РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 3, с. 294–302

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

К ВОПРОСУ О КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЛОТНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация
**E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 06.06.2018 г.
После доработки 06.06.2018 г.
Принята к публикации 15.08.2018 г.

Проведен анализ точных решений уравнений пучка, описывающих вырожденные потоки, обобщенные бриллюэновские состояния и плоские соленоидальные течения, не относящиеся к классу инвариантных решений. Указаны ранее неизвестные факты теории соленоидальных потоков во внешнем неоднородном магнитном поле и новые интерпретации вырожденных решений.

DOI: 10.31857/S0033849420030201

ВВЕДЕНИЕ

Построение наиболее полных наборов точных решений уравнений плотного электронного пучка связано с изучением групповых свойств этих уравнений и понятием инвариантного решения, введенного Л.В. Овсянниковым [1]. Результаты исследований наиболее полно представлены в монографии [2] и работах [3–7]. Важной функцией точных решений при современном уровне использования вычислительной техники является их роль в качестве имеющих физический смысл эталонов при тестировании численных моделей и приближенных построений. В последние десятилетия много внимания уделяется расчету пучков с экстремально высокой компрессией без достаточного внимания со стороны разработчиков прикладных пакетов к вопросам адекватности физической модели и точности вычислений. Отсутствие понимания известных положений теории интенсивных пучков приводит к некритическому восприятию результатов счета и абсурдным утверждениям в ряде публикаций последних лет. Эти проблемы обсуждаются в работе [8].

В то время как приближенные геометризованные модели плотных пучков прошли тестирование на полном наборе точных решений с мультипликативным и аддитивным разделением переменных [9], аналогичные исследования численных моделей автору неизвестны. Пакеты предыдущего поколения тестировались с использованием отдельных точных решений в работах [10, 11]. Заложенные в программы алгоритмы обеспечили ошибку на уровне 7 и 3% соответственно, которая удовлетворила их создателей. Для современных расчетов пучков с линейной компрессией порядка 30 ошибка не должна превышать десятых долей процента. Разработчики математических методов приближаются к этой цифре в одномерной области с исключенным влиянием особенности на катоде в ρ-режиме эмиссии [12].

Тестирование пакета PIC (Particle-in-Cell) [13] ориентировано на решение кинетического уравнения и имеет дело с гладкими функциями (MMS – method of manufactured solutions[1]). По этой причине оно не обеспечивает требуемой точности в электронно-оптических расчетах с тепловым зазором [8] и с сингулярностью на катоде в ρ- и T-режимах эмиссии. Эта программа, используемая и в задачах электронной оптики, как и прочие коммерческие пакеты, нуждается в тестировании на имеющих физический смысл точных решениях. Если в кинетике такие эталоны отсутствуют, то теория интенсивных пучков обеспечивает наборы решений, в совокупности соответствующие постановкам наиболее общих практических проблем.

Инвариантные решения связаны со свойствами симметрии исходных уравнений в частных производных, поэтому многим из них свойственна однородная структура параметров потока. Анализируемые в данной работе точные решения уравнений пучка не являются инвариантными, упомянутая симметрия для них не имеет места, что выражается в более сложных законах зависимости от координат. Поэтому эти решения пред-

[1] Некий аналог метода MMS в задаче с сингулярностями применен в работе [14].

ставляют ценный материал для проблемы тестирования приближенных и численных моделей.

Последующие соотношения приведены в нормировках, исключающих из уравнений пучка все физические постоянные используемой системы единиц.

1. ВЫРОЖДЕННЫЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОТОКИ

Понятие вырожденного решения введено в работе [15]. В криволинейной ортогональной системе ξ, η, ζ с циклической координатой ζ $(\partial/\partial\zeta = 0)$ и коэффициентами Ляме h_1, h_2, h_3 параметры пучка описываются выражениями

$$v_\xi = \frac{U(\xi)}{h_1}, \quad v_\eta = 0, \quad v_\zeta = \frac{W(\eta)}{h_3}, \quad A_\zeta = \frac{A(\eta)}{h_3},$$
$$A_\xi = A_\eta = 0, \quad H_\xi = \frac{1}{h_2 h_3} A'(\eta), \quad H_\eta = H_\zeta = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{v}$, $\vec{A}$, $\vec{H}$ – векторы скорости, векторного потенциала и напряженности магнитного поля. Компоненты обобщенного импульса $\vec{P} = \vec{v} + \vec{A}$ определены формулами

$$P_\xi = \frac{U(\xi)}{h_1}, \quad P_\eta = 0, \quad P_\zeta = \frac{1}{h_3}[W(\eta) + A(\eta)]. \qquad (2)$$

Уравнения немоноэнергетического пучка с полной энергией $\mathcal{H}$

$$\nabla\mathcal{H} = \vec{v} \times \operatorname{rot}\vec{P}, \quad \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0,$$
$$\Delta\varphi = \rho, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \varphi \qquad (3)$$

в развернутом виде с учетом структуры решения (1) описываются соотношениями

$$\mathcal{H}_{,1} = 0, \quad \mathcal{H}_{,2} = \frac{W(\eta)}{h_3^2}[W'(\eta) + A'(\eta)], \quad \mathcal{H}_{,3} = 0,$$
$$\frac{h_2 h_3}{h_1}\rho U(\xi) = J(\eta), \qquad (4)$$
$$\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\varphi_{,1}\right)_{,1} + \left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\varphi_{,2}\right)_{,2} = h_1 h_2 h_3 \rho.$$

Здесь φ, ρ, J – потенциал электрического поля, плотность пространственного заряда и плотность тока; нижний численный индекс после запятой означает частную производную по координате с соответствующим номером; штрих имеет тот же смысл в случае одной переменной.

