
**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

УДК 621.391

КЛАСС ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СО СКОРОСТЬЮ СПАДА ЛЕПЕСТКОВ СПЕКТРА, КРАТНОЙ 12 ДЕЦИБЕЛ НА ОКТАВУ

© 2020 г. Г. В. Зайцев^а, *, А. Д. Хзмалян^а^аНПО “Алмаз”,

Ленинградский просп., 80, корп. 16, Москва, 125190 Российская Федерация

*E-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.02.2019 г.

После доработки 03.04.2019 г.

Принята к публикации 12.06.2019 г.

Решена задача синтеза весовых функций малого порядка со скоростью спада лепестков спектра $12n$ дБ/окт (n — целое) оптимальных по критерию минимума максимального бокового лепестка на заданном отрезке частотной оси вне главного лепестка. Для получения указанной скорости спада лепестков предложено синтезировать функции в виде суммы отрезка ряда Фурье по системе косинусоидальных функций с нечетным числом полуволн на интервале наблюдения. Разработан метод синтеза оптимальных функций с верификацией найденного решения. Синтезированы весовые функции порядков 3...6 со скоростью спада лепестков 12, 24 и 36 дБ/окт и табулированы их параметры.

DOI: 10.31857/S0033849420050137

ВВЕДЕНИЕ

Цифровой спектральный анализ сигналов, выполняемый, как правило, с помощью алгоритмов дискретного преобразования Фурье, широко используется в различных областях науки и техники. Перед вычислением спектра анализируемый сигнал умножают на действительную положительную функцию $w(t)$, называемую весовой, или оконной, для повышения качества выделения полезной информации. Весовая функция сглаживает разрывы сигнала на границах интервала наблюдения и снижает эффект размывания спектральных линий.

Обзор известных весовых функций можно найти в [1, 2]. Требования к весовым функциям зависят от конкретной решаемой задачи. В различных приложениях могут доминировать требования обеспечения малого среднеквадратичного уровня боковых лепестков спектра, высокой скорости спада лепестков, максимально плоской вершины главного лепестка и другие.

В данной работе предложены новые семейства весовых функций, оптимальных по минимаксному критерию качества, при котором минимизируется уровень максимального бокового лепестка в заданной области частот вне главного лепестка. Работа направлена на приложения, в которых необходимы высокий уровень подавления боковых лепестков при малом расширении главного ле-

пестка и возможность вычисления функции в реальном масштабе времени.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть анализируемый сигнал представлен N временными отсчетами, взятыми с шагом δ . Для упрощения формул удобно вместо размерных величин времени $t_{\text{разм}}$ и частоты $f_{\text{разм}}$ использовать безразмерные t и f : $t = t_{\text{разм}}/\delta$, $f = f_{\text{разм}} \delta$. Начало временной оси расположим в центре между крайними отсчетами. Тогда моменты выборок равны $t_p = -0.5(N-1) + p$ ($p = 0, 1, \dots, N-1$). Спектр такого сигнала периодичен с периодом 1, и его достаточно анализировать на периоде $f \in [-0.5, 0.5]$. Для расчета спектра взвешенного дискретного сигнала необходимы только отсчеты весовой функции в точках t_p , однако при теоретическом анализе и практическом применении весовую функцию $w(t)$ удобно рассматривать как непрерывную, а необходимые дискретные отсчеты — как значения этой непрерывной функции в точках t_p .

К весовым функциям $w(t)$, рассматриваемым в данной работе, предъявляются два требования. Во-первых, для подавления эффекта размывания спектральной линии уровень боковых лепестков их спектра в заданной области частот должен быть минимально возможным по рассматриваемому ниже критерию. Во-вторых, они должны просто вычисляться для использования в реаль-

ном масштабе времени. Рассмотрим эти требования подробнее.

Большинство весовых функций с простым вычислением имеют вид начального отрезка традиционного ряда Фурье по косинусоидальным функциям с четным числом полувольт на интервале наблюдения [1, 2]:

$$w(\mathbf{a}, t) = \sum_{k=0}^m a_k \cos(2\pi kt/N), \quad -0.5N \leq t \leq 0.5N, \quad (1)$$

где $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ – вектор коэффициентов, а число m называется порядком весовой функции.

Замечательно, что весовые функции с высокими характеристиками можно получить при малом числе m коэффициентов [1], что обеспечивает простоту вычисления функции. Уже для функций порядков 3...7 можно получить уровень боковых лепестков, достаточно низкий для большинства приложений. Многие классические весовые функции имеют указанное представление [1, 2], и именно такие функции наиболее востребованы на практике.

Требование максимального подавления боковых лепестков трактуется в данной работе в чебышевском смысле и состоит в следующем. Спектр $W(f)$ функции $w(t)$, используемой при гармоническом анализе дискретного сигнала, определяется формулой дискретного по времени преобразования Фурье [3]:

$$W(\mathbf{a}, f) = \sum_{p=0}^{N-1} w(\mathbf{a}, t_p) \exp(-j2\pi t_p f), \quad (2)$$

$$f \in [-0.5, 0.5].$$

Пусть W_{\max} – максимальное значение модуля спектра (2). Определим функцию качества $\varphi(\mathbf{a})$ как максимальное значение нормированного модуля спектра $|W(\mathbf{a}, f)/W_{\max}|$ вне области $[-\beta, \beta]$, где β – задаваемая максимально допустимая полуширина главного лепестка по уровню максимального бокового лепестка:

$$\varphi(\mathbf{a}) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0.5} |W(\mathbf{a}, f)/W_{\max}|. \quad (3)$$

Построение оптимальной весовой функции заключается в отыскании вектора коэффициентов \mathbf{a} , минимизирующего функцию $\varphi(\mathbf{a})$, т.е. в решении задачи

$$\varphi(\mathbf{a}) \rightarrow \min_{\mathbf{a}}. \quad (4)$$

Поставленная задача относится к задачам чебышевского приближения [4]. Известны отдельные функции вида (1), являющиеся ее решениями: функции Хэмминга [1], Наталла [5], Альбрехта [6]. В статьях [7–9] был разработан регулярный метод синтеза, позволяющий получить для функций вида (1) континуальное семейство оптимальных функций с заданной скоростью спада боковых

лепестков и приведены сводки оптимальных функций.

Заметим, однако, что свойства функций, представленных конечным отрезком ряда Фурье (1), ограничены. Для иллюстрации этого положения рассмотрим один из основных параметров весовых функций – асимптотическую при увеличении частоты скорость спада боковых лепестков спектра, определяемую как величина V снижения модуля лепестков при увеличении частоты вдвое и измеряемую в децибелах на октаву (сокращенно – дБ/окт). Этот параметр характеризует непрерывную функцию $w(t)$, однако используется и для дискретных весовых функций в предположении, что число выборок N велико. (Далее для краткости “асимптотическая” опускаем.)

Из теории преобразования Фурье известно, что этот параметр определяется порядком разрыва весовой функции на границах отрезка наблюдения. Если на границах этого отрезка n -я производная функции $w(t)$ имеет разрыв первого рода ($n = 1, 2, \dots$), а производные меньшего порядка непрерывны, то скорость спада лепестков составляет $6(n + 1)$ дБ/окт. Нулевую производную будем считать совпадающей с самой функцией.

Для функций традиционного представления (1) нечетные производные равны нулю на концах отрезка наблюдения, поэтому эти функции могут иметь скорость спада лепестков вида $6(2k + 1)$ дБ/окт ($k = 0, 1, \dots$), однако промежуточные скорости спада спектра получить невозможно.

Для восполнения этого пробела в данной работе синтезируются весовые функции в виде начального отрезка обобщенного ряда Фурье по системе косинусоидальных функций с нечетным числом полувольт на интервале наблюдения:

$$w(t) = \sum_{k=0}^m a_k \cos[(2k + 1)\pi t/N]. \quad (5)$$

Система функций, использованная в (5), полна в классе непрерывных действительных четных функций на отрезке $[-N/2, N/2]$ [10]. При малом порядке m вычисление функции (5) столь же просто, как и вычисление функции (1).

