

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 537.877

**ТРАНСФОРМАЦИЯ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛА,  
ОТРАЖЕННОГО ОТ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ**
© 2020 г. А. С. Запевалов<sup>а</sup>, \*, В. М. Бурдюгов<sup>а</sup><sup>а</sup>Морской гидрофизический институт РАН,  
ул. Капитанская, 2, Севастополь, 229011 Российская Федерация

\*E-mail: sevzepter@mail.ru

Поступила в редакцию 04.02.2019 г.

После доработки 12.08.2019 г.

Принята к публикации 15.08.2019 г.

Исследована структура сигнала, отраженного от вибрирующей поверхности, в случае когда амплитуда вибрации сравнима или значительно больше длины зондирующей электромагнитной волны. Показано, что использование соотношений между амплитудами старших гармоник позволяет рассчитать амплитуду вибрации в ситуациях, когда она больше длины зондирующей волны. Получены критерии, позволяющие выбирать гармоники отраженного сигнала для однозначного определения амплитуды вибрации. Показано, что эффект перераспределения энергии между большим числом гармоник отраженного сигнала, который имеет место при росте индекса фазовой модуляции, приводит к уменьшению их амплитуды примерно в 1.75.

DOI: 10.31857/S0033849420050149

**ВВЕДЕНИЕ**

При зондировании движущейся поверхности отраженный сигнал изменяет свою частоту и фазу. Этот эффект широко используется в ряде приложений, в том числе при измерениях параметров вибрации, путем зондирования поверхности электромагнитными волнами радио- и оптического диапазонов [1–4].

Стандартная процедура получения информации о частоте и амплитуде вибрации основана на выделении характеристик доплеровского сдвига отраженного сигнала [1, 5]. Всю информацию об амплитуде вибрации содержит фаза отраженного сигнала [6]. Проблемы появляются, когда амплитуда вибрации становится сравнимой с длиной зондирующей волны или превышает ее, в этом случае возникает неоднозначность определения амплитуды вибрации [7, 8].

Цель данной работы – анализ структуры сигнала, отраженного от вибрирующей поверхности, в ситуациях, когда амплитуда вибрации сравнима или значительно больше длины зондирующей электромагнитной волны.

**1. ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
СИГНАЛА, ОТРАЖЕННОГО  
ОТ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Когерентный источник непрерывного излучения с частотой  $\omega_0$  облучает поверхность, совершающую плоскопараллельные гармонические коле-

бания с амплитудой  $\xi_0$  и частотой  $\Omega$ . В этом случае отраженный сигнал имеет вид [1, 5]

$$\Psi(t) = A \cos\left(\omega_0 t - m \cos(\Omega t) - \frac{4\pi L}{\lambda} + \varphi_0\right), \quad (1)$$

где  $A$  – амплитуда;  $m$  – индекс фазовой модуляции;  $L$  – среднее расстояние от источника излучения до вибрирующей поверхности;  $\lambda$  – длина зондирующей волны;  $\varphi_0$  – изменение фазы сигнала при отражении. После стандартной процедуры усиления и детектирования отраженного сигнала получаем

$$\tilde{\Psi}(t) = \tilde{A} \cos(m \cos(\Omega t) - \varphi), \quad (2)$$

где  $\tilde{A}$  – амплитуда;  $\varphi = -4\pi L/\lambda + \varphi_0$  – фазовый сдвиг.

Индекс фазовой модуляции связан с амплитудой вибрации линейным соотношением

$$m = 4\pi\xi_0/\lambda, \quad (3)$$

т.е. чтобы определить амплитуду вибрации, зная длину зондирующей волны  $\lambda$ , достаточно рассчитать индекс фазовой модуляции. Для этого разложим функцию  $\tilde{\Psi}(t)$  в ряд Фурье

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(t) = \tilde{A} & \left[ \cos \varphi J_0(m) + 2 \cos \varphi \times \right. \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m) \cos(2n\Omega t) - \\ & \left. - 2 \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m) \cos((2n-1)\Omega t) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