Спиральные цилиндрические координаты. В спиральных цилиндрических координатах p, q, z имеем

$$p + iq = \frac{b_1 + ib_2}{b^2}\ln(x + iy); \quad b_1, b_2 = \text{const},$$
$$b^2 = b_1^2 + b_2^2; \quad p = \frac{1}{b^2}(b_1 \ln R - b_2\psi),$$
$$q = \frac{1}{b^2}(b_2 \ln R + b_1\psi), \qquad (5)$$
$$R = \exp(b_1 p + b_2 q), \quad \psi = b_1 q - b_2 p,$$
$$h_1 = h_2 = b\exp(b_1 p + b_2 q), \quad h_3 = 1.$$

Здесь x, y, z и R, ψ – декартовы и полярные координаты; компоненты скорости в первой системе обозначим символами u, v, w; в криволинейных системах будем использовать буквенный нижний индекс у символа v.

Решение уравнений (4) в этом случае описывается формулами

$$\Phi'' + 4b_2^2\Phi = J_0 b^2 \frac{\exp(2b_1 p)}{U(p)} + \rho_0,$$
$$\Phi = \frac{\exp(-2b_1 p)}{b^2} U^2(p),$$
$$v_p = U(p)\exp(-b_1 p - b_2 q), \quad v_q = 0,$$
$$w = W(q) = -\frac{\rho_0}{2b_2 H_0}\exp(-2b_2 q) + E_0,$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\left[\Phi(p) - \frac{\rho_0}{2b_2^2}\right]\exp(-2b_2 q) - E_0 q, \qquad (6)$$
$$J(q) = \rho U(p) = J_0 \exp(-4b_2 q),$$
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}W^2(q) + \frac{\rho_0}{4b_2^2}\exp(-2b_2 q) + E_0 q,$$
$$A_p = A_q = 0, \quad A_z = H_0 q;$$
$$H_p = \frac{H_0}{b}\exp(-b_1 p - b_2 q), \quad H_q = H_z = 0.$$

Символы с нулями здесь и далее означают произвольные постоянные.

Решение (6) отличается от инвариантного решения в спиральных координатах при $\alpha = -1$ [16]

$$\vec{v} = \exp(\alpha b_2 q)\vec{V}(p), \quad \varphi = \exp(2\alpha b_2 q)\Phi(p),$$
$$\rho = \exp[2(\alpha - 1)b_2 q]S(p),$$
$$J = J_0 \exp[(3\alpha - 2)b_2 q], \qquad (7)$$
$$\vec{H} = \exp[(\alpha - 1)b_2 q]\vec{\Omega}(p)$$

неоднородной структурой компонент скорости, наличием слагаемого с E_0 в выражении для φ и видом зависимости от координаты q у компоненты магнитного поля H_p и плотности тока J.

Полярные координаты. В полярной системе R, ψ при $\partial/\partial z = 0$ возможны два решения. В первом случае

$$\begin{gathered}\xi = R,\ \ \eta = \psi,\ \ \zeta = z;\ \ h_1 = 1,\ \ h_2 = R,\\ h_3 = 1;\\ v_R = U(R),\ \ v_\psi = 0,\ \ w = W(\psi),\\ A_R = A_\psi = 0,\ \ A_z = A(\psi).\end{gathered} \tag{8}$$

Решение уравнений (4) определено формулами

$$\begin{gathered}(R\Phi')' - \frac{\rho_0}{R} = \frac{J_0}{\sqrt{2\Phi}},\ \ \Phi(R) = \frac{1}{2}U^2(R),\\ v_R = U(R),\ \ v_\psi = 0,\ \ w = W(\psi) = \frac{\rho_0}{H_0}\psi + W_0,\\ J = \rho R U(R) = J_0,\\ \varphi = \Phi(R) - \frac{1}{2}\rho_0\psi^2 - H_0W_0\psi,\\ \mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho_0\left(1 + \frac{\rho_0}{H_0^2}\right)\psi^2 + \left(\frac{\rho_0}{H_0} + H_0W_0\right)\psi + \frac{1}{2}W_0^2,\\ A_R = A_\psi = 0,\ \ A_z = H_0\psi;\ \ H_R = \frac{H_0}{R},\\ H_\psi = H_z = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Структура решения (9) не имеет близких выражений среди инвариантных решений уравнений пучка.

Второе решение в координатах R, ψ имеет вид

$$\begin{gathered}\xi = \psi,\ \ \eta = R,\ \ \zeta = z;\ \ h_1 = R,\ \ h_2 = 1,\ \ h_3 = 1;\\ v_\psi = \frac{U(\psi)}{R},\ \ v_R = 0,\ \ w = W(R),\\ A_R = A_\psi = 0,\ \ A_z = A(R).\end{gathered} \tag{10}$$

Уравнения (4) допускают следующее решение, причем выражение функции Φ можно свести к квадратуре:

$$\begin{gathered}\Phi'' + 4\Phi + \rho_0 = \frac{J_0}{\sqrt{2\Phi}},\ \ \Phi = \frac{1}{2}U^2(\psi),\\ \psi = \int\frac{UdU}{\sqrt{2J_0U - \rho_0U^2 - U^4}},\ \ v_\psi = \frac{U(\psi)}{R},\\ v_R = 0,\ \ w = W(R) = \frac{\rho_0}{2H_0}\frac{1}{R^2} + W_0,\\ \varphi = \frac{1}{R^2}\Phi(\psi) + \frac{\rho_0}{4}\frac{1}{R^2} - H_0W_0\ln R,\\ J(R) = \frac{\rho U(\psi)}{R} = \frac{J_0}{R^5},\\ \mathcal{H} = \frac{\rho_0^2}{8H_0^2}\frac{1}{R^4} + \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{W_0}{H_0} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{R^2} + H_0W_0\ln R,\\ A_R = A_\psi = 0,\ \ A_z = H_0\ln R;\ \ H_R = H_z = 0,\\ H_\psi = -\frac{H_0}{R}.\end{gathered} \tag{11}$$

Инвариантное решение в координатах R, ψ имеет следующую структуру:

$$\begin{gathered}\vec{v} = R^\alpha\vec{V}(\psi),\ \ \varphi = R^{2\alpha}\Phi(\psi),\ \ \rho = R^{2(\alpha-1)}S(\psi),\\ J = J_0R^{3\alpha-2},\ \ \vec{H} = R^{\alpha-1}\vec{\Omega}(\psi).\end{gathered} \tag{12}$$

Решение (11) имеет те же зависимости, что и решение (12) при $\alpha = -1$ у функций v_R, ρ и φ за вычетом логарифмического члена, но отличную структуру z-компоненты скорости и магнитного поля.

