществить разложение поля рассеянной волны v -го ЭИ в системе координат μ -го ЭИ. Эта задача решается разными способами. В работе [7] применена дополнительная теорема сложения для ВСГ, а в работе [8] предложена численная процедура, основанная на ортогональности ВСГ.

Вне зависимости от способа получения приходим к следующему соотношению:

$$\mathbf{A}_{i\mu} = \mathbf{K}_{\mu,v} \mathbf{A}_{sv}. \quad (5)$$

Матрицы $\mathbf{K}$ описывают искомую связь между амплитудами рассеянных на v -м и возбуждающих на μ -м элементах волн. Назовем их матрицами связи.

Далее нам необходимо ввести оператор рассеяния ЭИ. Этот оператор связывает амплитуды возбуждающих и рассеянных волн ЭИ. Отметим, что наряду с ВСГ он может возбуждаться волноводными волнами со стороны своих портов. Оператор рассеяния находится в результате решения электродинамической граничной задачи. Будем полагать, что оно известно и может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{s\mu} &= \mathbf{L}_{ss\mu} \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{sw\mu} \mathbf{U}_{i\mu}, \\ \mathbf{U}_{r\mu} &= \mathbf{L}_{ws\mu} \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{ww\mu} \mathbf{U}_{i\mu}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{L}$ — искомые операторы рассеяния. Для однородной решетки с одинаковыми ЭИ все операторы рассеяния также идентичны, поэтому для них индекс μ можно опустить.

Суммируя в выражении (5) по всем ЭИ, кроме μ -го, и подставляя в него соотношения (6), получаем основные уравнения МОМР:

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \sum_v^{(\mu)} \mathbf{L}_{ss} \mathbf{K}_{\mu,v} \mathbf{A}_{sv} + \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\mu}, \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{r\mu} = \sum_v^{(\mu)} \mathbf{L}_{ws} \mathbf{K}_{\mu,v} \mathbf{A}_{sv} + \mathbf{L}_{ww} \mathbf{U}_{i\mu}. \quad (8)$$

Верхний символ (μ) означает суммирование по всем ЭИ кроме μ -го.

Наибольший интерес представляет записанная в матричной форме СЛАУ (7), которая описывает взаимодействие ЭИ через свободное пространство.

3. КОМПЕНСИРУЮЩИЙ ИСТОЧНИК И ФУНКЦИЯ ГРИНА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Определим КИ следующим образом. Он ассоциирован с некоторым ЭИ с индексом ξ и создает рассеянные волны с амплитудным вектором $\mathbf{V}_\xi$. Тогда уравнение (7) при наличии КИ приобретает новый вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{s\mu} &= \sum_v^{(\mu)} \mathbf{W}_{\mu,v} \mathbf{A}_{sv} + \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\mu} + \mathbf{V}_\xi \delta_{\mu,\xi}, \\ \mathbf{W}_{\mu,v} &= \mathbf{L}_{ss} \mathbf{K}_{\mu,v}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\delta_{\mu,\xi}$ — символ Кронекера, равный единице при совпадении векторных индексов μ, ξ . Назовем матрицы $\mathbf{W}_{\mu,v}$ матрицами взаимодействий.

Отметим, что в силу периодичности решетки матрица взаимодействий зависит только от разности индексов $\mu - v$:

$$\mu - v = (p_\mu - p_v, q_\mu - q_v), \quad (10)$$

т.е. является матрицей Тейлора:

$$\mathbf{W}_{\mu,v} = \mathbf{W}_{\mu-v}.$$

Определим матрицу взаимодействий при $\mu - v = 0$ как нулевую матрицу. Тогда в СЛАУ (9) можем распространить суммирование на все элементы решетки. Применим далее к соотношению (9) двойное дискретное преобразование Фурье (ДПФ), предварительно введя следующие функции:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i,s}(\mathbf{k}) &= \sum_\mu \mathbf{A}_{i,s\mu} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mu), \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) &= \sum_\mu \mathbf{W}_\mu \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mu), \\ \mathbf{u}(\mathbf{k}) &= \sum_\mu \mathbf{U}_{i\mu} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mu). \end{aligned} \quad (11)$$

В соотношениях (11) для краткости записи используются обозначения:

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad \mathbf{r}_\mu = (p_\mu P_x, q_\mu P_y). \quad (12)$$

Здесь $P_{x,y}$ — периоды решетки по координатам x, y соответственно (рис. 2).