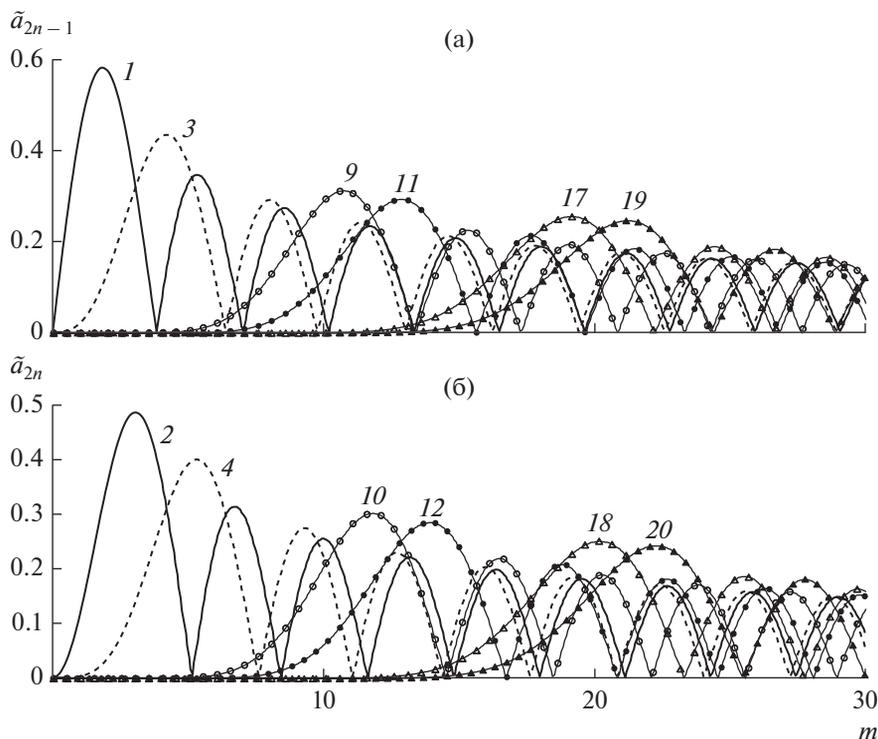


Рис. 1. Зависимости амплитуд нечетных  $\tilde{a}_{2n-1}$  (а) и четных  $\tilde{a}_{2n}$  (б) гармоник от параметра  $m$ ; цифры на кривых обозначают номер гармоники.

где

$$J_n(z) = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos(n\tau - z \sin \tau) d\tau$$

– функции Бесселя первого рода порядка  $n$  [9]. Из выражения (4) следует, что сигнал  $\tilde{\Psi}(t)$  является функцией четырех параметров, два из которых,  $\tilde{A}$  и  $\varphi$ , определяются условиями проведения измерений и характеристиками аппаратуры, а два других,  $m$  и  $\Omega$ , описывают характеристики вибрации. Параметр  $m$  зависит от длины зондирующей волны, но поскольку она, как правило, известна, то можно считать что  $m = m(\xi_0)$ .

В работе [4] предложен метод определения амплитуды вибрации в рамках которого расчет индекса фазовой модуляции осуществляется по отношению амплитуд первой и второй гармоник. Данный метод позволяет исключить неизвестный параметр  $\tilde{A}$ . Ограничением данного метода является то, что он может быть реализован только тогда, когда расстояние  $L$  известно с точностью значительно более высокой, чем длина зондирующей волны, в противном случае возникает неопределенность, связанная со сдвигом фазы  $\varphi$ . Метод также может быть реализован, если вибрирующая поверхность дополнительно перемещается таким образом, когда можно принять, что параметр  $\varphi$  равномерно распределен на интервале от 0 до  $2\pi$ .