Цилиндрические координаты. Решение в системе R, ψ, z с осевой симметрией $\partial/\partial\psi = 0$ определено выражениями

$$\begin{gathered}\xi = z,\ \ \eta = R,\ \ \zeta = \psi;\ \ h_1 = 1,\ \ h_2 = 1,\ \ h_3 = R;\\ w = W(z),\ \ v_R = 0,\ \ v_\psi = V(R)/R,\\ A_R = A(R),\ \ A_z = A_\psi = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Решение уравнений (4) приводит к следующему результату:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(W^2\right)'' - \frac{J_0}{W} = \rho_0 = -\frac{1}{R}(R\Phi')',\ \ \rho W = J_0,\\ \varphi = \Phi(R) + \frac{1}{2}W^2(z),\ \ \Phi(R) = -\mathcal{H}(R) + \frac{1}{2}v_\psi^2(R),\\ V^2 + H_0R^2V - \left(\frac{1}{2}\rho_0R^4 + b_0R^2\right) = 0,\\ \varphi = \frac{1}{2}W^2(z) - \frac{1}{4}\rho_0R^2 - b_0\ln R,\\ \mathcal{H} = \frac{1}{2}v_\psi^2(R) + \frac{1}{4}\rho_0R^2 + b_0\ln R,\\ A_R = \frac{1}{2}H_0R^2,\ \ A_z = A_\psi = 0;\\ H_R = H_\psi = 0,\ \ H_z = H_0.\end{gathered} \tag{14}$$

Для решения (14) необходимо специально рассмотреть варианты, касающиеся функций V и W. Из уравнения для V имеем

$$V = -\frac{H_0}{2}R^2 \pm R\sqrt{D},\ \ D = \left(\frac{H_0^2}{4} - \frac{\rho_0}{2}\right)R^2 - b_0. \tag{15}$$

При $b_0 = 0$ азимутальная скорость линейна по R, пучок вращается как твердое тело в однородном магнитном поле $H_z = H_0$. Этот случай описывается инвариантным решением с линейной зависимостью от координат у компонент u, v скорости в декартовой системе при зависимости $w = w(z)$.

При $b_0 \neq 0$ распределение азимутальной скорости по радиусу становится более сложным. Существование действительных корней в (15) требует выполнения неравенства

$$R^2 \geq b_0\Big/\left(\frac{H_0^2}{4} - \frac{\rho_0}{2}\right) > 0. \tag{16}$$

При $b_0 > 0$ условие (16) выполняется всегда, если $\rho_0 < 0$, и при $H_0^2/4 > \rho_0/2$, если $\rho_0 > 0$.

При $b_0 < 0$ допустимы только положительные значения ρ_0: $\rho_0/2 > H_0^2/4$. Равенство в (16) определяет радиус полости $R = R_*$, которая не может быть заполнена пучком. Азимутальная скорость на ее границе $v_\psi = -(H_0/2)R_*$.

В зависимости от знака ρ_0 функция $W(z)$ имеет разный характер. Вводя вместо z новую переменную t, имеем

$$W = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}, \;\; W(WW')' - \rho_0 W = J_0, \quad \ddot{W} - \rho_0 W = J_0. \tag{17}$$

При $\rho_0 = a^2$ и выполнении условий: $t = 0$, $z = 0$, $W = 0$ получаем

$$\bar{z} = \frac{a^3 z}{J_0} = \operatorname{sh}\tau - \tau, \;\; \bar{W} = \frac{a^2 W}{J_0} = \operatorname{ch}\tau - 1, \quad \tau = at. \tag{18}$$

Для отрицательных значений $\rho_0 = -a^2$ вариация продольной скорости подчиняется закону укороченной циклоиды:

$$\bar{z} = \frac{a^3 z}{J_0} = \tau - \gamma\sin\tau, \;\; \bar{W} = \frac{a^2 W}{J_0} = 1 - \gamma\cos\tau, \quad \gamma = \frac{A_0 a^2}{J_0} < 1, \tag{19}$$

где A_0 – произвольная постоянная.

Зависимости от продольной координаты в решении (19) те же, что и в осесимметричном варианте решения [17], являющегося инвариантным.

2. ОБОБЩЕННЫЕ БРИЛЛЮЭНОВСКИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОТОКИ

Уравнения бриллюэновских пучков. В работе [18] рассмотрены двумерные релятивистские течения с равным нулю обобщенным импульсом $\vec{P}$, которые описываются следующей системой уравнений:

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \;\; \operatorname{rot}\vec{H} = \rho\vec{v}, \;\; \Delta\varphi = \rho, \quad \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0, \;\; \operatorname{div}\vec{H} = 0; \tag{20}$$
$$\vec{P} = \vec{p} + \vec{A} \equiv 0, \;\; \vec{p} = (1+\varphi)\vec{v}, \;\; (1+\varphi)^2 = 1 + \vec{p}^2.$$

Последнее уравнение в системе (20), которая является переопределенной, представляет интеграл энергии. Уравнение сохранения тока автоматически удовлетворяется в релятивистском случае.