Функции вида (5) в отличие от функций вида (1) имеют на концах отрезка наблюдения нулевые четные производные. Поэтому они могут иметь скорости спада лепестков спектра вида $12k$ дБ/окт ($k = 1, 2, \dots$), т.е. величины, промежуточные по отношению к функциям (1). Ниже синтезируются весовые функции вида (5), оптимальные по критерию (3), (4).

Отметим, что весовые функции (5) допускают альтернативное представление. Действительно, функцию $\cos[(2k + 1)x]$ в (5) можно преобразовать в линейную комбинацию функций $\cos^{2n+1}x$

($n = 0, 1, \dots, k$), воспользовавшись известной формулой [11]:

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= 2^{n-1} \cos^n(x) - \frac{n}{1} 2^{n-3} \cos^{n-2}(x) + \\ &+ \frac{n}{2} C_{n-3}^1 2^{n-5} \cos^{n-4}(x) - \frac{n}{3} C_{n-4}^2 2^{n-7} \cos^{n-6}(x) + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где C_u^v – биномиальные коэффициенты. Тогда формулу (5) можно переписать в эквивалентной альтернативной форме:

$$w(t) = \sum_{k=0}^m b_k \cos^{2k+1}(\pi t/N), \quad (7)$$

где коэффициенты b_0, b_1, \dots, b_m , являются линейными комбинациями коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m .

Представление (7) имеет следующие достоинства. Во-первых, количество алгебраических операций при расчете весовой функции по формуле (7) меньше, чем по формуле (5). Во-вторых, на краях интервала наблюдения каждая базисная функция $\cos^{2k+1}x$ имеет нулевые производные порядков от 0 до $2k$, и, следовательно, лепестки ее спектра асимптотически спадают со своей индивидуальной скоростью $V = 12(k+1)$ дБ/окт ($k = 0, 1, \dots, m$). Поэтому при синтезе функции со скоростью спада лепестков $12n$ дБ/окт необходимо и достаточно обнулить коэффициенты b_k при $k < n-1$ в формуле (7), что упрощает решение задачи оптимизации (3), (4).

При разработке алгоритма синтеза в основном будем использовать более традиционное представление (5), отмечая особенности решения при представлении (7).

2. ФУНКЦИЯ КАЧЕСТВА

Спектр функции (5) с точностью до несущественной константы имеет вид

$$W(\mathbf{a}, f) = \sum_{k=0}^m a_k \Delta_k(f), \quad (8)$$

где функция $\Delta_k(f)$ определяется выражениями

$$\begin{aligned} \Delta_k(f) &= D_{2k+1}(f) + D_{-(2k+1)}(f), \quad k = 0, 1, \dots, \\ D_s(f) &= \frac{\sin \pi N[f - s/2N]}{N \sin \pi[f - s/2N]}. \end{aligned} \quad (9)$$

Синтез функции (5), оптимальной по описанному выше чебышевскому критерию (3)–(4), состоит в нахождении оптимальных коэффициентов a_k ($k = 0, 1, \dots, m$), образующих вектор \mathbf{a} .

Рассмотрим свойства оптимальной функции, являющейся решением задачи (3), (4). Во-первых, максимум спектра весовой функции достигается при $f = 0$. В самом деле, спектр (2) весовой функции (5) в силу ее положительности и сим-

метричности относительно оси ординат не имеет мнимой части и поэтому равен

$$W(\mathbf{a}, f) = \sum_{p=0}^{N-1} w(\mathbf{a}, t_p) \cos(2\pi t_p f), \quad f \in [-0.5, 0.5].$$

В этом выражении суммируются неотрицательные числа $w(\mathbf{a}, t_p)$ с весом $\cos(2\pi t_p f) \leq 1$. Очевидно, максимум достигается, если все веса равны единице, что реализуется только при $f = 0$.

Далее, умножение всех коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m на фиксированный множитель не изменяет функцию качества (3). Для обеспечения единственности решения задачи зафиксируем масштаб функции путем фиксации максимального значения спектра $W_{\max} = W(\mathbf{a}, 0) = 1$, т.е. примем

$$\sum_{k=0}^m d_k a_k = 1, \quad (10)$$

где $d_k = \Delta_k(0)$ – постоянные коэффициенты.

Тогда функция качества (3), нелинейная относительно коэффициентов a_k ($k = 0, 1, \dots, m$), может быть переписана в линейном виде с линейным условием (10):

$$\varphi(\mathbf{a}) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0.5} |W(\mathbf{a}, f)|, \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^m d_k a_k = 1$$

Рассмотрим условия, которым должна удовлетворять весовая функция (5), чтобы скорость спада лепестков была равна $12n$ ($n = 1, 2, \dots$). Для этого, как сказано выше, необходимо и достаточно, чтобы в граничных точках интервала наблюдения $f = \pm 0.5$ производные функции были равны нулю, вплоть до производной порядка $2(n-1)$.

Нетрудно проверить, что для функции вида (5) четные производные при $f = \pm 0.5$ равны нулю; нечетные производные порядка $2i+1$ ($i = 0, 1, \dots$) имеют выражение

$$\begin{aligned} w^{(2i+1)}(\mathbf{a}, t) &= (-1)^{i+1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^m [\pi(2k+1)/N]^{2i+1} a_k \sin[(2k+1)\pi t/N], \quad (12) \\ &-0.5N \leq t \leq 0.5N, \end{aligned}$$

поэтому скорость спада лепестков 12 дБ/окт обеспечивается при любых коэффициентах, а для скорости спада лепестков $12n$ дБ/окт ($n = 2, 3, \dots$) требуется выполнение $n-1$ соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (-1)^k (2k+1)^{2i+1} a_k &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \quad (13) \\ n &\geq 2. \end{aligned}$$

При выполнении условий (10), (13) из $m+1$ коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m только $M = m-n+1$ явля-

ются независимыми, а остальные n могут быть выражены через независимые коэффициенты путем решения системы линейных уравнений (10), (13).

Выберем в качестве независимых переменных коэффициенты с младшими индексами $a_k, k = 0, 1, \dots, M - 1$. Можно показать, что система линейных уравнений (10), (13) относительно зависимых коэффициентов имеет единственное решение, выражающее их в виде линейной комбинации независимых:

$$a_k = \sum_{i=0}^{M-1} h_{ki} a_i, \quad k = M, \dots, m, \quad (14)$$

где h_{ki} – числовые множители.

Подставляя (14) в (8), получим выражение, описывающее спектр весовой функции через независимые коэффициенты. Для наглядного описания получаемого выражения введем следующие обозначения: $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{M-1})$ – усеченный вектор из независимых коэффициентов; $W_0(\mathbf{a}, f)$ – спектр $W(\mathbf{a}, f)$ для случая, в котором вектор \mathbf{a} удовлетворяет соотношениям (10) и (13), а коэффициенты, a_M, \dots, a_m выражены формулой (14). В этих обозначениях описываемое выражение имеет вид

$$W_0(\mathbf{a}, f) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k u_k(f), \quad (15)$$

где $u_i(f)$ – следующие функции:

$$u_i(f) = \Delta_i(f) + \sum_{k=M}^m h_{ki} \Delta_k(f), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (16)$$

Теперь задача минимизации (3),(4) может быть переписана с уменьшением размерности вектора коэффициентов до $M = m - n + 1$:

$$\varphi(\mathbf{a}) \rightarrow \min_{\mathbf{a}}, \quad \varphi(\mathbf{a}) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0.5} |W_0(\mathbf{a}, f)|, \quad (17)$$

где функция $W_0(\mathbf{a}, f)$ определяется формулой (15). В такой формулировке задача приведена к стандартному виду, и можно воспользоваться общей теорией линейных чебышевских приближений [4], где, в частности, показано, что решение поставленной задачи существует и единственно.