Чтобы исключить неопределенность сдвига фазы  $\varphi$ , в работе [7] расчет индекса фазовой модуляции  $m$  осуществляется по отношениям амплитуд третьей и первой или четвертой и второй гармоник. В этом случае для амплитуд гармоник  $a_n$  сигнала  $\tilde{\Psi}(t)$  справедливы соотношения

$$a_3/a_1 = J_3(m)/J_1(m),$$

$$a_4/a_2 = J_4(m)/J_2(m).$$

Ограничение этого подхода связано с тем, что при превышении критических значений параметром  $m$ , соответствующих наименьшим значениям корней уравнений  $J_1(m) = 0$  или  $J_2(m) = 0$ , возникает неоднозначность. Она проявляется в том, что одному и тому же значению отношений амплитуд гармоник могут соответствовать разные значения  $m$  [8].

## 2. СТАРШИЕ ГАРМОНИКИ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА $\tilde{\Psi}(t)$

Отраженный от вибрирующей поверхности сигнал нелинейно зависит от индекса фазовой модуляции. С ростом параметра  $m$  увеличиваются амплитуды старших гармоник. Этот эффект может быть использован для расчета индекса фазовой модуляции.

Пусть  $a_n$  – амплитуда гармоники порядка  $n$  сигнала  $\tilde{\Psi}(t)$ . Тогда, вводя нормировки, исключая неизвестные параметры  $\tilde{A}$  и  $\varphi$ , получаем

$$\tilde{a}_{2n-1} = a_{2n-1}/(2\tilde{A} \sin \varphi) \quad \text{и} \quad \tilde{a}_{2n} = a_{2n}/(2\tilde{A} \cos \varphi).$$

Из уравнения (4) следует, что  $\tilde{a}_n \equiv |J_n(m)|$ . Изменения нормированных амплитуд  $\tilde{a}_n$  нечетных и четных гармоник с ростом параметра  $m$  показаны на рис. 1. Видно, что амплитуды  $\tilde{a}_n$  имеют квазипериодический характер, с ростом параметра  $m$  значения их локальных максимумов уменьшаются. При этом амплитуда гармоники, имеющей порядок  $n$ , при некоторых значениях параметра  $m$  оказывается больше амплитуд гармоник с порядками меньше  $n$ .

Рассмотрим более подробно изменения соотношений между амплитудами гармоник. Изменения амплитуд гармоник при увеличении индекса фазовой модуляции показаны на рис. 2. При построении рис. 2 для наглядности было принято, что значение наибольшей из амплитуд при фиксированном значении параметра  $m$  равно единице. Обозначим порядок амплитуды, имеющей наибольшее значение, как  $n_{\max}$ . Видно, что при  $n < n_{\max}$  амплитуды гармоник меняются беспорядочно, а при  $n > n_{\max}$  происходит монотонный спад амплитуд.

Таким образом, используя информацию о старших гармониках отраженного сигнала, можно проводить измерения амплитуды вибрации в ситуациях, когда она больше длины зондирующей волны. Для этого необходимо выделить гармонику  $n_{\max}$  с наибольшей амплитудой. Признаком того, что рассмотрено достаточное число гармоник, является монотонный спад к нулевым значениям амплитуд гармоник при  $n > n_{\max}$ . В этом случае индекс фазовой модуляции однозначно совпадает с наименьшим корнем уравнения

$$J_{n_{\max}+2}(m)/J_{n_{\max}}(m) = a_{n_{\max}+2}/a_{n_{\max}}. \quad (5)$$

Чтобы исключить неизвестное значение параметра  $\varphi$  расчет амплитуды вибрации осуществляется по отношению соседних амплитуд четных или нечетных гармоник [7]. Может возникнуть ситуация, когда максимальные значения амплитуд четных и нечетных гармоник равны. Тогда расчет амплитуды вибрации согласно (5) как по амплитудам четных, так и по амплитудам нечетных гармоник приводит к одному результату.

Расчет амплитуды вибрации при больших значениях индекса фазовой модуляции иллюстрирует рис. 3. Представлены две ситуации, при которых индекс фазовой модуляции равен 17 и 22 (см. рис. 2), что соответствует отношениям амплитуд вибрации к длине зондирующей волны, равным 1.35 и 1.75, тогда  $n_{\max} = 15$  и 20.