В ортогональной системе ξ, η, ζ ($\partial/\partial\zeta = 0$, ζ – циклическая координата), в качестве которой будем рассматривать декартовы x, y, z и цилиндрические R, ψ, z координаты с коэффициентами Ляме $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ и $h_1 = 1, h_2 = R, h_3 = 1$ соответственно, согласно [18] будем считать

$$v_\xi = A_\xi = 0. \tag{21}$$

Уравнения (20) в этом случае принимают вид

$$\left[\frac{1}{h_2}(h_2 A_\eta)_{,1}\right]_{,2} = 0, \;\; \left[\frac{1}{h_2}(h_2 A_\eta)_{,1}\right]_{,1} = \sigma A_\eta,$$
$$(h_2 A_{\zeta,1})_{,1} + \left(\frac{1}{h_2}A_{\zeta,2}\right)_{,2} = h_2\sigma A_\zeta,$$
$$(h_2\varphi_{,1})_{,1} + \left(\frac{1}{h_2}\varphi_{,2}\right)_{,2} = h_2\sigma(1+\varphi), \tag{22}$$
$$(1+\varphi)^2 = 1 + A_\eta^2 + A_\zeta^2,$$
$$H_\xi = \frac{1}{h_2}A_{\zeta,2}, \;\; H_\eta = -A_{\zeta,1}, \;\; H_\zeta = \frac{1}{h_2}(h_2 A_\eta)_{,1},$$
$$(h_2 H_\xi)_{,1} + H_{\eta,2} = 0, \;\; \sigma = \frac{\rho}{1+\varphi}.$$

Декартовы координаты. В декартовых координатах вместо (22) имеем

$$A_{y,12} = 0, \;\; A_{y,11} = \sigma A_y, \;\; A_{z,11} + A_{z,22} = \sigma A_z, \quad \varphi_{,11} + \varphi_{,22} = \sigma(1+\varphi), \quad (1+\varphi)^2 = 1 + A_y^2 + A_z^2. \tag{23}$$

Определив функции A_y, A_z соотношениями

$$A_y = A(x), \;\; A_z = a(x)\operatorname{sh}[b_0 y + c(x)], \tag{24}$$

приходим к следующему решению:

$$\sigma = \frac{A''(x)}{A}, \;\; A^2(x) = a^2(x) - 1, \quad 1 + \varphi = a(x)\operatorname{ch}[b_0 y + c(x)], \tag{25}$$

где функции $c(x)$, $A(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$c' = \frac{c_0}{1 + A^2}, \;\; \frac{A''}{A} = \frac{A'^2 + c_0^2}{1 + A^2} + b_0^2(1 + A^2). \tag{26}$$

В окончательном виде параметры потока определены формулами

$$p_x = 0, \;\; p_y = -A(x), \;\; p_z = -a(x)\operatorname{sh}[b_0 y + c(x)],$$
$$1 + A^2 = a^2, \;\; 1 + \varphi = a(x)\operatorname{ch}[b_0 y + c(x)],$$
$$\rho = (1+\varphi)\frac{A''(x)}{A}, \tag{27}$$
$$H_x = b_0 a(x)\operatorname{ch}[b_0 y + c(x)], \;\; H_z = A'(x),$$
$$H_y = -a'(x)\operatorname{sh}[b_0 y + c(x)] - a(x)c'(x)\operatorname{ch}[b_0 y + c(x)].$$

Цилиндрические координаты. В цилиндрических координатах R, ψ, z решение имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
p_R = 0,\ \ p_\psi = -A(R),\ \ p_z = -a(R)\operatorname{sh}[b_0\psi + c(R)],\\
1 + A^2 = a^2,\ 1 + \varphi = a(R)\operatorname{ch}[b_0\psi + c(R)],\\
\rho = (1+\varphi)\frac{1}{R^2}\left(\frac{\ddot A}{A} - 1\right),\\
H_R = \frac{b_0}{R}a(R)\operatorname{ch}[b_0\psi + c(R)],\\
H_z = A'(R) + \frac{A(R)}{R},\\
H_\psi = -a'(R)\operatorname{sh}[b_0\psi + c(R)] -\\
- a(R)c'(R)\operatorname{ch}[b_0\psi + c(R)].
\end{gathered} \tag{28}$$

В формуле для ρ в (28) точками обозначены производные по $\ln R$. Функции $c(R)$, $A(R)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot c = \frac{c_0}{1 + A^2},\ \ \frac{\ddot A}{A} = \frac{\dot A^2 + c_0^2 + 1}{1 + A^2} + b_0^2\left(1 + A^2\right). \tag{29}$$

Течения с одной компонентой скорости. Для декартовых и цилиндрических координат расположим оси так, чтобы третьей была циклическая координата. Соответственно этому $h_1 = h_2 = 1$; $h_3 = 1$, $\zeta = z$; $h_3 = R$, $\zeta = \psi$. В работах [18, 19] рассмотрены пучки с единственной отличной от нуля компонентой обобщенного импульса

$$\begin{gathered}
P_\zeta = p_\zeta(\xi,\eta) + A_\zeta(\xi,\eta) = P(\xi,\eta),\\
A_\zeta = \frac{1}{h_3}A(\xi,\eta),\ \ p_\xi = p_\eta = A_\xi = A_\eta = 0.
\end{gathered} \tag{30}$$

Вихревые немоноэнергетические потоки описываются уравнениями поля из (22) и уравнениями движения из (3) с релятивистскими выражениями для полной энергии и импульса:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec v^2}} - \varphi,\ \ \vec p = \frac{\vec v}{\sqrt{1 - \vec v^2}},\ \ \vec P = \vec p + \vec A. \tag{31}$$

Для течений (30) получаем

$$\begin{gathered}
\mathcal{H}_{,1} = \frac{v_\zeta}{h_3}P_{\zeta,1},\ \ \mathcal{H}_{,2} = \frac{v_\zeta}{h_3}P_{\zeta,2},\\
\left(\frac{1}{h_3}A_{,1}\right)_{,1} + \left(\frac{1}{h_3}A_{,2}\right)_{,2} = -\sigma p_\zeta,\\
(h_3\varphi_{,1})_{,1} + (h_3\varphi_{,2})_{,2} = h_3\sigma u,\\
u^2 = \frac{1}{1 - v_\zeta^2} = 1 + p_\zeta^2,\ \ \rho = \sigma u.
\end{gathered} \tag{32}$$