Теперь можем записать результат применения ДПФ к выражению (9):

$$(\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})) \mathbf{a}_s(\mathbf{k}) = \mathbf{L}_{sw} \mathbf{u}(\mathbf{k}) + \mathbf{V}_\xi \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\xi). \quad (13)$$

При записи соотношения (13) использована теорема свертки, $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Находим далее вектор $\mathbf{a}_s$:

$$\mathbf{a}_s(\mathbf{k}) = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}))^{-1} (\mathbf{L}_{sw} \mathbf{u}(\mathbf{k}) + \mathbf{V}_\xi \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\xi)). \quad (14)$$

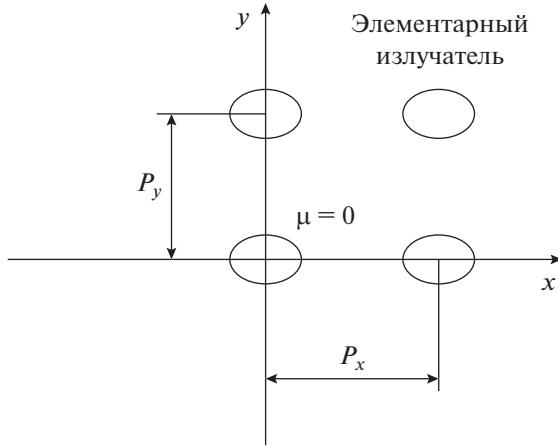


Рис. 2. Решетка с прямоугольной сеткой.

И с помощью обратного ДПФ находим искомые векторы $\mathbf{A}_{s\mu}$:

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \frac{P_x P_y}{4\pi^2} \int_{\mathbf{k}} (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}))^{-1} \times (\mathbf{L}_{sw} \mathbf{u}(\mathbf{k}) + \mathbf{V}_{\xi} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\xi})) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mu}) d\mathbf{k}. \quad (15)$$

Интегрирование в формуле (15) ведется по переменным $\mathbf{k}_{x,y}$ на интервалах $(-\pi/P_x, \pi/P_x)$, $(-\pi/P_y, \pi/P_y)$ соответственно.

Введем следующее обозначение:

$$\mathbf{G}_{s\mu,\xi} = \frac{P_x P_y}{4\pi^2} \int_{\mathbf{k}} (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}))^{-1} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mu-\xi}) d\mathbf{k}, \quad (16)$$

$$\mathbf{r}_{\mu-\xi} = \mathbf{r}_{\mu} - \mathbf{r}_{\xi}.$$

С учетом выражения (16) получаем

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{G}_{s\mu,\mathbf{v}} \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\mathbf{v}} + \mathbf{G}_{s\mu,\xi} \mathbf{V}_{\xi}. \quad (17)$$

Если в решетке присутствует множество КИ, то в формуле (17) необходимо осуществить суммирование по всем источникам:

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{G}_{s\mu,\mathbf{v}} \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\mathbf{v}} + \sum_{\xi} \mathbf{G}_{s\mu,\xi} \mathbf{V}_{\xi}. \quad (18)$$

Назовем функцию своих индексов $\mathbf{G}_{s\mu,\xi}$ функцией Грина бесконечной решетки для рассеянных волн. Нам будет полезно получить выражение для функции Грина возбуждающих волн, которая связывает векторы $\mathbf{A}_{i\mu}$ с КИ. Для этого воспользуемся соотношением (5), осуществив в нем суммирование по всем ЭИ, кроме μ -го:

$$\mathbf{A}_{i\mu} = \sum_{\mathbf{v}}^{(\mu)} \mathbf{K}_{\mu,\mathbf{v}} \mathbf{A}_{s\mathbf{v}}. \quad (19)$$

Применим к формуле (19) ДПФ, имея в виду, что матрица $\mathbf{K}_{\mu,\mathbf{v}}$ также зависит только от разности индексов:

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\mathbf{k}) \mathbf{a}_s(\mathbf{k}), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{k}) = \sum_{\mu} \mathbf{K}_{\mu} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mu}). \quad (20)$$

Подставим в выражение (20) соотношение (14):

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\mathbf{k}) (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}))^{-1} \times (\mathbf{L}_{sw} \mathbf{u}(\mathbf{k}) + \mathbf{V}_{\xi} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\xi})). \quad (21)$$

Введем обозначение:

$$\mathbf{G}_{i\mu,\xi} = \frac{P_x P_y}{4\pi^2} \int_{\mathbf{k}} \mathbf{Q}(\mathbf{k}) (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}))^{-1} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mu-\xi}) d\mathbf{k}. \quad (22)$$

Тогда, применяя к (21) обратное ДПФ, находим

$$\mathbf{A}_{i\mu} = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{G}_{i\mu,\mathbf{v}} \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\mathbf{v}} + \sum_{\xi} \mathbf{G}_{i\mu,\xi} \mathbf{V}_{\xi}. \quad (23)$$

Нетрудно увидеть, что матрица $\mathbf{G}_{i\mu,\xi}$ имеет смысл искомой функции Грина для падающих волн. Получим далее полезное соотношение, связывающее функции Грина $\mathbf{G}_{i\mu,\xi}$ и $\mathbf{G}_{s\mu,\xi}$. Умножим для этого слева выражение (22) на оператор $\mathbf{L}_{ss}$ и прибавим к нему слагаемое $\mathbf{E}\delta_{\mu,\xi}$. Отметим, что символ Кронекера можно представить в виде интеграла Фурье:

$$\delta_{\mu,\xi} = \frac{P_x P_y}{4\pi^2} \int_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mu-\xi}) d\mathbf{k}. \quad (24)$$

