

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.01

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ИТЕРАТИВНОГО ПРИЕМА
КОДОВ-ПРОИЗВЕДЕНИЙ НА ОСНОВЕ
НИЗКОПЛОТНОСТНЫХ КОДОВ КОНЕЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

© 2020 г. Л. Е. Назаров*

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация*

**E-mail: levnaz2018@mail.ru*

Поступила в редакцию 09.09.2019 г.

После доработки 23.12.2019 г.

Принята к публикации 25.12.2019 г.

Приведены результаты исследований алгоритмов итеративного посимвольного приема кодов-произведений (блоковых турбокодов), формируемых с использованием составляющих низкоплотностных кодов на основе конечных геометрий (Евклидова геометрия, проективная геометрия). Даны результаты моделирования и сравнительного анализа данных алгоритмов итеративного приема для ряда рассматриваемых кодов-произведений при наличии канальной помехи в виде аддитивного белого гауссовского шума.

DOI: 10.31857/S0033849420060212

ВВЕДЕНИЕ

Коды, корректирующие ошибки, используются для повышения помехоустойчивости передачи информации по проводным и беспроводным каналам [1, 2]. Кодовые конструкции под названием коды-произведения (блоковые турбокоды [3]) рассматриваются как одни из наиболее эффективных относительно вероятностных характеристик [3, 4]. Эти коды входят в ряд принятых стандартов, например, для спутниковых систем связи (IESS-15, IESS-315), для широкополосного доступа IEEE 802.16 [5].

Коды-произведения формируются на основе последовательного объединения составляющих блоковых кодов [1–3]. Для сигнальных конструкций, соответствующих этим кодам, разработаны алгоритмы приема, реализующие принцип декодирования для турбокодов (далее – турбодекодирование) [3, 6–8]. Суть данных алгоритмов заключается в итеративном выполнении этапов обработки входных реализаций для составляющих кодов. Это приводит к существенному упрощению процедур приема по сравнению с процедурами оптимального приема. Анализ и моделирование этих алгоритмов приема показал их эффективность по сравнению с известными схемами помехоустойчивого кодирования, включая сверточные коды. При увеличении информационных объемов кодов-произведений и применении алгоритмов итеративного приема достигаются вероятност-

ные характеристики при приеме, близкие к предельным теоретическим характеристикам [2, 4, 8].

Сложность разработанных алгоритмов итеративного приема кодов-произведений определяется сложностью алгоритмов приема составляющих блоковых кодов. Класс составляющих кодов, удовлетворяющих условию низкой сложности алгоритмов приема, ограничен – используются блоковые коды Хэмминга, коды с обобщенной проверкой на четность [3, 4, 8].

Открытой является проблема расширения класса кодов-произведений с вариацией параметров, определяющих перспективность их использования в приложениях. Для решения этой задачи в работах [9, 10] рассмотрен подход формирования ряда производных кодов-произведений на основе порождающего кода-произведения путем укорочения информационных объемов, длин кодовых слов и вариации кодовых скоростей. Для данного ряда производных кодов-произведений разработаны алгоритмы итеративного приема, являющиеся модификациями разработанных алгоритмов итеративного приема, реализующих принцип турбодекодирования.

Другое направление расширения класса кодов-произведений основано на использовании составляющих блоковых низкоплотностных кодов [2, 4], в частности, кодов конечных геометрий (Евклидова и проективная геометрии) [11, 12]. Для этих составляющих кодов известны алгоритмы итеративного приема, основанные на органи-

зации ортогональных соотношений относительно кодовых символов. Низкоплотностные коды входят в состав помехоустойчивых кодов CCSDS [13], рекомендованных для спутниковых информационных систем.

Перспективным направлением является использование составляющих блоковых кодов, задаваемых в недвоичных полях [1, 2, 4, 12].

Актуальной задачей является разработка алгоритмов приема для данного класса кодов-произведений, а также исследование и сравнительный анализ их вероятностных характеристик и сложности реализации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Кодовые слова кода-произведения на основе составляющих кодов C_1, C_2 с параметрами (n_1, k_1, d_1) и (n_2, k_2, d_2) эквивалентны двумерной матрице: ее строки – кодовые слова кода C_1 , столбцы – кодовые слова кода C_2 [1]. Здесь n, k, d – длина кодовых символов, информационный объем и минимальный вес Хэмминга кодовых слов кодов. Для кода-произведения $N = n_1 n_2$, $K = k_1 k_2$, минимальный вес Хэмминга $D_{\min} = d_1 d_2$, кодовая скорость $R = K/N$.

Алгоритмы оптимального приема сигналов, соответствующих коду с параметрами (n, k, d) , основаны на реализации 2^k -корреляторов при наличии аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) [5]. Для $k \gg 1$ исполнение алгоритмов оптимального приема в реальном времени представляет сложную проблему [1].