Нерелятивистский предел. В нерелятивистском пределе при $P = 0$ уравнение для A в (32) имеет нулевую правую часть. Для бриллюэновского потока с одной отличной от нуля компонентой скорости w в неоднородном магнитном поле векторный потенциал A удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа на плоскости x, y:

$$\begin{gathered}
w = -A,\ \ 2\varphi = A^2,\ \ \rho = (\nabla A)^2,\\
H_x = A_{,y},\ \ H_y = -A_{,x},\ \ H_z = 0.
\end{gathered} \tag{33}$$

Решением является любая гармоническая функция $A(x,y)$, вид которой можно усложнять, пользуясь следующим ее свойством. Если аргументы x, y заменить на функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, также гармонические, которые связаны условиями Коши–Римана, то функция $A(u,v)$ останется гармонической [20]. В работе [20] приведены примеры подобных действий, которые можно перенести на описываемые ниже релятивистские течения в z-направлении.

В цилиндрических координатах, если известно решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial A}{\partial R}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0, \tag{34}$$

то существует течение с одной азимутальной компонентой скорости v_ψ [18, 19] и следующими параметрами:

$$\begin{gathered}
vJ_\psi = -\frac{A}{R},\ \ 2\varphi = \frac{A^2}{R^2},\\
\rho = \frac{1}{R}\left[(R\varphi_{,R})_{,R} + (R\varphi_{,z})_{,z}\right],\\
H_R = -\frac{1}{R}A_{,z},\ \ H_z = \frac{1}{R}A_{,R}.
\end{gathered} \tag{35}$$

Решения в элементарных и специальных функциях для этого случая в различных криволинейных системах координат получены в работе [20].

Релятивистские скорости. В случае релятивистских скоростей система уравнений (32) в декартовых координатах имеет решение вида [15]

$$\begin{gathered}
p_z = \operatorname{sh}\Psi,\ \ u = \operatorname{ch}\Psi,\ \ \varphi = u - \mathcal{H},\ \ \mathcal{H} = \mathcal{H}(\Psi),\\
P = P(\Psi),\ \ A = A(\Psi),\ \ \Psi = \Psi(f),\\
f_{,xx} + f_{,yy} = 0.
\end{gathered} \tag{36}$$

Здесь Ψ – произвольная функция с аргументом f, где $f(x,y)$ – гармоническая функция.

Подстановка формул (36) в (32) позволяет конкретизировать входящие в (36) выражения

$$\begin{gathered}
v_z = \operatorname{th}\Psi,\ \ P = \operatorname{sh}\Psi - a\int\operatorname{ch}\Psi df,\ \ A = -a\int\operatorname{ch}\Psi df,\\
\varphi = a\int\operatorname{sh}\Psi df,\ \ \rho = a\operatorname{ch}\Psi\Psi'(\nabla f)^2,\\
\mathcal{H} = \operatorname{ch}\Psi - \varphi,\ \ H_x = -A_{,y},\\
H_y = A_{,x},\ \ H_z = 0,\ \ a = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{37}$$

При $\Psi = f$ формулы (37) упрощаются

$$v_z = \operatorname{th} f, \quad P = (1-a)\operatorname{sh} f, \quad A = -a\operatorname{sh} f,$$
$$\varphi = a\operatorname{ch} f, \quad \rho = a\operatorname{ch} f\,(\nabla f)^2, \quad \mathscr{H} = (1-a)\operatorname{ch} f, \tag{38}$$
$$H_x = -a\operatorname{ch} f f_{,y}, \quad H_y = a\operatorname{ch} f f_{,x}, \quad H_z = 0.$$

При $a = 1$ выражения (38) описывают моноэнергетическое течение [21]:

$$v_z = \operatorname{th} f, \quad P = \mathscr{H} = 0, \quad A = -\operatorname{sh} f,$$
$$\varphi = \operatorname{ch} f, \quad \rho = \operatorname{ch} f\,(\nabla f)^2, \tag{39}$$
$$H_x = -\operatorname{ch} f f_{,y}, \quad H_y = \operatorname{ch} f f_{,x}, \quad H_z = 0.$$

3. СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

Теория соленоидальных потоков. Теория соленоидальных потоков дополняет перечень точных решений, не связанных с групповыми свойствами уравнений пучка. На основе комплексного формализма при наличии однородного магнитного поля H_z она построена в работе [22] и обобщена на случай неоднородных магнитных полей H_x, H_y, связанных с появлением z-компоненты скорости, в работе [23].

Перейдем от переменных x, y к комплексным переменным

$$s = x + iy, \quad s^* = x - iy. \tag{40}$$

Условие потенциальности обобщенного импульса $\operatorname{rot}\vec{P} = 0$ и соленоидальности вектора скорости $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ приводит к тому, что действие W, $\vec{P} = \nabla W$, становится гармонической функцией

$$W = \frac{1}{2}(f + f^*),$$
$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{df^*}{ds^*} \equiv Q(s^*). \tag{41}$$

Однородное магнитное поле может быть описано компонентами векторного потенциала A_x, A_y. В результате для скорости в плоскости x, y имеем

$$A_x + iA_y = \frac{1}{2}iH_z s, \quad P_x + iP_y = \nabla W,$$
$$u + iv = Q^* - \frac{1}{2}iH_z s. \tag{42}$$