В результате получаем

$$\mathbf{L}_{ss} \mathbf{G}_{i\mu,\xi} + \mathbf{E}\delta_{\mu,\xi} = \frac{P_x P_y}{4\pi^2} \int_{\mathbf{k}} (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}))^{-1} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mu-\xi}) d\mathbf{k}. \quad (25)$$

Используя соотношение (16), получаем искомую связь функций Грина:

$$\mathbf{L}_{ss} \mathbf{G}_{i\mu,\xi} + \mathbf{E}\delta_{\mu,\xi} = \mathbf{G}_{s\mu,\xi}. \quad (26)$$

Рассмотрим также важный частный случай квазипериодического возбуждения решетки, который является типовым режимом работы ФАР. В этом режиме векторы $\mathbf{U}_{i\mathbf{v}}$ имеют вид

$$\mathbf{U}_{i\mathbf{v}} = \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\mathbf{v}}), \quad (27)$$

где $\mathbf{k}_0$ — заданный вектор, определяющий фазовые сдвиги между каналами решетки в квазипериодическом режиме. Отметим, что этот вектор определяет также углы излучения решетки в свободное пространство.

Находим ДПФ векторов $\mathbf{U}_{i\mathbf{v}} - \mathbf{u}(\mathbf{k})$, применяя формулу суммирования Пуассона [16]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi^2}{P_x P_y} \mathbf{U}_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad (28)$$

где $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ — двумерная дельта функция.

Подставим полученный результат в соотношения (14), (18) и (21), (23) и получим выражения для амплитудных векторов в квазипериодическом режиме:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{s\mu} &= \mathbf{q}_{s0} \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_\mu) + \sum_{\xi} \mathbf{G}_{s\mu, \xi} \mathbf{V}_{\xi}, \\ \mathbf{A}_{i\mu} &= \mathbf{q}_{i0} \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_\mu) + \sum_{\xi} \mathbf{G}_{i\mu, \xi} \mathbf{V}_{\xi}, \\ \mathbf{q}_{i0} &= \mathbf{Q}(\mathbf{k}_0)(\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}_0))^{-1} \mathbf{L}_{sw}, \\ \mathbf{q}_{s0} &= (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}_0))^{-1} \mathbf{L}_{sw}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что, как следует из полученных выше соотношений, а также из общего принципа линейности, возбуждение решетки внешними источниками в виде падающих на входы ЭИ волн можно рассматривать по отдельности, имея в виду, что реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций.

4. СЛАУ ДЛЯ РЕШЕТКИ С ДЕФЕКТАМИ

Получим в данном разделе СЛАУ, к которой сводится граничная задача о решетке с дефектами. Под дефектом будем понимать любой ЭИ, имеющий операторы рассеяния $\mathbf{L}^d$, отличающиеся от операторов рассеяния $\mathbf{L}$ регулярной решетки. Соотношения (6) для дефекта имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{s\mu} &= \mathbf{L}_{ss\mu}^d \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{sw\mu}^d \mathbf{U}_{i\mu}, \\ \mathbf{U}_{r\mu} &= \mathbf{L}_{ws\mu}^d \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{ww\mu}^d \mathbf{U}_{i\mu}. \end{aligned} \quad (30)$$

Их можно рассматривать в качестве граничных условий для амплитудных векторов на дефекте в регулярной решетке. Нас в большей степени интересует первое уравнение из (30), так как оно позволяет найти векторы $\mathbf{A}_{i, s\mu}$. После их определения при помощи второго соотношения (30) не составляет труда найти векторы $\mathbf{U}_{r\mu}$.

Допустим, что анализируемая неоднородная решетка является по-прежнему однородной, но в ЭИ с дефектами введены КИ. Тогда первое уравнение (30) приобретает вид

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \mathbf{L}_{ss\mu} \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{sw\mu} \mathbf{U}_{i\mu} + \mathbf{V}_{\xi} \delta_{\mu, \xi}. \quad (31)$$

Вместе с тем для ЭИ с дефектами, множество которых мы описываем при помощи индекса ξ , должно выполняться первое уравнение (30). Подставим его в соотношение (31) и найдем КИ:

$$\mathbf{V}_{\xi} = (\mathbf{L}_{ss\xi}^d - \mathbf{L}_{ss}) \mathbf{A}_{i\xi} + (\mathbf{L}_{sw\xi}^d - \mathbf{L}_{sw}) \mathbf{U}_{i\xi}. \quad (32)$$

Поскольку в выражение (32) входят только параметры ЭИ с дефектами, то символ Кронекера в нем опущен. При помощи найденной выше функции Грина можем выразить амплитудные