Используемый в данной работе подход к решению поставленной минимаксной задачи состоит в непосредственной минимизации функции $\varphi(\mathbf{a})$ (17) с помощью численных методов. Для выбора эффективного алгоритма поиска экстремума необходимо исследовать прежде всего характер поведения оптимизируемой функции. Изучение функции качества подобного вида проведено в [7]. Аналогичный анализ функции (17) приводит к следующим выводам о свойствах функции качества:

– функция качества $\varphi(\mathbf{a})$ является выпуклой функцией в пространстве коэффициентов и в силу единственности решения имеет единственный

минимум, который является ее глобальным минимумом;

– функция $\varphi(\mathbf{a})$ в любой точке \mathbf{a} является непрерывной и имеет производные по всем направлениям, однако имеются точки, в которых функция недифференцируема.

Анализ функции $\varphi(\mathbf{a})$ показал, что, во-первых, она имеет регулярные области, в которых превагирует один из лепестков. В таких областях функция $\varphi(\mathbf{a})$ определяется величиной этого лепестка и является дифференцируемой. Во-вторых, там, где происходит перескок превагирования с одного лепестка на другой, эти области соприкасаются по линиям (областям), в которых функция имеет излом и является недифференцируемой. В результате рельеф функции качества имеет вид системы оврагов, на пологом дне которых она недифференцируема, причем размерность овражной области может достигать $M - 1$. Это делает неэффективным непосредственное применение традиционных численных методов минимизации для поиска экстремума рассматриваемой функции.

Ранее [7, 8] для минимизации функционала, сходного с (17), был разработан численный метод нахождения экстремума на основе алгоритмов случайного поиска. Однако число операций в таких алгоритмах с ростом размерности задачи становится чрезмерно большим. Для того чтобы алгоритм оптимизации был эффективным, он должен в максимальной степени использовать свойства функции качества. Поэтому был разработан следующий численный алгоритм, который учитывает ее многомерную овражную структуру и недифференцируемость.

3. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА

Численный алгоритм минимизации функции качества (17) содержит следующие этапы.

Шаг 1. Задать начальное приближение $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{M-1})$. Например, $a_i = 1/M$.

Шаг 2. Выполнить поиск минимума функции с помощью любого традиционного алгоритма, например, можно использовать многомерную версию поиска с равномерным шагом с последующим делением отрезка пополам. При этом алгоритм остановится в некоторой точке с координатами ξ_0 на дне оврага.

Шаг 3. Выполнить оценку базиса овражной области. Поскольку размерность области может достигать $M - 1$, сделать $M - 1$ малых случайных приращений δ_k для вектора $\xi_0, k = 1, \dots, M - 1$. Величины приращений выбрать такими, чтобы приращение целевой функции было соизмеримо с заданной относительной погрешностью. Взяв точки $\xi_k = \xi_0 + \delta_k$ в качестве начальных приближений, осуществить из них, как из начальных приближений, поиск минимумов аналогично ша-

гу 2. При этом будет найдено $M - 1$ точек с координатами \mathbf{v}_k на дне овражной области. Векторы $\mathbf{v}_k - \xi_0$ считать базисом овражной области.

Шаг 4. В пространстве, натянутом на $M - 1$ векторов $\mathbf{v}_k - \xi_0$, найти минимум с помощью одного из традиционных методов аналогично шагу 2. Принять найденную точку \mathbf{a}_c в качестве очередного приближения для оптимального вектора $\tilde{\mathbf{a}}$.

Шаг 5. Определить, насколько близко полученное приближение $\varphi(\mathbf{a}_c)$ к минимуму $\varphi(\tilde{\mathbf{a}})$ с помощью описанного далее алгоритма. Если отклонение от оптимума $\varphi(\mathbf{a}_c) - \varphi(\tilde{\mathbf{a}})$ меньше, чем заданная точность приближения, прекратить вычисления, считая \mathbf{a}_c полученным решением. Иначе перейти к шагу 2.

Оценка близости полученного решения к оптимальному на шаге 5 производится с использованием общей теории линейных чебышевских приближений [4]. Согласно этой теории точка $\tilde{\mathbf{a}}$ является точкой глобального минимума функции $\varphi(\mathbf{a})$ (17) тогда и только тогда, когда существует $l \leq M + 1$ точек $f_1, f_2, \dots, f_l \in [\beta, 0.5]$ и ненулевые числа c_1, c_2, \dots, c_l , для которых выполняются соотношения

$$\sum_{k=1}^l c_k u_j(f_k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (18)$$

$$W(\tilde{\mathbf{a}}, f_k) = \varphi(\tilde{\mathbf{a}}) \cdot \text{sign } c_k, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (19)$$

Из условия (19) следует, что в указанных точках функция $W(\tilde{\mathbf{a}}, f)$ имеет максимальные и равные по модулю экстремумы. Отметим также, что случай $l < M + 1$ является довольно редким: для всех синтезированных функций, описанных ниже, $l = M + 1$.

Из условий (18), (19) следует нижняя граница для величины минимума $\varphi(\tilde{\mathbf{a}})$ при $l = M + 1$ [4]:

$$\varphi(\tilde{\mathbf{a}}) \geq \left| \sum_{k=1}^l c_k W(\tilde{\mathbf{a}}, f_k) \right| / \sum_{k=1}^l |c_k|, \quad (20)$$

где c_k ($k = 1, 2, \dots, l$) – решение системы линейных уравнений (18) для $l = M + 1$ различных произвольных точек f_1, f_2, \dots, f_l .

Методика оценки близости полученного уровня бокового лепестка к оптимальному значению сводится к следующему. После нахождения вектора коэффициентов \mathbf{a}_c на шаге 5 алгоритма синтеза вычисляются экстремумы функции $|W(\mathbf{a}_c, f)|$ по $f \in [\beta, 0.5]$ и выбираются $\mu \geq M + 1$ экстремумов с максимальным уровнем. Далее проводится оценка $\varphi(\tilde{\mathbf{a}})$ по формуле (20) для каждого сочетания из μ по $M + 1$ этих экстремумов. Выбирая наибольшую из этих оценок ρ , имеем

$$\rho \leq \varphi(\tilde{\mathbf{a}}) \leq \varphi(\mathbf{a}_c).$$

Если верхняя и нижняя границы в этой формуле отличаются не более, чем на заданную величину ϵ , то достигнутый уровень лепестков отличается от оптимального не более чем на ϵ , и задача считается решенной, в противном случае повторяется поиск из точки \mathbf{a}_c .

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СИНТЕЗА ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

С помощью разработанной методики могут быть синтезированы оптимальные весовые функции по заданным параметрам m, N, V и β . Далее приводим полученные функции со скоростями спада лепестков 12, 24 и 36 дБ/окт.

Для компактного и наглядного представления результатов приняты во внимание следующие соображения.

1. Главный лепесток функции $W(\mathbf{a}, f)$ (8) занимает область не менее $[0, 1.5/N]$. При $\beta > (m + 1.5)/N$ в отрезок $[0, \beta]$ всегда попадает неконтролируемый боковой лепесток, так как при $f = (m + 1.5)/N$ все слагаемые функции $W(\mathbf{a}, f)$ (8) имеют нуль. Поэтому параметры m и β следует задавать так, чтобы выполнялось соотношение $\beta \in [1.5/N, (m + 1.5)/N]$. Следовательно, при фиксированном β величина m , минимально необходимая для того, чтобы в области $[0, \beta]$ не было боковых лепестков, должна удовлетворять соотношению $m \geq \beta N - 1.5$. Увеличение m сверх минимально необходимого весьма слабо улучшает характеристики весовой функции, поэтому далее они приводятся в основном лишь для $m = \lceil \beta N - 1.5 \rceil$, где $\lceil x \rceil = p$ – наименьшее целое, такое, что $p \geq x$. Функции, удовлетворяющие этому условию, будем называть регулярными, не удовлетворяющие – нерегулярными. Не при всяком значении β возможно построение регулярной оптимальной функции. Это связано с тем, что количество независимых переменных $M = m - n + 1$ должно быть положительным, иными словами, $m \geq n$. Поэтому минимальная величина m выбирается из соотношения $m = \max\{\lceil \beta N - 1.5 \rceil, n\}$. Для малых значений β ($\beta < (n + 1.5)/N$) возможно построение только нерегулярных функций.