По предположению зависимость от третьей декартовой координаты отсутствует, векторный потенциал $\vec{A}$ – гармоническая функция, поэтому

$$P_z = w + A_z = \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$
$$w = -A_z = \chi + \chi^*,$$
$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{43}$$
$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Интеграл энергии позволяет выразить потенциал φ через функции Q, χ

$$u^2 + v^2 = (u+iv)(u-iv) =$$
$$= QQ^* + i\frac{H_z}{2}(s^*Q^* - sQ) + \frac{1}{4}H_z^2 ss^*,$$
$$2\varphi = QQ^* + i\frac{H_z}{2}(s^*Q^* - sQ) + \tag{44}$$
$$+ \frac{1}{4}H_z^2 ss^* + (\chi + \chi^*)^2.$$

Уравнение Пуассона служит для определения плотности ρ

$$\rho = \Delta\varphi = 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial s^*} = 2\left(Q'Q^{*\prime} + 2\chi'\chi^{*\prime} + \frac{1}{4}H_z^2\right). \tag{45}$$

Штрихами в (45) обозначены производные по соответствующему аргументу.

Уравнение сохранения тока при условии соленоидальности течения

$$u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} = \operatorname{Re}\left[(u+iv)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x} - i\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}[(u+iv)(\nabla\rho)^* + (u-iv)\nabla\rho] = 0 \tag{46}$$

приводит к основному соотношению теории соленоидальных потоков

$$Q^*Q^{*\prime}Q'' + QQ'Q^{*\prime\prime} - i\frac{H_z}{2}(sQ^{*\prime}Q'' - s^*Q'Q^{*\prime\prime}) +$$
$$+ 2(Q^*\chi^{*\prime}\chi'' + Q\chi'\chi^{*\prime\prime}) - \tag{47}$$
$$- iH_z(s\chi^{*\prime}\chi'' - s^*\chi'\chi^{*\prime\prime}) = 0.$$

Решения с однородным магнитным полем H_z. Условие соленоидальности переопределяет систему уравнений пучка, однако могут найтись функции $Q(s)$, $\chi(s)$, для которых соотношение (47) удовлетворяется. В работе [22] при $H_z \neq 0$ и $Q = ias$ (a – действительная постоянная) построены решения с линейной зависимостью от x, y у компонент скорости, описывающие потоки с эллиптическими или гиперболическими траекториями. Эти решения являются инвариантными относительно преобразований с произвольными функциями времени при их специализации в виде экспонент. При отсутствии магнитного поля получено решение, соответствующее периодическому течению со следующими параметрами потока и траекториями:

$$Q = -i\operatorname{tg} s, \quad H_z = 0, \quad \chi = 0;$$
$$u = \frac{\operatorname{sh}2y}{\cos 2x + \operatorname{ch}2y}, \quad v = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch}2y},$$
$$2\varphi = \frac{\operatorname{ch}2y - \cos 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch}2y}, \quad \rho = \frac{2}{(\cos 2x + \operatorname{ch}2y)^2}, \tag{48}$$
$$\cos 2x + \operatorname{ch}2y = \text{const}.$$

Уравнение (47) в этом случае допускает преобразование растяжений

$$\bar{s} = bs,\ \bar{s}^* = bs^*,\ \bar{Q} = aQ,\ \bar{Q}^* = aQ^* \tag{49}$$

с действительными константами a, b. По этой причине в формулах (48) могут быть проведены замены

$$\begin{gathered} x \to bx,\ \ y \to by,\ \ u \to au, \\ v \to av,\ \ \varphi \to a^2\varphi,\ \rho \to a^2\rho. \end{gathered} \tag{50}$$

Решение (48) не является инвариантным и обладает тем особенно ценным при тестировании свойством, что переменные в нем не подчиняются закону мультипликативного или аддитивного разделения. Отсутствие ограничения по координате x позволяет контролировать накопление ошибки на длинных траекториях.

Отметим некоторые общие свойства уравнения (47).

Линейное преобразование χ. Для любой пары функций Q, χ, удовлетворяющей соотношению (47), преобразование

$$\bar{\chi} = \chi + (a + ib)s \tag{51}$$

сохраняет его, приводя к появлению решения с модифицированными значениями продольной скорости w и компонент H_x, H_y:

$$\begin{gathered} \bar{w} = w + 2(ax - by),\ \ \bar{H}_x = H_x + 2b, \\ \bar{H}_y = H_y + 2a. \end{gathered} \tag{52}$$

Преобразование (51) может воздействовать и на электростатические решения, вводя развертку течения в плоскости x, y в z-направлении по закону $2(ax - by)$ при наличии однородного магнитного поля $H_x = 2b$, $H_y = 2a$. Например, наряду с решением для плоского бриллюэновского потока

$$u = H_z y,\ \ 2\varphi = H_z^2 y^2,\ \ \rho = H_z^2 \tag{53}$$

существует решение следующей структуры:

$$\begin{gathered} \vec{v} = \{H_z y, 0, \alpha x - \beta y\}, \\ 2\varphi = \left(H_z^2 + \beta^2\right) y^2 + \alpha^2 x^2 - 2\alpha\beta xy, \\ \rho = H_z^2 + \alpha^2 + \beta^2,\ \ \vec{H} = \{\beta, \alpha, H_z\}. \end{gathered} \tag{54}$$

Из электростатического решения с гиперболическими траекториями получаем

$$\begin{gathered} u = ax,\ \ v = -ay,\ \ 2\varphi = a^2 R^2,\ \ \rho = 2a^2; \\ \vec{v} = \{ax, -ay, \alpha x - \beta y\}, \\ 2\varphi = a^2 R^2 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - 2\alpha\beta xy, \\ \rho = 2a^2 + \alpha^2 + \beta^2,\ \ \vec{H} = \{\beta, \alpha, 0\}. \end{gathered} \tag{55}$$