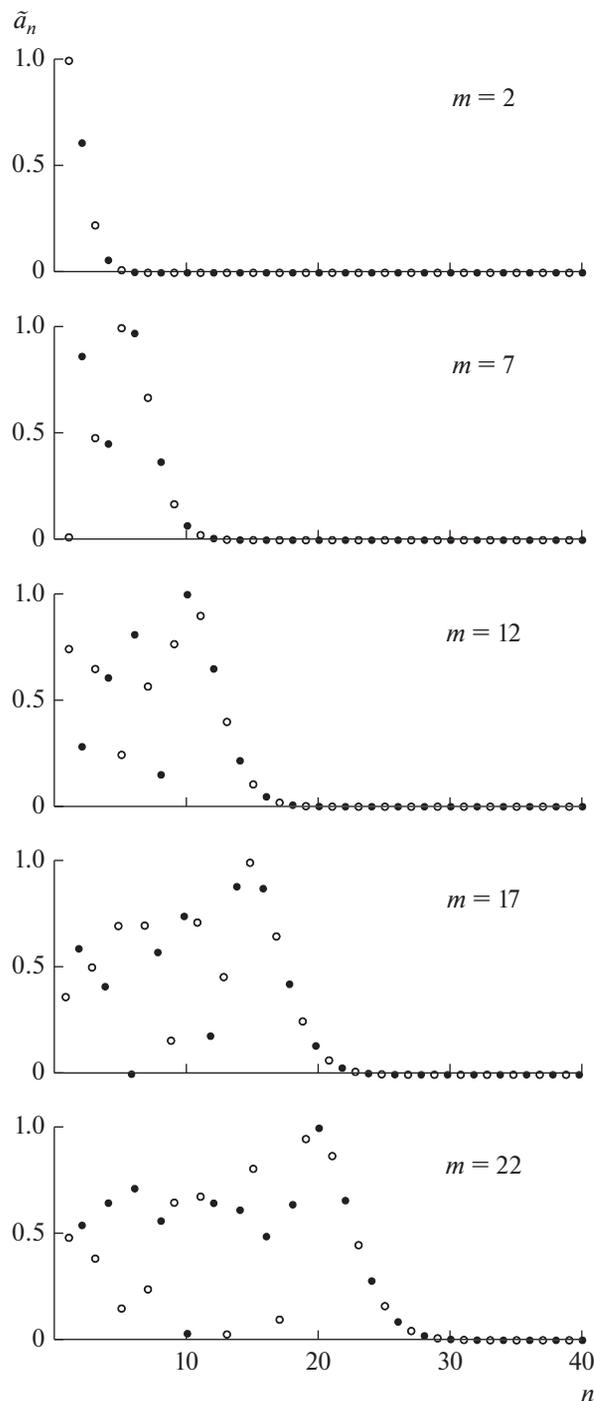


Рис. 2. Распределения амплитуд гармоник  $\tilde{a}_n$  при фиксированных значениях параметра  $m = 2, 7, 12, 17, 22$ ; светлые точки – нечетные гармоники, темные – четные.

### 3. ОГРАНИЧЕНИЕ МЕТОДА РАСЧЕТА АМПЛИТУД ВИБРАЦИИ ПО СТАРШИМ ГАРМОНИКАМ

Возникает естественный вопрос, до каких значений индекса фазовой модуляции можно рассчитывать амплитуду вибрации, используя стар-