Отметим также, что ширина главного лепестка обратно пропорциональна N , поэтому параметры ширины главного лепестка, включая β , удобно выражать в относительном масштабе, умножая их на N . Ширина полосы $1/N$ называется бином [1]. Таким образом, приводимые ниже ширины полос выражаются в бинах.

2. Характеристики оптимальных весовых функций слабо зависят от величины N . При изменении N в диапазоне $2^4 \dots 2^{14}$ разница в уровне максимального лепестка, как правило, не превышает долей децибела и тем меньше, чем больше сравниваемые значения N . Поэтому ниже приводятся характеристики оптимальных функций только

для одного значения $N = 1024$, часто используемого в приложениях. При таком значении N как коэффициенты, так и характеристики весовых функций практически совпадают с соответствующими значениями для непрерывных функций.

При синтезе функций со скоростью спада $V = 12$ дБ/окт имеется всего один зависимый коэффициент, вычисляемый через независимые с помощью соотношения (10). Коэффициенты представлений (5) и (7) и параметры рассчитанных весовых функций со скоростью спада лепестков $V = 12$ дБ/окт приведены в табл. 1 для $N = 1024$, минимально необходимых m и шага 0.25 бин по параметру β . Величина β изменяется в диапазоне 1.5...7.5 бин, перекрывающем диапазон уровней максимального лепестка примерно до -200 дБ.

Нормировка коэффициентов в табл. 1–3 выполнена таким образом, чтобы максимальный коэффициент был равен единице. Для представления (5) это эквивалентно соотношению $a_0 = 1$, поэтому для краткости этот коэффициент в таблицах не приводится.

В табл. 1 приведены следующие стандартные параметры весовых функций [1]: уровень P максимального бокового лепестка по отношению к главному лепестку; потери Π_w в отношении сигнал/шум за счет использования весовой функции; потери Π_s за счет рельефа; эквивалентная шумовая полоса L_n , ширины главного лепестка по уровням -3 и -6 дБ, обозначаемые L_3 и L_6 соответственно. Все полосы приведены в бинах. Потери за счет рельефа определяются как максимальный относительный спад огибающей амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) гребенки полосовых фильтров, расставленных через интервал $1/N$, АЧХ каждого из которых определяется функцией $|W(f)|$. Эквивалентная шумовая полоса — это ширина АЧХ идеального прямоугольного фильтра, который пропускает такую же мощность шума, что и фильтр с АЧХ $|W(f)|$ при равных максимальных амплитудах АЧХ этих фильтров.

Для функции табл. 1 с $m = 0$ в (5) содержится только один коэффициент a_0 , и получаемый при синтезе результат соответствует известной весовой функции $\cos(\pi t/N)$. Остальные функции, насколько известно авторам, в литературе не описывались.

Особый интерес в табл. 1 представляют те строки, в которых β принимает наибольшее значение для каждого m , так как они дают ответ на вопрос о наименьшем значении уровня бокового лепестка, достижимом для весовой функции заданного порядка со скоростью спада лепестков 12 дБ/окт.

Разрядность коэффициентов a_i и b_i ($i = 0, 1, \dots, m$) выбрана следующим образом. Сначала определялась необходимая разрядность для того, чтобы величины максимальных лепестков, приведенные в

таблице, и точного решения совпадали во всех приводимых цифрах. Затем разрядность увеличилась на 1 для снижения ошибок округления в случае пересчета коэффициентов при изменении нормировки.

При синтезе функции со скоростью спада лепестков $V = 24$ дБ необходимо обеспечить выполнение соотношений (10) и (13) при $n = 2, i = 0$.

Числовые параметры синтезированных оптимальных весовых функций со скоростью спада 24 дБ/окт для $N = 1024$, минимально необходимого m и шага 0.25 бин по параметру β в диапазоне 1.5...7.5 бин приведены в табл. 2. Округление коэффициентов a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) выполнено с точным соблюдением соотношений (10) и (13), что позволяет сохранить скорость спада лепестков.

Для коэффициентов b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) представления (7) проблемы сохранения скорости спада при округлении не возникает, так как этот параметр не изменяется при любом способе округления. По этой причине необходимая разрядность коэффициентов b_i несколько меньше, чем коэффициентов a_i . Поэтому при использовании весовых функций во временной области представления (7) предпочтительнее представления (5).

Значение $m = 1$ в табл. 2 описывает вырожденный случай, $m = 1$, для которого коэффициенты определены аналитически. Полученная функция является известной весовой функцией $\cos^3(\pi t/N)$. Остальные функции являются новыми.

Звездочкой в табл. 2 отмечены нерегулярные функции. Их свойства несколько необычны: коэффициент a_2 является отрицательным, а во временной области некоторые из них имеют раздвоенный максимум.

При скорости спада лепестков $V = 36$ дБ/окт система уравнений для зависимых коэффициентов содержит соотношение (10) и два соотношения (13). В табл. 3 приведены параметры оптимальных весовых функций со скоростью спада 36 дБ/окт для $m = 3...6$ и β в диапазоне 3.5...7.5 бин с шагом 0.25 бин при $N = 1024$.

В этом случае округление коэффициентов a_k ($k = 1, 2, \dots, m$) с сохранением соотношений (10), (13) затруднительно. При этом возникает ошибка округления ϵ_k коэффициента a_k ($k = 1, 2, \dots, m$), что дает в спектре (8) аддитивный паразитный член вида $\epsilon_k \Delta_k(f)$, имеющий медленно спадающие лепестки со скоростью $V = 6$ дБ/окт. Для снижения степени влияния этого члена на уровень лепестков разрядность коэффициентов a_k ($k = 1, 2, \dots, m$) в табл. 3 выбрана достаточно большой, равной 12, что позволяет пренебречь влиянием ошибки до уровня лепестков порядка -300 дБ.

Также в табл. 3 включен вырожденный случай $m = 2$, при котором коэффициенты определяются аналитически. Эта функция соответствует из-

Таблица 1. Параметры синтезированных весовых функций со скоростью спада 12 дБ/окт

m	βN	$P, \text{дБ}$	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	b_0, b_1, \dots, b_m	$\Pi_{\text{пр}}, \text{дБ}$	$\Pi_{\text{с}}, \text{дБ}$	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
0	1.352	-23.0	—	1.0	0.912	2.098	1.234	1.189	1.639
	1.5	-27.1	0.05514	1.0; 0.2643	1.086	1.937	1.284	1.237	1.711
	1.75	-35.1	0.12211	1.0; 0.77078	1.337	1.737	1.361	1.306	1.814
	2.0	-40.4	0.17652	0.66630; 1.0	1.572	1.571	1.436	1.374	1.913
	2.25	-46.5	0.21803	0.39661; 1.0	1.769	1.443	1.503	1.434	2.001
1	2.435	-54.3	0.25873	0.21625; 1.0	1.977	1.315	1.576	1.503	2.099
	2.5	-56.0	0.268959; 0.001834	0.19467; 1.0; 0.02823	2.028	1.286	1.595	1.520	2.124
	2.75	-62.3	0.306796; 0.010612	0.13072; 1.0; 0.16728	2.220	1.182	1.667	1.586	2.219
	3.0	-69.5	0.341554; 0.021288	0.08696; 1.0; 0.36218	2.401	1.090	1.738	1.652	2.314
	3.25	-75.2	0.367484; 0.031505	0.06557; 1.0; 0.60019	2.539	1.025	1.794	1.704	2.388
2	3.458	-82.8	0.398041; 0.045113	0.04356; 0.95577; 1.0	2.705	0.952	1.864	1.769	2.480
	3.5	-84.0	0.40277899; 0.04748434; 0.00006996	0.03803; 0.88492; 1.0; 0.00595	2.731	0.941	1.875	1.779	2.495
	3.75	-90.3	0.42773860; 0.06129859; 0.00081501	0.019757; 0.596572; 1.0; 0.058635	2.870	0.884	1.936	1.835	2.576
	4.0	-96.6	0.45086131; 0.07559469; 0.00211074	0.010909; 0.421097; 1.0; 0.138808	3.001	0.834	1.996	1.890	2.655
	4.25	-104.0	0.47350915; 0.09084447; 0.00397573	0.005817; 0.297347; 1.0; 0.252359	3.132	0.786	2.057	1.948	2.736
3	4.468	-110.3	0.49282384; 0.10522761; 0.00631417	0.003551; 0.225639; 1.0; 0.413876	3.247	0.746	2.112	1.999	2.809
	4.5	-111.3	0.495313376; 0.107158668; 0.006666335; 0.00002975	0.0033179; 0.2177466; 1.0; 0.4384317; 0.0007850	3.262	0.741	2.119	2.006	2.819
	4.75	-118.3	0.514792633; 0.122929690; 0.009863478; 0.000060250	0.00199133; 0.16405424; 1.0; 0.67159198; 0.01735968	3.380	0.703	2.178	2.060	2.896
	5.0	-124.4	0.530699562; 0.136789705; 0.013214709; 0.000189080	0.00132698; 0.13203449; 1.0; 0.93231327; 0.06123674	3.479	0.672	2.228	2.107	2.963
	5.25	-132.0	0.548698943; 0.153320562; 0.017706135; 0.000441607	0.00061157; 0.07616160; 0.75191907; 1.0; 0.12863633	3.594	0.638	2.288	2.163	3.042
4	5.474	-138.1	0.562647130; 0.166934261; 0.021915544; 0.000776821	0.00032712; 0.04810769; 0.57787656; 1.0; 0.20822929	3.685	0.613	2.336	2.208	3.106