векторы $\mathbf{A}_{i\xi}$ через КИ и получить для них искомую СЛАУ, описывающую решетку с дефектами:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\xi} - \Delta \mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{\nu} \mathbf{G}_{i\xi, \nu} \mathbf{V}_{\nu} &= \\ = \Delta \mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{\nu} \mathbf{G}_{i\xi, \nu} \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\nu} + \Delta \mathbf{L}_{sw\xi} \mathbf{U}_{i\xi}. \end{aligned} \quad (33)$$

$$\Delta \mathbf{L}_{ss\xi} = \mathbf{L}_{ss\xi}^d - \mathbf{L}_{ss}, \quad \Delta \mathbf{L}_{sw\xi} = \mathbf{L}_{sw\xi}^d - \mathbf{L}_{sw}.$$

В правой части (33) находятся известные величины. В квазипериодическом режиме уравнение (33) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\xi} - \Delta \mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{\nu} \mathbf{G}_{i\xi, \nu} \mathbf{V}_{\nu} &= \\ = (\Delta \mathbf{L}_{ss\xi} \mathbf{q}_{i0} + \Delta \mathbf{L}_{sw\xi}) \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\xi}). \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим далее решение задачи о решетке в квазипериодическом режиме, в которой удален один ЭИ. Такой ЭИ не создает рассеянных волн, и поэтому для него выполняются соотношения:

$$\Delta \mathbf{L}_{ss\xi} = -\mathbf{L}_{ss}, \quad \Delta \mathbf{L}_{sw\xi} = -\mathbf{L}_{sw}. \quad (35)$$

Принимая во внимание, что решетка содержит единственный дефект, преобразуем уравнение (34) и находим неизвестный КИ:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\xi} &= -(\mathbf{E} + \mathbf{L}_{ss} \mathbf{G}_{i\xi, \xi})^{-1} (\mathbf{L}_{ss} \mathbf{q}_{i0} + \mathbf{L}_{sw}) \times \\ &\times \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\xi}). \end{aligned} \quad (36)$$

Используем соотношение (26):

$$\mathbf{V}_{\xi} = -(\mathbf{G}_{s\xi, \xi})^{-1} \mathbf{q}_{s0} \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\xi}). \quad (37)$$

Проверим выполнение граничного условия для ЭИ с дефектом, которое состоит в выполнении равенства $\mathbf{A}_{s\xi} = 0$. Для этого подставим полученное решение (37) в формулу (29). Нетрудно убедиться, что искомое равенство для решения (37) удовлетворяется.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДПФ МАТРИЦЫ СВЯЗЕЙ

Наиболее сложным с вычислительной точки зрения вопросом реализации алгоритма МКИ является расчет функции Грина решетки. Как видно из приведенных выше результатов, функция Грина представляется в виде двойного интеграла в конечных пределах от матричной функции $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})$, которая, в свою очередь, выражается через ДПФ множества матриц связей $\mathbf{Q}(\mathbf{k})$. Если матричная функция $\mathbf{Q}(\mathbf{k})$ определена, то дальнейший расчет функции Грина сводится к относительно простым операциям: взятию обратной матрицы и интегрированию в конечных пределах.

Отметим, что при решении аналогичной задачи для фотонных и электромагнитных кристаллов [9] интегрирование представляло существенную сложность, так как подынтегральные функ-

ции содержали полюса, которые необходимо было предварительно найти и затем особым образом учесть. Эти полюса соответствовали постоянным распространения собственных волн кристаллов. Их появление было следствием физической природы данных периодических структур, как сред, в которых распространяются электромагнитные волны.

В случае антенных решеток ситуация обратная. В них появление распространяющихся вдоль поверхности решетки волн является аномалией, которую стараются избежать, так как она может быть причиной возникновения эффекта ослепления решетки. Поэтому элементы матрицы $\omega(\mathbf{k})$, как правило, не содержат таких особенностей как полюса, и их можно интегрировать численно.

Таким образом, ключевым этапом при расчете функции Грина оказывается определение матричной функции $\mathbf{Q}(\mathbf{k})$. Взятие ДПФ связано с вычислением двойных медленно сходящихся рядов. Построение эффективного алгоритма решения этой задачи представляет особый интерес, и мы его рассмотрим в деталях.

Представим матричную функцию $\mathbf{Q}(\mathbf{k})$ следующим образом:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{k}) = \sum_{\mu \in S}^{(0)} (\mathbf{K}_\mu - \mathbf{K}_{a\mu}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mu) + \mathbf{Q}_a(\mathbf{k}), \quad (38)$$

$$\mathbf{Q}_a(\mathbf{k}) = \sum_{\mu}^{(0)} \mathbf{K}_{a\mu} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mu),$$

где $\mathbf{K}_{a\mu}$ — асимптотическое представление матрицы связей, верное при больших расстояниях между элементами решетки. В первом выражении (38) суммирование ведется в пределах некоторой конечной области S , а во втором — в бесконечных пределах по всем элементам решетки за исключением нулевого. Переход к суммированию в конечных пределах возможен благодаря тому, что разность матриц $\mathbf{K}_\mu - \mathbf{K}_{a\mu}$ убывает на бесконечности значительно быстрее, чем исходные матрицы связей. Конечную сумму можно брать численно. Таким образом, наша задача сводится к построению алгоритма определения матрицы $\mathbf{Q}_a(\mathbf{k})$, выражающейся через бесконечные ряды.