Преобразование продольной скорости. Поскольку возможны варианты $Q \neq 0,\ \chi \neq 0,\ H_z = 0$ и $Q = 0,\ \chi \neq 0,\ H_z \neq 0$, то члены в двух последних скобках в (47) должны уравновешиваться независимо. Продольная скорость w является гармонической функцией, поэтому если функция χ удовлетворяет соотношению (47), то вместо действительной части χ можно взять линейную комбинацию действительной и мнимой частей

$$w = \gamma_1(\chi + \chi^*) - i\gamma_2(\chi - \chi^*). \tag{56}$$

В выражениях для 2φ, ρ и $\nabla\rho$ при этом добавятся члены

$$\begin{gathered} 2\varphi \to (\gamma_1 - i\gamma_2)^2 \chi^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)^2 \chi^{*2} + \\ + 2\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right)\chi\chi^*,\ \ \rho \to 4\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right)\chi'\chi^{*\prime}, \\ \frac{\partial\rho}{\partial x} \to 4\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right)\left(\chi^{*\prime}\chi'' + \chi'\chi^{*\prime\prime}\right), \\ \frac{\partial\rho}{\partial y} \to 4i\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right)\left(\chi^{*\prime}\chi'' - \chi'\chi^{*\prime\prime}\right), \end{gathered} \tag{57}$$

а перед упоминавшимися комплексами в (47) возникнут постоянные множители, не препятствующие обращению соответствующих выражений в нуль.

Частное решение. Заметим, что соотношению (47) удовлетворяет функция

$$\chi = Q/\sqrt{2}. \tag{58}$$

Соответственно этому решение (48) может быть дополнено z-компонентой скорости w и составляющими H_x, H_y неоднородного магнитного поля

$$\begin{gathered} Q = -i\,\mathrm{tg}s,\ \ \chi = -\frac{i}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}s,\ \ w = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}2y}{\cos 2x + \mathrm{ch}2y}, \\ H_x = -2\sqrt{2}\frac{\cos 2x\,\mathrm{ch}2y - 1}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2}, \\ H_y = 2\sqrt{2}\frac{\sin 2x\,\mathrm{sh}2y}{(\cos 2x + \mathrm{ch}2y)^2}. \end{gathered} \tag{59}$$

Случай $H_z \neq 0$ при использовании свойства (58) не представляет интереса, так как преобразование (51) приводит к более общему результату.

Обобщения на случай неоднородного магнитного поля. С учетом сказанного выше результаты работ [23, 24] сводятся к перечисленным ниже решениям[2] 1)–5).

1) $Q = \dfrac{ia}{s},\ \ \chi = s^{\beta};$

[2] При ссылках на работы [23, 24] приводятся формулы, очищенные от не имеющих физического смысла функций, а также несущественных функций и констант. Упомянутый процесс трансформации обсуждается в работе [25].

$$v_R = 0,\ \ v_\psi = -\left(\frac{1}{2}H_z + \frac{a}{R^2}\right)R,\ \ w = 2R^\beta\cos\beta\psi,$$
$$2\varphi = R^2\left(\frac{1}{2}H_z + \frac{a}{R^2}\right)^2 + 4R^{2\beta}\cos^2\beta\psi,$$
$$\rho = 2\left(\frac{1}{4}H_z^2 + \frac{a^2}{R^4}\right) + 4\beta^2 R^{2\beta-2}, \tag{60}$$
$$H_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\psi} = 2\beta R^{\beta-1}\sin\beta\psi,$$
$$H_\psi = \frac{\partial w}{\partial R} = 2\beta R^{\beta-1}\cos\beta\psi.$$

Наиболее интересен случай, когда решение справедливо на полной плоскости R, ψ без разрезов при натуральных значениях параметра $\beta = k \geq 1$. В этой плоскости решение (60) объединяет все три классические бриллюэновские режима (сплошной и полый пучки, электростатический поток).

2) $Q = as,\ \ \chi' = \exp(s^2),\ \ H_z = 0;$

$$u = ax,\ \ v = -ay,\ \ w = 2\,\mathrm{Re}\int^s \exp(\tau^2)d\tau,$$
$$2\varphi = a^2R^2 + w^2,$$
$$\rho = 2a^2 + 2\exp\left[2\left(x^2 - y^2\right)\right], \tag{61}$$
$$H_x = 4\exp\left(x^2 - y^2\right)\sin(2xy),$$
$$H_y = 4\exp\left(x^2 - y^2\right)\cos(2xy).$$

Решение (61) основывается на решении (55) с гиперболическими траекториями.

3) $Q = -i\dfrac{H_z}{2}s,\ \ \chi = \exp(\beta s);$

$$u = H_z y,\ \ v = 0,\ \ w = 2\exp(\beta x)\cos\beta y,$$
$$2\varphi = H_z^2y^2 + 4\exp(2\beta x)\cos^2\beta y,$$
$$\rho = H_z^2 + 4\beta^2\exp(2\beta x), \tag{62}$$
$$H_x = 2\beta\exp(\beta x)\sin\beta y,$$
$$H_y = 2\beta\exp(\beta x)\cos\beta y.$$

Возмущению за счет неоднородного магнитного поля здесь подвергся плоский бриллюэновский поток (53).

4) $Q = -i\,\mathrm{tg}s,\ \ \chi' = \cos^\beta s,\ \ H_z = 0;$

$$w = 2\,\mathrm{Re}\int^s \cos^\beta\tau d\tau,$$
$$H_x = 2m^\beta\sin\beta\vartheta,\ \ H_y = 2m^\beta\cos\beta\vartheta,$$
$$2\overline{\varphi} = 2\varphi + w^2,\ \ \overline{\rho} = \rho + 2m^{2\beta}, \tag{63}$$
$$m^2 = \frac{1}{2}(\cos 2x + \mathrm{ch}2y),\ \ \vartheta = -\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x\,\mathrm{th}y).$$

К компонентам скорости из (48) добавляются формулы для z-компоненты скорости, неоднородного магнитного поля H_x, H_y и новые выражения для φ, ρ.