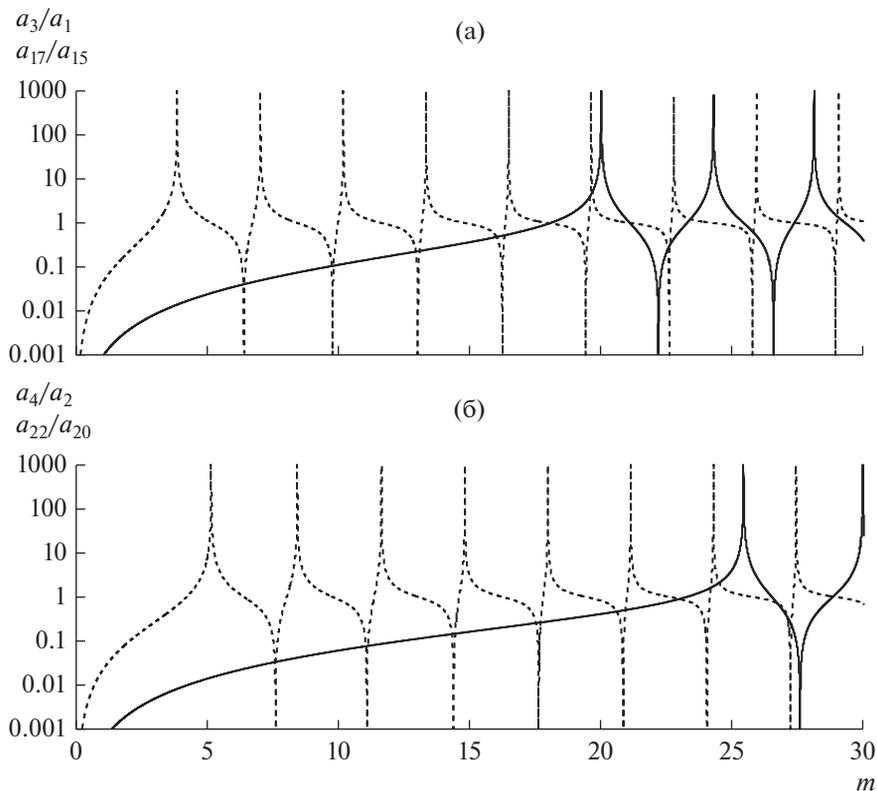


Рис. 3. Зависимости отношений амплитуд гармоник от индекса фазовой модуляции: штриховые линии –  $a_3/a_1$  (а) и  $a_4/a_2$  (б); сплошные линии –  $a_{17}/a_{15}$  (а) и  $a_{22}/a_{20}$  (б).

шие гармоники. С увеличением числа гармоник энергия отраженного сигнала распределяется между большим числом гармоник, соответственно меняется амплитуда наибольшей из них.

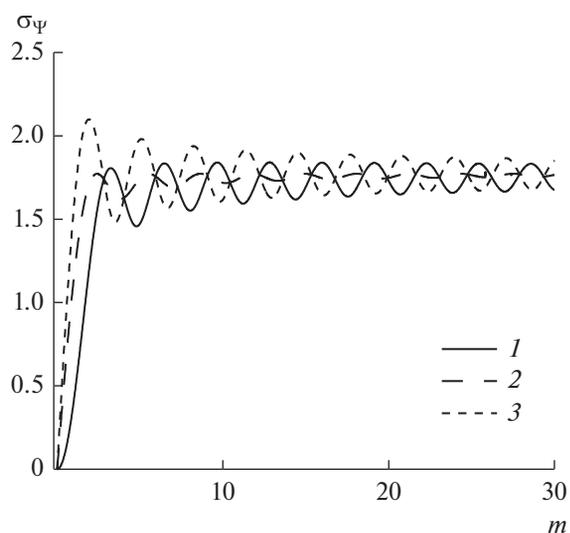


Рис. 4. Зависимости параметра  $\sigma_\psi$  от индекса фазовой модуляции  $m$  при трех значениях фазового сдвига:  $\varphi = 0$  (1),  $\pi/4$  (2) и  $\pi/2$  (3).