В работе [8] получено асимптотическое представление для элементов матрицы связей:

$$\mathbf{K}_{a\mu} = \left(\mathbf{a}_1 \frac{\exp(-ikr_\mu)}{r_\mu} + \mathbf{a}_2 \frac{\exp(-ikr_\mu)}{r_\mu^2} \right) \exp(-im\varphi_\mu), \quad (39)$$

$$\mathbf{m}_{N,M} = m_N - m_M,$$

где M — номер пространственной гармоники μ -го ЭИ, а N — номер гармоники нулевого ЭИ, m — азимутальный индекс гармоник, r_μ, φ_μ — радиальная и азимутальная координаты μ -го ЭИ в системе координат нулевого ЭИ, $\mathbf{a}_{1,2}$ — известные матрицы. Матричный азимутальный индекс $\mathbf{m}$ введен нами

для сокращения записи. Функцию от матричного индекса следует понимать в смысле почленного применения данной функции к его элементам, например, функция $\exp(-im\varphi_\mu)$ означает матрицу, элементы которой равны $\exp(-im_{N,M}\varphi_\mu)$.

К сожалению, непосредственно использовать выражения (39) для вычисления ДПФ нецелесообразно. Мы увидим далее, что для преобразования рядов удобно использовать представление членов ряда в виде интегралов Фурье. В то же время построить такие разложения для функций, входящих в формулу (39), затруднительно. Поэтому мы поступим следующим образом: введем новые асимптотические представления для матриц связей, которые отличаются от формул (39), но при $r_\mu \rightarrow \infty$ совпадают с ними с точностью до членов порядка r_μ^{-2} . Они имеют вид

$$\mathbf{K}_{a\mu} = \mathbf{F}_{1\mu} + \mathbf{F}_{2\mu}, \quad (40)$$

$$\mathbf{F}_{1\mu} = \mathbf{A}_1 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR_\mu)}{R_\mu} \exp(-im\varphi') d\varphi',$$

$$\mathbf{F}_{2\mu} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{A}_2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR_\mu)}{R_\mu} \exp(-im\varphi') d\varphi' \right), \quad (41)$$

$$R_\mu = \sqrt{r_\mu^2 - 2r_\mu r' \cos(\varphi_\mu - \varphi') + r'^2 + z^2}.$$

Параметр r' является свободным параметром, выбор которого обсудим ниже. Координата z в окончательных выражениях должна равняться нулю. Имея это в виду, далее знак предела будем опускать. Матрицы $\mathbf{A}_{1,2}$ будут определены из условия тождества асимптотик выражений (41) и (39). Возьмем в формулах (41) производную по z и получим в явном виде выражение для $\mathbf{F}_{2\mu}$:

$$\mathbf{F}_{2\mu} = -\mathbf{A}_2 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR_\mu)}{R_\mu^2} \left(ik + \frac{1}{R_\mu} \right) \exp(-im\varphi') d\varphi'. \quad (42)$$

Чтобы найти матрицы $\mathbf{A}_{1,2}$ необходимо определить асимптотики интегралов в (41) с точностью до слагаемых порядка r_μ^{-2} . Отметим, что главный член разложения для $\mathbf{F}_{1\mu}$ имеет порядок r_μ^{-1} , тогда как для $\mathbf{F}_{2\mu}$ он пропорционален r_μ^{-2} . Поэтому нам необходимо для $\mathbf{F}_{1\mu}$ найти оба асимптотических члена, а для $\mathbf{F}_{2\mu}$ можно ограничиться одним.

Решение поставленной задачи типично для теории излучающих структур [15]. Оно основано на разложении функции R_μ по степеням расстояния r_μ . При этом в отличие от задачи вычисления диаграммы направленности для определения слагаемых порядка r_μ^{-2} нам необходимо удерживать два члена разложения.

Опуская подробные преобразования, приведем выражения для асимптотик в интегральной форме:

$$F_{1a\mu} = A_1 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ik(r_\mu - r' \cos(\varphi_\mu - \varphi'))}{r_\mu} \times \left[1 + \frac{r'}{r_\mu} \cos(\varphi_\mu - \varphi') - \frac{ikr'^2}{4r_\mu} (1 - \cos 2(\varphi_\mu - \varphi')) \right] \exp(-im\varphi') d\varphi', \quad (43)$$

$$F_{2a\mu} = A_2 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ik(r_\mu - r' \cos(\varphi_\mu - \varphi'))}{r_\mu^2} \exp(-im\varphi') d\varphi'.$$

Воспользуемся далее известным соотношением [15]:

$$\exp(ikr' \cos(\varphi_\mu - \varphi')) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp(-in(\varphi_\mu - \varphi')) J_n(kr'), \quad (44)$$

где J_n — функция Бесселя.