Таблица 1. Окончание

m	βN	$P, \text{дБ}$	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	b_0, b_1, \dots, b_m	$\Pi_{\text{ш}}, \text{дБ}$	$\Pi_{\text{с}}, \text{дБ}$	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
5	5.5	-138.7	0.5640743405; 0.1683730741; 0.0223905928; 0.0008210451; 0.0000001253	0.00030849; 0.04603945; 0.56308740; 1.0; 0.21844773; 0.00013329	3.694	0.610	2.341	2.212	3.113
	5.75	-145.2	0.5780904914; 0.1827938589; 0.0273609750; 0.0013376416; 0.0000041759	0.00016513; 0.02932924; 0.43635220; 1.0; 0.33317217; 0.00430657	3.787	0.585	2.392	2.260	3.180
	6.0	-152.5	0.5916983844; 0.1973890578; 0.0328241565; 0.0020205863; 0.0000164449	0.00008689; 0.01862753; 0.34029045; 1.0; 0.47896201; 0.01712107	3.880	0.561	2.444	2.308	3.249
	6.25	-158.6	0.6037580553; 0.2109347564; 0.0383618118; 0.0028495882; 0.0000422596	0.000051874; 0.012808508; 0.275968070; 1.0; 0.654374767; 0.046372402;	3.964	0.540	2.491	2.353	3.312
	6.479	-165.9	0.6159424941; 0.2250726221; 0.0445075887; 0.0038892163; 0.0000873430	0.000028885; 0.008487562; 0.221042494; 1.0; 0.877705148; 0.104735383	4.051	0.519	2.541	2.400	3.379
6	6.5	-166.5	0.616967309632; 0.226286992394; 0.045056176493; 0.003988936926; 0.000092455793; 0.00000005028	0.000027518; 0.008203692; 0.217008245; 1.0; 0.898998507; 0.111754782; 0.000024203	4.058	0.517	2.546	2.404	3.385
	6.75	-172.6	0.627353475820; 0.238871309260; 0.050979723660; 0.005152604250; 0.000163813680; 0.000000277780	0.0000152560; 0.0051935310; 0.1590400257; 0.8736336883; 1.0; 0.1901895797; 0.0013182214	4.134	0.500	2.590	2.445	3.444
	7.0	-180.0	0.638537680580; 0.252811254900; 0.057886280590; 0.006642547720; 0.000275760170; 0.000001363660	0.0000069338; 0.0027702675; 0.1009150757; 0.6776972773; 1.0; 0.2791150840; 0.0058998071	4.217	0.481	2.641	2.492	3.511
	7.25	-186.2	0.647521501514; 0.264372986204; 0.063951605021; 0.008090468632; 0.000408991852; 0.000003780598	0.0000037132; 0.0016923187; 0.0708666732; 0.5566583001; 1.0; 0.3750355528; 0.0157552123	4.285	0.467	2.682	2.531	3.566
	7.482	-192.9	0.657184295044; 0.277146794694; 0.070974687248; 0.009906885954; 0.000603159543; 0.000008955106	0.00000193847; 0.00100633047; 0.04859141577; 0.4511741059; 1.0; 0.50514735610; 0.03717395392	4.360	0.451	2.729	2.575	3.628

Таблица 2. Параметры синтезированных весовых функций со скоростью спада 24 дБ/окт

m	βN	P , дБ	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	b_0, b_1, \dots, b_m	$\Pi_{\text{в}}, \text{дБ}$	$\Pi_{\text{с}}, \text{дБ}$	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	2.383	-39.3	1/3	0.0, 1.0	2.393	1.075	1.735	1.658	2.312
	1.5	-19.1	0.13115; -0.12131	0.0, 1.0; -0.6578	1.660	1.487	1.466	1.405	1.933
2*	1.75	-24.1	0.21378; -0.07172	0.0, 1.0; -0.5012	1.905	1.321	1.551	1.492	2.063
	2.0+	-29.6	0.27245; -0.03653	0.0, 1.0; -0.3211	2.126	1.201	1.631	1.566	2.175
	2.25	-35.7	0.31520; -0.01088	0.0, 1.0; -0.1176	2.309	1.113	1.702	1.629	2.269
	2.5	-42.7	0.347155; 0.008293	0.0; 1.0; 0.1085	2.458	1.046	1.761	1.682	2.347
2	2.75	-50.9	0.371500; 0.022900	0.0; 1.0; 0.3564	2.579	0.995	1.811	1.726	2.411
	3.0	-58.7	0.392015; 0.035209	0.0; 1.0; 0.6521	2.684	0.952	1.855	1.765	2.470
	3.25	-64.1	0.412220; 0.047332	0.0; 0.9273; 1.0	2.791	0.909	1.902	1.807	2.531
	3.447	-73.6	0.433925; 0.060355	0.0; 0.5473; 1.0	2.910	0.863	1.954	1.856	2.601
	3.5	-74.9	0.4386662; 0.0634786; 0.0001992	0.0; 0.49959; 1.0; 0.01283	2.936	0.853	1.966	1.867	2.617
	3.75	-81.6	0.4589009; 0.0774523; 0.0015084	0.0; 0.34666; 1.0; 0.09020	3.050	0.811	2.019	1.915	2.686
3	4.0	-88.9	0.4784857; 0.0918216; 0.0033787	0.0; 0.244531; 1.0; 0.198246	3.164	0.772	2.072	1.964	2.756
	4.25	-96.2	0.4952532; 0.1048802; 0.0055202	0.0; 0.18167; 1.0; 0.33334	3.263	0.739	2.120	2.008	2.820
	4.463	-103.2	0.5132429; 0.1197903; 0.0084604	0.0; 0.13512; 1.0; 0.55877	3.371	0.704	2.173	2.058	2.891
	4.5	-104.3	0.51567560; 0.12188832; 0.00892486; 0.00000658	0.0; 0.129988; 1.0; 0.595085; 0.001764	3.386	0.699	2.181	2.065	2.901
4	4.75	-112.1	0.532413207; 0.136726737; 0.012468238; 0.000098178	0.0; 0.0978396; 1.0; 0.8893966; 0.0301475	3.490	0.667	2.234	2.114	2.971
	5.0	-117.7	0.54640970; 0.14997284; 0.01617152; 0.00028506	0.0; 0.066132; 0.817136; 1.0; 0.083795	3.579	0.641	2.280	2.157	3.032
	5.25	-126.8	0.56300585; 0.16618507; 0.02106291; 0.00061473	0.0; 0.034286; 0.568937; 1.0; 0.158321	3.687	0.611	2.337	2.210	3.108
	5.472	-132.1	0.57477664; 0.17841108; 0.02526703; 0.00101597	0.0; 0.023184; 0.449254; 1.0; 0.252038	3.765	0.590	2.379	2.249	3.164