Будем полагать, что мощность отраженного от вибрирующей поверхности излучения не зависит от индекса фазовой модуляции, т.е. дисперсия сигнала  $\tilde{\Psi}(t)$  является константой

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\tilde{\Psi}(t) - \overline{\tilde{\Psi}(t)})^2 dt = \text{const}, \quad (6)$$

где  $T$  – интервал интегрирования; черта сверху означает осреднение. Интервал интегрирования примем равным периоду вибрации  $T = 2\pi/\Omega$ . Условие (6) выполняется, если параметр  $\tilde{A}$  с ростом индекса фазовой модуляции меняется обратно пропорционально  $\sigma_\psi$ :

$$\sigma_\psi(m) = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T ((\cos(m \cos(\Omega t) - \varphi) - \cos \varphi J_0(m))^2 dt \right]^{0.5} \quad (7)$$

Зависимости параметра  $\sigma_\psi$  от  $m$  при нескольких значениях фазового сдвига  $\varphi$  представлены на рис. 4. Значительные изменения  $\sigma_\psi(m)$  наблюдаются в области  $m < 1$ , при больших значениях  $m$  значения  $\sigma_\psi(m)$  колеблются вблизи среднего значения 1.75. Причем с ростом  $m$  отклонения  $\sigma_\psi(m)$

от среднего значения уменьшаются. Нулевое значение  $\sigma_{\psi}(m)$  при  $m = 0$  отражает тот факт, что вибрация отсутствует ( $\xi_0 = 0$ ), при этом  $\Psi(t) \equiv 0$ .

Таким образом, при увеличении амплитуды вибрации характер происходящего перераспределения энергии между гармониками отраженного сигнала позволяет измерять ее амплитуду в тех ситуациях, когда она в несколько раз превышает длину зондирующей объект радиоволны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ структуры сигнала, отраженного от вибрирующей поверхности, в ситуациях, когда амплитуда вибрации сравнима с длиной зондирующей электромагнитной волны или значительно больше ее. Показано, что в этих ситуациях использование соотношений между амплитудами старших гармоник позволяет исключить неоднозначность, присущую ранее предложенному методу расчетов по первым четырем гармоникам.

Расчет амплитуды вибрации проводится на основе индекса фазовой модуляции отраженного сигнала. Для расчетов используются две гармоники: одна имеет максимальную амплитуду  $a_{n_{\max}}$ , а другая  $a_{n_{\max}+2}$ . Отношение  $a_{n_{\max}+2}/a_{n_{\max}}$  однозначно определяет индекс фазовой модуляции. Критерием того, что рассмотрено достаточное число гармоник, является характер их изменения в области  $n > n_{\max}$ . В указанной области амплитуды гармоник должны монотонно стремиться к нулю.

Рассмотрен эффект уменьшения амплитуды гармоник с увеличением их числа. В области, где индекс фазовой модуляции больше 5, этот эф-

фект приводит к изменению амплитуд гармоник примерно в 1.75 раз.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2018-0003 “Фундаментальные исследования океанологических процессов, определяющих состояние и эволюцию морской среды под влиянием естественных и антропогенных факторов, на основе методов наблюдения и моделирования”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Г.А., Хохлов Г.И.* // Электромагн. волны и электрон. системы. 1997. Т. 2. № 4. С. 99.
2. *Amann M.C., Bosch T., Lescure M. et al.* // Opt. Eng. 2001. V. 40. № 1. P. 10.  
<https://doi.org/10.1117/1.1330700>
3. *Scalise L., Yu Y., Giuliani G. et al.* // IEEE Trans. 2004. V. IM-53. № 1. P. 223.  
<https://doi.org/10.1109/TIM.2003.822194>
4. *Пинчук А.Н.* // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 6. С. 270.
5. *Пинчук А.Н.* // Двойные технологии. 2015. № 1. С. 31.
6. *Волковец А.И., Руденко Д.Ф., Гусинский А.В., Кострикин А.М.* // Докл. БГУИР. 2007. Т. 20. № 4. С. 58.
7. *Запезалов А.С., Пинчук Н.А., Бурдюгов В.М.* // ЖТФ. 2018. № 12. С. 1890.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2018.12.46794.27-18>
8. *Бурдюгов В.М., Шумейко И.П., Ожиганова М.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2019. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan19/10/text.pdf>.  
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.1.10>
9. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1968.