Используя ортогональность функций $\exp(in\varphi')$ вычисляем интегралы в формулах (43) и получаем

$$F_{1a\mu} = \frac{\exp(-ikr_\mu - im\varphi_\mu)}{r_\mu} \left(\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{c}_1}{r_\mu} \right) A_1, \quad (45)$$

$$F_{2a\mu} = \frac{\exp(-ikr_\mu - im\varphi_\mu)}{r_\mu^2} \mathbf{c}_2 A_2, \quad \mathbf{b}_1 = 2\pi i^m J_m,$$

$$\mathbf{c}_1 = 2\pi i^{m+1} \times \left(\frac{J_{m+1} - J_{m-1}}{2} - \frac{kr'}{8} (J_{m+2} + J_{m-2} - 2J_m) \right), \quad (46)$$

$$\mathbf{c}_2 = -ik\mathbf{b}_1.$$

Требуя асимптотического равенства выражений (44) и (39), получаем соотношения для элементов матриц $A_{1,2}$:

$$A_{1N,M} = \frac{\mathbf{a}_{1N,M}}{\mathbf{b}_{1N,M}}, \quad A_{2N,M} = \frac{\mathbf{a}_{2N,M}}{\mathbf{c}_{2N,M}} - \frac{\mathbf{a}_{1N,M} \mathbf{c}_{1N,M}}{\mathbf{b}_{1N,M} \mathbf{c}_{2N,M}}. \quad (47)$$

Таким образом, задача определения искомых матриц решена и выражения (41), (42) определены полностью.

Следующий этап связан с выводом представлений функций $F_{1,2\mu}$ в виде двойных интегралов Фурье. Для этого воспользуемся формулой для

функции Грина свободного пространства, из которой следует:

$$\frac{\exp(-ikR_\mu)}{R_\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{\exp(-i\alpha(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}') - \gamma z)}{\gamma} d\alpha, \quad (48)$$

$$\gamma = \sqrt{|\alpha|^2 - k^2}, \quad |\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — вектор спектральных параметров, изменяющихся в бесконечных пределах, а $\mathbf{r} = (x, y)$ радиус-вектор, заданный в плоскости XOY . Интегрирование в (48) ведется по всей области определения спектральных параметров.

Подставим формулу (48) в выражения (40). Воспользуемся еще раз соотношением (44) для представления функции $\exp(-i\alpha\mathbf{r}')$ в виде разложения по азимутальным гармоникам и получим следующие интегральные представления функций $F_{1,2\mu}$:

$$F_{1\mu} = A_1 \int_{\alpha} \frac{\exp(-i\alpha\mathbf{r}_\mu - \gamma z - im\psi)}{\gamma} i^m J_m(|\alpha| r') d\alpha,$$

$$F_{2\mu} = -\frac{A_2}{z} \times \int_{\alpha} \exp(-i\alpha\mathbf{r}_\mu - \gamma z - im\psi) i^m J_m(|\alpha| r') d\alpha, \quad (49)$$

$$\psi = \text{atg}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Соотношения (49) удобны для преобразования ДПФ (38). Для вывода формулы для функции $Q_a(\mathbf{k})$ нам необходимо добавить в ряд слагаемое с $\mu = 0$ и вычесть его, чтобы сумма осталась неизменной. Определить функции $F_{1,20}$ можно при помощи формул (41) и (42), примем, что в них $r_\mu = 0$. Тогда от азимутальной координаты φ' будет зависеть только множитель $\exp(-im\varphi')$. Интеграл от него берется элементарно:

$$F_{10} = 2\pi A_1 \frac{\exp(-ikr')}{r'} \delta_{m,0}, \quad (50)$$

$$F_{20} = -2\pi A_2 \frac{\exp(-ikr')}{r'^2} \left(ik + \frac{1}{r'} \right) \delta_{m,0}.$$

Теперь, подставляя интегральное разложение (49) в ряд (38), можем воспользоваться формулой суммирования Пуассона [16]:

$$\sum_{\mu} \exp(-i(\alpha - \mathbf{k})\mathbf{r}_\mu) = \frac{4\pi^2}{P_x P_y} \sum_{n,m} \delta(\alpha - \mathbf{k}_{n,m}),$$

$$\mathbf{k}_{n,m} = (\kappa_{xn}, \kappa_{ym}), \quad \kappa_{xn} = \kappa_x + \frac{2\pi n}{P_x}, \quad (51)$$

$$\kappa_{ym} = \kappa_y + \frac{2\pi m}{P_y},$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, индексы n, m меняются от минус до плюс бесконечности. Ис-