Таблица 2. Окончание

m	βN	P , дБ	$a_1, a_2, \dots, a_m (a_0 = 1)$	b_0, b_1, \dots, b_m	$P_{\text{ш}}$, дБ	$P_{\text{с}}$, дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$																																				
5	5.5	-132.9	0.576230078; 0.179948061; 0.025816580; 0.001074296; 0.000000243	0.0; 0.0220742; 0.4366251; 1.0; 0.2652463; 0.0002404	3.775	0.587	2.385	2.254	3.171																																				
										5.75	-140.3	0.589272170; 0.193981047; 0.031024258; 0.001683438; 0.000006351	0.0; 0.0137489; 0.3370448; 1.0; 0.3995320; 0.0062886	3.863	0.564	2.434	2.300	3.236																											
																			6.0	-146.8	0.601238182; 0.207405456; 0.036436947; 0.002444615; 0.000023240	0.0; 0.0091698; 0.2678560; 1.0; 0.5664229; 0.0240530	3.946	0.544	2.481	2.344	3.299																		
																												6.25	-154.1	0.6129045592; 0.2209501360; 0.0422786211; 0.0033933431; 0.0000569766	0.0; 0.00608961; 0.21467906; 1.0; 0.77683500; 0.06399407;	4.028	0.524	2.528	2.388	3.362									
																																					6.478	-161.4	0.624145570; 0.234426168; 0.048453274; 0.004523944; 0.000112428	0.0; 0.0039253; 0.1662332; 0.9647070; 1.0; 0.1368005;	4.110	0.505	2.576	2.433	3.425
6.75	-167.9	0.634660290466; 0.247526404675; 0.054900752862; 0.005876844417; 0.000203890436; 0.000000408700	0.00217850; 0.10708344; 0.74561794; 1.0; 0.21695245; 0.00178504	4.187	0.488	2.623	2.476	3.487																																					
									7.0	-176.2	0.645364209784; 0.261183943259; 0.061923792636; 0.007476676661; 0.000334065756; 0.000001853452	0.0; 0.001124650; 0.066970236; 0.576473909; 1.0; 0.316049202; 0.007557358	4.268	0.470	2.672	2.522	3.552																												
																		7.25	-181.5	0.653629587532; 0.272098252146; 0.067889411889; 0.008989487657; 0.000486120437; 0.000005024691	0.0; 0.000727915; 0.048383473; 0.478127735; 1.0; 0.424043351; 0.020247489	4.332	0.457	2.711	2.559	3.605																			
																											7.481	-189.0	0.662871463055; 0.284541970881; 0.074932122970; 0.010889024835; 0.000701737192; 0.000011329319	0.0; 0.000420654; 0.032783258; 0.386554350; 1.0; 0.567745382; 0.046402495	4.404	0.442	2.757	2.601	3.665										

Таблица 3. Параметры синтезированных весовых функций со скоростью спада 36 дБ/окт

m	βN	P , дБ	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	b_0, b_1, \dots, b_m	$\Pi_{\text{в}}$, дБ	$\Pi_{\text{с}}$, дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
2	3.397	-53.9	0.5; 0.1	0.0; 0.0; 1.0	3.293	0.721	2.135	2.029	2.842
	1.5	-15.2	0.20087; -0.19913; -0.08547	0.0; 0.0; 1.0; -0.8565	2.139	1.235	1.636	1.534	2.103
	1.75	-19.1	0.28406; -0.11594; -0.06170	0.0; 0.0; 1.0; -0.7811	2.321	1.095	1.706	1.632	2.249
	2.0	-23.3	0.34526; -0.05474; -0.04421	0.0; 0.0; 1.0; -0.6942	2.528	0.991	1.790	1.719	2.379
	2.25	-27.8	0.39108; -0.00892; -0.03112	0.0; 0.0; 1.0; -0.5958	2.721	0.912	1.871	1.796	2.493
	2.5	-32.6	0.426; 0.026; -0.02114	0.0; 0.0; 1.0; -0.48605	2.888	0.851	1.944	1.861	2.592
	2.75	-37.8	0.45309; 0.05309; -0.0134	0.0; 0.0; 1.0; -0.3649	3.029	0.803	2.008	1.918	2.677
	3.0	-43.5	0.47444; 0.07444; -0.0073	0.0; 0.0; 1.0; -0.23265	3.146	0.766	2.063	1.966	2.749
	3.25	-49.8	0.49152; 0.09152; -0.00242	0.0; 0.0; 1.0; -0.0894	3.244	0.736	2.110	2.008	2.810
	3.5	-57.0	0.505347407357; 0.105347407357; 0.001527830673	0.0; 0.0; 1.0; 0.0646	3.325	0.711	2.150	2.043	2.862
3	3.75	-65.5	0.516668206703; 0.116668206703; 0.004762344772	0.0; 0.0; 1.0; 0.2286	3.393	0.691	2.184	2.074	2.907
	4.0	-75.3	0.526255006384; 0.126255006384; 0.007501430395	0.0; 0.0; 1.0; 0.4069	3.452	0.674	2.214	2.100	2.946
	4.25	-80.3	0.536813458776; 0.136813458776; 0.010518131079	0.0; 0.0; 1.0; 0.6659	3.518	0.655	2.248	2.131	2.991
	4.455	-91.3	0.548519778485; 0.148519778485; 0.013862793853	0.0; 0.0; 0.9284; 1.0	3.592	0.634	2.287	2.167	3.042
	4.5	-92.3	0.550939245959; 0.151001558938; 0.014631961498; 0.000025963741	0.85564; 1.0; 0.00721	3.608	0.630	2.295	2.174	3.053
	4.75	-98.7	0.563203740676; 0.163807351359; 0.018812724975; 0.000251504451	0.0; 0.0; 0.58778; 1.0; 0.06079	3.687	0.608	2.337	2.213	3.109
	5.0	-106.9	0.574102067700; 0.175490351995; 0.022907374712; 0.000578451790;	0.0; 0.0; 0.43439; 1.00000; 0.13071	3.759	0.589	2.377	2.249	3.161
	5.25	-114.5	0.585765946848; 0.188268221877; 0.027632400028; 0.001042614595	0.0; 0.0; 0.31498; 1.0; 0.22853	3.838	0.569	2.420	2.289	3.218
	5.467	-121.9	0.596431521455; 0.200359607270; 0.032461970541; 0.001636702423	0.0; 0.0; 0.244151; 1.0; 0.369216	3.911	0.551	2.461	2.327	3.273
	3*	3.397	-53.9	0.5; 0.1	0.0; 0.0; 1.0	3.293	0.721	2.135	2.029
1.5		-15.2	0.20087; -0.19913; -0.08547	0.0; 0.0; 1.0; -0.8565	2.139	1.235	1.636	1.534	2.103
1.75		-19.1	0.28406; -0.11594; -0.06170	0.0; 0.0; 1.0; -0.7811	2.321	1.095	1.706	1.632	2.249
2.0		-23.3	0.34526; -0.05474; -0.04421	0.0; 0.0; 1.0; -0.6942	2.528	0.991	1.790	1.719	2.379
2.25		-27.8	0.39108; -0.00892; -0.03112	0.0; 0.0; 1.0; -0.5958	2.721	0.912	1.871	1.796	2.493
2.5		-32.6	0.426; 0.026; -0.02114	0.0; 0.0; 1.0; -0.48605	2.888	0.851	1.944	1.861	2.592
2.75		-37.8	0.45309; 0.05309; -0.0134	0.0; 0.0; 1.0; -0.3649	3.029	0.803	2.008	1.918	2.677
3.0		-43.5	0.47444; 0.07444; -0.0073	0.0; 0.0; 1.0; -0.23265	3.146	0.766	2.063	1.966	2.749
3.25		-49.8	0.49152; 0.09152; -0.00242	0.0; 0.0; 1.0; -0.0894	3.244	0.736	2.110	2.008	2.810
3.5		-57.0	0.505347407357; 0.105347407357; 0.001527830673	0.0; 0.0; 1.0; 0.0646	3.325	0.711	2.150	2.043	2.862