При натуральном значении β продольная скорость выражается через элементарные функции:

$$\beta = 2,\ \ w = x + \sin 2x\,\mathrm{sh}2y;$$
$$\beta = 3,\ \ w = \frac{1}{6}\sin 3x\,\mathrm{ch}3y + \frac{3}{2}\sin x\,\mathrm{ch}y. \tag{64}$$

5) Столь же интересными и напоминающими по структуре решения (48), (59), (63) могли бы быть имеющие место только при $H_x, H_y \neq 0$ решения [24, 26] в эллиптических функциях Якоби [27]. Первое из них записывается следующим образом:

$$Q = cn(s,k),\ \ k = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \chi' = \frac{1}{2}cn^2(s,k);$$
$$u = \frac{cn(x,k)\,cn(y,k)}{1 - dn^2(x,k)\,sn^2(y,k)}, \tag{65}$$
$$v = \frac{sn(x,k)\,dn(x,k)\,sn(y,k)\,dn(y,k)}{1 - dn^2(x,k)\,sn^2(y,k)}.$$

Второе решение с теми же компонентами скорости u, v, но со спектром значений k определено формулами

$$Q = cn(s,k),\ \ \chi' = \frac{1}{2}\times$$
$$\times\left[i\alpha sn(s,k)\,dn(s,k) + dn^2(s,k) - k^2sn^2(s,k)\right], \tag{66}$$
$$\alpha^2 = 2\left(2k^2 - 1\right),\ \ k \leq 1.$$

В плоскости x, y траектории частиц описываются уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sn(x,k)\,dn(x,k)\,sn(y,k)\,dn(y,k)}{cn(x,k)\,cn(y,k)},$$
$$\frac{cn'(x,k)}{cn(x,k)}dx = -\frac{cn(y,k)}{sn(y,k)\,dn(y,k)}dy. \tag{67}$$

Здесь использованы свойства эллиптических функций [27]

$$cn^2(s,k) = 1 - sn^2(s,k),$$
$$dn^2(s,k) = 1 - k^2sn^2(s,k),$$
$$cn'(s,k) = -sn(s,k)\,dn(s,k), \tag{68}$$
$$dn'(s,k) = -k^2sn(s,k)\,cn(s,k),$$
$$sn'(s,k) = cn(s,k)\,dn(s,k).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\left[\ln\frac{sn(y,k)}{dn(y,k)}\right]' = \frac{cn(y,k)}{sn(y,k)\,dn(y,k)}, \tag{69}$$

приходим к следующему выражению для траекторий:

$$cn(x,k) = \mathrm{const}\frac{dn(y,k)}{sn(y,k)}. \qquad (70)$$

К сожалению, из-за свойств эллиптических функций уравнение (70) имеет смысл в очень ограниченной части плоскости x, y, что сводит на нет возможность использования этих решений при тестировании.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точные решения уравнений плотного электронного пучка, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями или выражениями в элементарных и специальных функциях, не связаны с групповыми свойствами этих уравнений, если они получены в результате рассмотрения переопределенных систем. Все описанные выше модели относятся к этому случаю. Вырожденные решения и обобщенные бриллюэновские потоки требуют обращения в нуль одной, двух или трех компонент обобщенного импульса, уравнения соленоидальных течений переопределяет требование соленоидальности скорости.

Возникающие в результате решения не имеют симметрии, свойственной инвариантным решениям, и порождают новые структуры параметров потока, которые представляют ценность при тестировании приближенных и численных моделей. Устранение произвольных несимметричных элементов может трансформировать решение в инвариантное. Среди приведенных примеров отсутствие мультипликативного или аддитивного разделения переменных является не исключением, а правилом: структуры решения могут содержать линейные комбинации мультипликативных фрагментов, образованных произведением действительной и мнимой частей аналитической функции, или предоставлять неограниченные возможности усложнения структуры в двумерных релятивистских потоках с одной z-компонентой скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Syrovoy V.A.* Theory of Intense Beams of Charged Particles. N.-Y.: Elsevier, 2011.
3. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2003. Т. 48. № 4. С. 467.
4. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 6. С. 752.
5. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 9. С. 1110.
6. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2019. Т. 54. № 6. С. 593.
7. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2019. Т. 54. № 12. С. 1244.
8. *Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А.* // Электрон. техника. Сер. 1. СВЧ-техника. 2018. № 1. С. 32.
9. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
10. *Birtles A.B., Dirmikis D.* // Int. J. Electr. 1975. V. 38. № 1. P. 49.
11. *Мануилов В.Н., Райский Б.В., Цимринг Ш.Е., Солуянова Е.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. № 9–10. С. 846.
12. *Козырев А.Н., Свешников В.М.* // Прикл. физика. 2018. № 1. С. 30.
13. *Riva F., Beadle C.F., Ricci P.* // Phys. Plasmas. 2017. V. 24. P. 055703-1.
14. *Данилов В.Н., Сыровой В.А.* // Задачи физической электроники. М.: Наука, 1982. С. 19.
15. *Данилов В.Н.* // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 1. С. 3.
16. *Сыровой В.А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
17. *Kent G.* // Communic. Electr. 1960. V. 79. № 48. P. 144.
18. *Данилов В.Н.* // РЭ. 1966. Т. 11. № 11. С. 1994.
19. *Данилов В.Н.* // РЭ. 1963. Т. 8. № 11. С. 1892.
20. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 4. С. 375.
21. *Lomax R.J.* // J. Electr. Contr. 1958. V. 5. № 6. P. 563.
22. *Kirstein P.T.* // J. Electr. Contr. 1958. V. 4. № 5. P. 425.
23. *Огородников С.Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 10. С. 1577.
24. *Огородников С.Н.* // ЖТФ. 1972. Т. 42. № 7. С. 1348.
25. *Сыровой В.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 5. С. 635.
26. *Огородников С.Н.* // ЖТФ. 1973. Т. 43. № 6. С. 1311.
27. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.