пользуя свойство дельта-функции мы берем интеграл по $d\alpha$ и получаем

$$\begin{aligned} Q_a &= Q_{a1} + Q_{a2}, \quad Q_{a1} = A_1 \sum_{n,m} \frac{\exp(-\gamma_{n,m}z)}{\gamma_{n,m}} I_{n,m} - F_{10}, \\ Q_{a2} &= -\frac{A_2}{z} \sum_{n,m} \exp(-\gamma_{n,m}z) I_{n,m} - F_{20}, \\ I_{n,m} &= \exp(-im\psi_{n,m}) i^m J_m(|\alpha_{n,m}|r'). \end{aligned} \quad (52)$$

В формуле для Q_{a1} мы можем положить $z = 0$. Относительно Q_{a2} такое утверждение несправедливо, поскольку переменная z находится в знаменателе. Хотя формально ряды в соотношениях (52) сходятся, тем не менее проблема улучшения их сходимости достаточно актуальна. Далее рассмотрим прием, позволяющих одновременно улучшить сходимость рядов и совершить предельный переход при $z \rightarrow 0$.

Введем следующие функции:

$$\begin{aligned} \Phi_{1\mu} &= A_1 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-vR_\mu)}{R_\mu} \exp(-im\varphi') d\varphi', \\ \Phi_{2\mu} &= \frac{A_2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-vR_\mu)}{R_\mu} \exp(-im\varphi') d\varphi', \\ \Psi_{2\mu} &= \beta A_2 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-vR_\mu)}{R_\mu} \exp(-im\varphi') d\varphi', \\ \beta &= -(v^2 + k^2)/2. \end{aligned} \quad (53)$$

Они полностью аналогичны функциям $F_{1,2\mu}$ за исключением замены параметра ik параметром v . Он выбирается таким образом, чтобы все функции $\Phi_{1,2\mu}$, $\Psi_{2\mu}$, кроме $\Phi_{1,20}$, Ψ_{20} , можно было бы считать пренебрежимо малыми. Поскольку указанные функции убывают с ростом μ по экспоненциальному закону, близкому к $\exp(-vR_\mu)$, то удовлетворить поставленному требованию выбором значения v возможно.

Проводя преобразования, полностью аналогичные приведенным выше, можем найти ДПФ от последовательностей $\Phi_{1,2\mu}$, $\Psi_{2\mu}$. Приведем выражения для них в порядке, соответствующем формулам (53):

$$\begin{aligned} P_{a1} &= A_1 \sum_{n,m} \frac{\exp(-\xi_{n,m}z)}{\xi_{n,m}} I_{n,m} = \Phi_{10}, \\ P_{a2} &= -\frac{A_2}{z} \sum_{n,m} \exp(-\xi_{n,m}z) I_{n,m} = \Phi_{20}, \\ R_{a2} &= \beta A_2 \sum_{n,m} \frac{\exp(-\xi_{n,m}z)}{\xi_{n,m}} I_{n,m} = \Psi_{20}, \\ \xi_{n,m} &= \sqrt{|\alpha_{n,m}|^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Далее мы проводим с выражениями для $Q_{a1,2}$ эквивалентные преобразования, вычитая из них выражения для ДПФ в виде рядов и прибавляя к ним выражения для ДПФ через $\Phi_{1,20}$, Ψ_{20} :

$$\begin{aligned} Q_{a1} &= A_1 \sum_{n,m} \left(\frac{1}{\gamma_{n,m}} - \frac{1}{\xi_{n,m}} \right) I_{n,m} - F_{10} + \Phi_{10}, \\ Q_{a2} &= A_2 \sum_{n,m} \left(\gamma_{n,m} - \xi_{n,m} - \frac{\beta}{\xi_{n,m}} \right) I_{n,m} - F_{20} + \Phi_{20} + \Psi_{20}. \end{aligned} \quad (55)$$

Нетрудно убедиться, что общие члены рядов в (55) убывают значительно быстрее, чем в (52). Отметим также, что при выводе выражений (55) был совершен предельный переход при $z \rightarrow 0$. Соотношения (55) могут быть использованы для вычисления ДПФ матрицы связей.

6. МКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКИ

Во многих практически важных случаях представляет интерес анализ одномерных решеток. Уравнения МКИ для них аналогичны представленным выше. Исключение составляет только алгоритм вычисления ДПФ матрицы связей. Ниже подробно опишем его, остальные соотношения приводим без вывода.

Функции Грина однородной линейной решетки:

$$\begin{aligned} G_{s\mu,\xi} &= \frac{P}{2\pi} \int_{-\pi/P}^{\pi/P} (E - \omega(\kappa))^{-1} \exp(-i\kappa(\mu - \xi)P) d\kappa, \\ G_{i\mu,\xi} &= \frac{P}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\pi/P}^{\pi/P} Q(\kappa) (E - \omega(\kappa))^{-1} \exp(-i\kappa(\mu - \xi)P) d\kappa, \end{aligned} \quad (56)$$

где P – период решетки, μ, ξ – индексы, описывающие положение ЭИ и КИ в решетке.