Таблица 3. Окончание

m	βN	$P, \text{ дБ}$	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	b_0, b_1, \dots, b_m	$\Pi_{\text{вр}}, \text{ дБ}$	$\Pi_{\text{сп}}, \text{ дБ}$	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
5	5.5	-122.8	0.597938951700; 0.2020950595904; 0.033179258659; 0.001733855837; 0.000000774213	0.0; 0.0; 0.2356059; 1.0; 0.3919306; 0.0007035	3.922	0.548	2.467	2.333	3.281
	5.75	-131.0	0.608708478312; 0.214684664621; 0.038556866781; 0.002527973758; 0.000013780411	0.0; 0.0; 0.1825068; 1.0; 0.5792031; 0.0134349	3.997	0.530	2.510	2.373	3.338
	6.0	-137.0	0.618285580334; 0.226242294827; 0.043826782661; 0.003434310934; 0.000043277537	0.0; 0.0; 0.1492498; 1.0; 0.7983319; 0.0467165	4.066	0.514	2.550	2.410	3.391
	6.25	-145.6	0.629076744455; 0.239554448126; 0.050169523055; 0.004636362933; 0.000098419298	0.0; 0.0; 0.105018; 0.898537; 1.0; 0.110778	4.145	0.496	2.597	2.454	3.453
	6.475	-152.3	0.637673313868; 0.250478662198; 0.055680899516; 0.005810136002; 0.000172572436	0.0; 0.0; 0.068669; 0.701899; 1.0; 0.176462	4.209	0.482	2.636	2.489	3.504
6	6.5	-152.9	0.638544551881; 0.251604214434; 0.056266558304; 0.005942518708; 0.000182226006; 0.000000023792	0.0; 0.0; 0.0659848; 0.6852333; 1.0; 0.1847067; 0.0000966	4.215	0.481	2.640	2.493	3.510
	6.75	-159.8	0.647616884736; 0.263440584994; 0.062543100551; 0.007416726274; 0.000301059220; 0.000000811389	0.0; 0.0; 0.0429403; 0.5358940; 1.0; 0.2794844; 0.0031224	4.284	0.466	2.682	2.532	3.566
	7.0	-167.6	0.656541320103; 0.275344257363; 0.069119057918; 0.009085115791; 0.000461050581; 0.000003199476	0.0; 0.0; 0.0279873; 0.4228402; 1.0; 0.3974463; 0.0121263	4.353	0.452	2.725	2.573	3.623
	7.25	-174.0	0.664395291371; 0.286096213998; 0.075344390566; 0.010803678448; 0.000656741431; 0.000008199061	0.0; 0.0; 0.0198776; 0.3482618; 1.0; 0.5351088; 0.0318994	4.415	0.439	2.764	2.609	3.675
	7.480	-181.9	0.672625719233; 0.297566975689; 0.082202541632; 0.012807960164; 0.000912209741; 0.000017133566	0.0; 0.0; 0.01354186; 0.28266748; 1.0; 0.70945614; 0.07052057	4.481	0.426	2.806	2.649	3.731

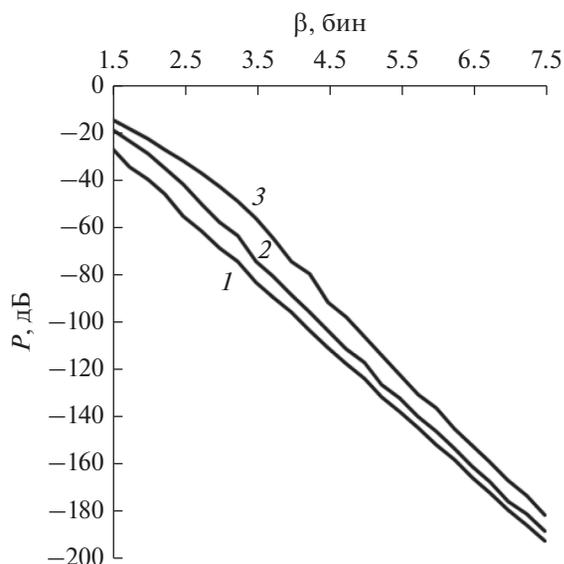


Рис. 1. Зависимости уровня P максимального бокового лепестка от параметра β для оптимальных функций со скоростями спада лепестков 12 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3).

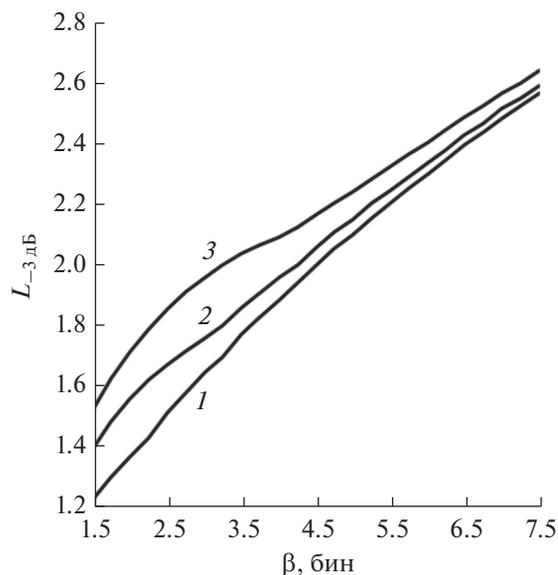


Рис. 2. Зависимость ширины главного лепестка по уровню -3 дБ от параметра β для оптимальных функций со скоростями спада лепестков 12 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3).

вестной весовой функции $\cos^5(\pi t/N)$. Функции с параметром $m = 3^*$ являются нерегулярными.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ СИНТЕЗА

Проанализируем характеристики синтезированных оптимальных весовых функций. На рис. 1 приведена зависимость уровня P максимального бокового лепестка от параметра β для функций с разными скоростями спада лепестков. Как и следовало ожидать, при прочих равных условиях увеличение скорости спада лепестков приводит к увеличению уровня максимального бокового лепестка. Области кривых с сильной нелинейностью соответствуют нерегулярным функциям.

При увеличении β происходит сближение рассматриваемых зависимостей. В области регулярных функций все три кривые могут быть хорошо аппроксимированы прямыми линиями, отклонения от которых имеют случайный вид. Средний наклон аппроксимирующих прямых для представленных зависимостей составляет для функций со спадом 12, 24 и 36 дБ/окт соответственно 26.7, 28.4 и 30.4 дБ на 1 бин параметра β . Различный наклон приводит к тому, что линии сближаются по мере увеличения β . Например, для функций со скоростью спада лепестков 12 и 36 дБ/окт разница в уровнях максимального лепестка при $\beta = 3.0$ бин составляет 27 дБ, а при $\beta = 7.0$ бин – всего 11 дБ.

Сближение кривых по мере увеличения β наблюдается и для других параметров анализируемых функций. На рис. 2 для рассматриваемых се-

мейств приведена зависимость ширины главного лепестка по уровню -3 дБ от параметра β . Здесь также участки кривых с сильной нелинейностью соответствуют нерегулярным функциям, а кривые сближаются по мере увеличения β , поэтому при низких уровнях боковых лепестков “плата” за увеличение скорости спада довольно мала.

В данной статье разработаны оптимальные функции, имеющие в представлении (7) вид отрезка ряда по нечетным степеням функции $\cos(\pi t/N)$ со скоростями спада лепестков спектра $V = 12n$ дБ/окт ($n = 1, 2, \dots$). Ранее [7–9] были разработаны оптимальные по рассматриваемому чебышевскому критерию весовые функции вида (1), имеющие в альтернативной записи вид отрезка ряда по четным степеням той же функции $\cos(\pi t/N)$ со скоростями спада лепестков спектра $V = (12n - 6)$ дБ/окт ($n = 1, 2, \dots$). На рис. 3 приведены зависимости уровня максимального лепестка от параметра β для функций, полученных в данной работе (сплошные линии) и в работах [7–9] (пунктир). На рисунке представлен ограниченный диапазон изменения параметров с целью увеличения масштаба во избежание слияния линий. Кривые для одной системы функций расположены посередине между кривыми для другой системы. Таким образом, указанные семейства оптимальных функций дополняют друг друга и могут рассматриваться как одна система, дающая возможность выбрать наиболее подходящее для конкретной задачи сочетание параметров и V , P и β .

Для определения места синтезированных функций среди известных аналогичных функций

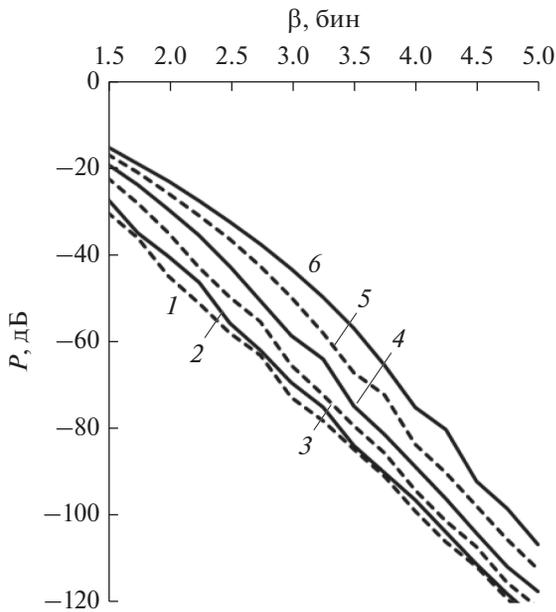


Рис. 3. Зависимости уровня P максимального бокового лепестка от параметра β для оптимальных функций, представленных суммой четных (пунктир) и нечетных (сплошные линии) степеней функции $\cos(\pi/N)$ и имеющих скорость спада лепестков 6 (1), 12 (2), 18 (3), 24 (4), 30 (5) и 36 дБ/окт (6).

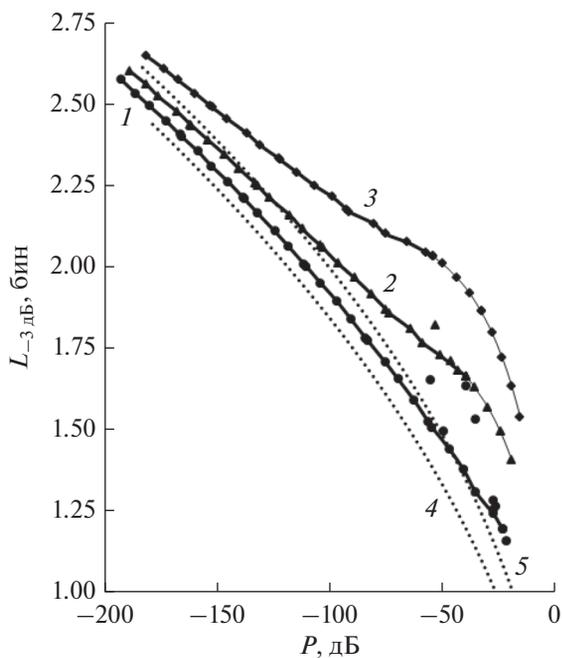


Рис. 4. Сравнение зависимостей ширины главного лепестка по уровню -3 дБ от уровня P максимального бокового лепестка для синтезированных (сплошные кривые 1–3) и известных весовых функций [1, 2] (точки 1–3) со скоростями спада лепестков 12 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3), а также для функций Дольфа–Чебышева, 0 дБ/окт, (4) и Кайзера–Бесселя, 6 дБ/окт (5).

необходимо сравнить их характеристики. Однако рассматриваемые скорости спада лепестков являются довольно редкими. Тем не менее на рис. 4 приводятся зависимости ширины главного лепестка от уровня максимального бокового для функций данной работы (сплошные линии 1–3) и для функций из работ [1, 2] (отдельные точки 1–3) со скоростями спада лепестков 12 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3). Более тонкие части непрерывных линий соответствуют нерегулярным функциям. Как видим, точки 1–3 известных функций находятся выше соответствующих кривых для новых функций и, следовательно, их характеристики ниже. Там же приведены соответствующие зависимости для функций Дольфа–Чебышева (кривая 4) и Кайзера–Бесселя (5) [1, 2]. Эти функции не принадлежат к рассматриваемому классу функций с высокой скоростью спада лепестков и приведены лишь для ориентировки. Их асимптотическая скорость спада составляет 0 дБ/окт для кривой 4 и 6 дБ/окт для кривой 5, поэтому эти функции должны обладать более высокими характеристиками по сравнению с функциями данной работы. Однако это превосходство невелико, а для кривой 5 при малом уровне лепестков характеристики даже ниже, чем для синтезированных функций со скоростями спада 12 и 24 дБ/окт.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимо сделать несколько замечаний по использованию рассматриваемых весовых функций. Введение весовой функции может осуществляться как во временной, так и в частотной областях. При введении во временной области перед вычислением спектра с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [3] выборки анализируемого сигнала умножаются на выборки весовой функции. При этом в ряде приложений необходимо произвести вычисление выборок весовой функции в реальном масштабе времени. Такими приложениями обусловлена необходимость простого представления весовой функции, реализованная в данной работе. В этих случаях представление (7) имеет преимущество перед представлением (5), так как требует меньшего числа арифметических операций. Количественно это преимущество зависит от используемой аппаратной платформы. Например, если тригонометрические функции необходимо вычислять, то выигрыш значительный. Если же в устройстве хранится таблица гармонических функций большого объема, то выигрыш невелик.

Так как перемножение во временной области перед ДПФ эквивалентно круговой свертке их спектров [3], то введение весовой функции можно осуществить в частотной области. Рассмотрим сначала ДПФ с количеством точек вычисления спектра, увеличенным до sN , где s – четное целое

число. Увеличение числа точек является стандартным методом для более точной обрисовки спектра. При этом N выборок сигнала дополняются необходимым количеством нулевых отсчетов. Количество отсчетов весовой функции также увеличим до sN путем ее продолжения по формуле (5). Тогда частоты базовых функций в (5) совпадут с частотами ортогональных дискретных гармонических функций, по которым ведется разложение при ДПФ. Поэтому каждая базисная функция из (5) с номером k будет иметь в дискретном спектре всего два ненулевых отсчета с номерами $s(k + 0.5)$, $k = 0, 1, \dots, m$, а полное число ненулевых отсчетов составит $2(m + 1)$. При малом порядке весовой функции $m \ll N$ вычисление свертки оказывается весьма эффективным.

Отметим теперь, что группы отсчетов с одинаковыми номерами по модулю s обрабатываются при вычислении свертки независимо. Группа с нулевым номером представляет отсчеты ДПФ порядка N . Поэтому описанная операция реализуема и без увеличения порядка ДПФ.

Таким образом, разработанный в данной статье метод синтеза оптимальных весовых функций с достаточно редкими скоростями спада лепестков позволяет не только существенно расширить диапазон параметров V , P и β для выбора наиболее подходящей функции для конкретного примене-

ния, но и обеспечить эффективное вычисление предложенных весовых функций как во временной, так и в частотной областях в реальном масштабе времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хэррис Ф.Дж. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 1. С. 60.
2. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.
3. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
4. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978.
5. Nuttall A.H. // IEEE Trans. 1981. V. ASSP-29. № 1. P. 84.
6. Albrecht H.-H. // Proc. Conf. ICASSP-01. Salt Lake City, 2001. N.Y.: IEEE, 2001. V. 5. P. 3081.
7. Зайцев Г.В. // Радиотехника. 2011. № 3. С. 21.
8. Зайцев Г.В. // Радиотехника. 2012. № 1. С. 55.
9. Хзмалян А.Д. // Вестник ВКО. 2018. № 4. С. 90.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 2.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.