Амплитудные векторы рассеянных и возбуждающих волн имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{s\mu} &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} G_{s\mu,v} L_{sv} U_{iv} + \sum_{\xi} G_{s\mu,\xi} V_{\xi}, \\ A_{i\mu} &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} G_{i\mu,v} L_{sv} U_{iv} + \sum_{\xi} G_{i\mu,\xi} V_{\xi}. \end{aligned} \quad (57)$$

Рассмотрим далее алгоритм вычисления ДПФ матрицы связей линейной решетки. Пред-

ставим матричную функцию $\mathbf{Q}(\kappa)$ в виде, аналогичном (38):

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\kappa) &= \sum_{\mu=-\mu_m}^{\mu_m} {}^{(0)}(\mathbf{K}_\mu - \mathbf{K}_{a\mu}) \exp(i\kappa\mu P) + \mathbf{Q}_a(\kappa), \\ \mathbf{Q}_a(\kappa) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} {}^{(0)}\mathbf{K}_{a\mu} \exp(i\kappa\mu P),\end{aligned}\quad (58)$$

где $\mathbf{K}_{a\mu}$ — асимптотическое представление матрицы связей, верное при больших расстояниях между элементами решетки. В работе [8] получено асимптотическое представление для элементов матрицы связей (39). Отметим, что для линейной решетки угол φ_μ принимает два значения: 0 при $\mu > 0$ и π при $\mu < 0$. Таким образом, вычисление матрицы $\mathbf{Q}_a(\kappa)$ сводится к суммированию рядов $S_{1,2}$:

$$S_1(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\exp(-i\mu x)}{\mu}, \quad S_2(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\exp(-i\mu x)}{\mu^2}. \quad (59)$$

Первый ряд берется аналитически [17]:

$$S_1(x) = \ln \frac{1}{1 - \exp(-ix)}. \quad (60)$$

Второй ряд суммировать аналитически не удается, но для него можно предложить приближенное выражение, выбирая в котором параметр N_m достаточно большим, можно рассчитать ряд $S_2(x)$ с любой требуемой точностью:

$$\begin{aligned}S_2(x) &= (1 + (\exp(ix) - 1) \ln(1 - \exp(-ix))) + \\ &+ \sum_{n=1}^{N_m} \exp(-inx) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right).\end{aligned}$$

На практике достаточно взять параметр N_m в пределах 5...7.

Ниже приводим окончательное выражение для матрицы $\mathbf{Q}_a(\kappa)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_a(\kappa) &= \frac{\mathbf{a}_1}{P} (S_1((k - \kappa)P)\mathbf{q} + S_1((k + \kappa)P)) + \\ &+ \frac{\mathbf{a}_2}{P^2} (S_2((k - \kappa)P)\mathbf{q} + S_2((k + \kappa)P)), \\ \mathbf{q}_{N,M} &= \exp(-i\pi(m_N - m_M)).\end{aligned}\quad (61)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе развит метод КИ для случая бесконечной антенной решетки, позволяющий решать граничные электродина-

мические задачи для решеток, содержащих дефекты, т.е. ЭИ с параметрами, отличающимися от параметров элементов регулярной структуры. Важным этапом развития МКИ является применение метода ОМР для описания ЭИ и их взаимодействия между собой через свободное пространство. В работе также рассмотрен имеющий важное практическое значение вопрос о построении эффективного алгоритма расчета функции Грина решетки, которая играет определяющую роль для применения МКИ.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банков С.Е., Курушин А.А. Электродинамика для пользователей САПР СВЧ. М.: Солон-Пресс, 2017.
2. Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь, 1987.
3. Xiao G.B., Mao J.F., Yuan B. // IEEE Trans. 2008. V. AP-56. № 12. P. 3723.
4. Xiang S., Xiao G., Tian X., Mao J. // IEEE Trans. 2013. V. AP-61. № 11. P. 5453.
5. Roblin C. // Proc. First Eur. Conf. on Antennas and Propagation. France, Nice. 2006. P. 1.
6. Кузикова Н.И. // Антенны. 2004. № 1. С. 79.
7. Mohammad A., Homayoon O. // IEEE Trans. 2018. V. AP-66. № 11. P. 6233.
8. Банков С.Е. // РЭ. 2020. Т. 65. № 1. С. 130.
9. Банков С.Е. Электромагнитные кристаллы. М.: Физматлит, 2010.
10. Joannopoulos J.D., Meade R.D., Winn J.N. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1995.
11. Mekis A., Chen J.C., Kurland I. et al. // Phys. Rev. Lett. V. 77. № 18. P. 3787.
12. Банков С.Е. // РЭ. 2005. Т. 50. № 9. С. 23.
13. Банков С.Е. // РЭ. 2019. Т. 64. № 11. С. 1049.
14. Bankov S.E., Duplenkova M.D. // First Intern. Congress on Advanced Electromagnetic materials in Microwaves and Optics. 21–26 October 2007. Rome. Italy. P. 288.
15. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983.
16. Амтей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. М.: Мир, 1974.
17. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2002. Т. 1.