Для кодов-произведений на основе простых составляющих блоковых кодов C_1, C_2 (коды Хэмминга, коды с обобщенной проверкой на четность) разработаны алгоритмы итеративного приема [3, 4, 6, 8], реализующие принцип турбодекодирования. Эти алгоритмы по сравнению с алгоритмами оптимального приема имеют существенно меньшую сложность реализации при незначительных энергетических потерях. Итерация включает выполнение двух этапов. На первом этапе на основе отсчетов входной реализации и априорных вероятностей относительно кодовых символов вычисляются апостериорные вероятности приема для символов кода C_1 (прием по горизонтали) [3, 6]. Функционалы от вычисленных апостериорных вероятностей принимаются как априорные вероятности для кодовых символов и используются на втором этапе итерации при вычислении апостериорных вероятностей символов кода C_2 (прием по вертикали). После выполнения задаваемого числа итераций принимаются решения относительно кодовых символов кода-произведения.

Для кодов-произведений на основе составляющих низкоплотностных кодов можно применить другой ряд алгоритмов итеративного приема, разработанных для низкоплотностных кодов [2, 4]. Обоснование этого утверждения основано на том факте, что эти коды-произведения также входят в класс низкоплотностных кодов [11]. Ниже рассматриваются составляющие низкоплотностные коды конечных геометрий (Евклидова и проективная геометрии) [1, 4].

Суть задачи – разработка и исследование вероятностных характеристик алгоритмов итеративного приема сигнальных конструкций, соответствующих кодам-произведениям на основе составляющих низкоплотностных кодов конечных Евклидовой и проективной геометрий. Приведены результаты моделирования алгоритмов итеративного приема при наличии модели канальной помехи в виде АБГШ для ряда исследуемых кодов-произведений.

2. НИЗКОПЛОТНОСТНЫЕ КОДЫ КОНЕЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ И КОДЫ-ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА ИХ ОСНОВЕ

Ниже приведены описания низкоплотных кодов на основе конечной Евклидовой геометрии и конечной проективной геометрии.

Пусть $EG(m, 2^s)$ – m -мерная конечная Евклидова геометрия над полем $GF(2^s)$, m, s – положительные целые числа [1]. Эта геометрия содержит 2^{ms} -точек, эквивалентных векторам с m -компонентами поля $GF(2^s)$. Геометрия $EG(m, 2^s)$ содержит $2^{(m-1)s}(2^{ms} - 1)/(2^s - 1)$ линий с 2^s -точками в своем составе и рассматривается как расширение поля $GF(2^{ms})$ над $GF(2^s)$ [1, 15]. Пусть α – примитивный элемент поля $GF(2^{ms})$, множество $0, \alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{2^{ms}-2}$ эквивалентно 2^{ms} -точкам геометрии $EG(m, 2^s)$. Пусть α^i, α^j – линейно независимые точки, множество точек $\{\alpha^i + \beta \alpha^j; \beta \in GF(2^s)\}$ определяет линию, проходящую через 1 и α^i . Пусть $H_{EG}(m, s)$ – матрица с элементами из $GF(2)$, строки которой эквивалентны линиям геометрии $EG(m, 2^s)$. Эта матрица является проверочной матрицей низкоплотностного кода геометрии $EG(m, 2^s)$, она содержит $J = (2^{(m-1)s} - 1)/(2^s - 1)$ строк и $n = 2^{ms} - 1$ столбцов. Строки и столбцы матрицы $H_{EG}(m, s)$ имеют вес Хэмминга $J_N = 2^s$ и $J_D = (2^{ms} - 1)/(2^s - 1) - 1$ соответственно.

Низкоплотностные коды Евклидовой геометрии $EG(m, 2^s)$ являются циклическими кодами с

Таблица 1. Параметры низкоплотностных кодов геометрий $EG(m, 2^s)$ и $PG(m, 2^s)$

$(m, 2^s)$	n	k	d	J_N	J_D	Показатели степеней α^i
$EG(2, 2^2)$	15	7	5	4	4	1, 3
$EG(2, 2^3)$	63	37	9	8	8	1, 3, 5, 7, 21
$PG(3, 2^2)$	21	11	6	5	5	1, 3, 9
$PG(3, 2^3)$	73	45	10	9	9	7, 21, 35

Примечание: α – примитивный элемент поля $GF(2^{ms})$.

порождающим многочленом $g_{EG}(x)$ [1]. Длина кодовых слов равна $n = 2^{ms} - 1$, минимальный вес Хэмминга $d \geq J_D + 1$, размерность k определяется степенью многочлена $g_{EG}(x)$. Пусть α – примитивный элемент поля $GF(2^{ms})$, элемент α^h является корнем $g_{EG}(x)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие [1]:

$$0 < \max_{0 \leq l < s} (W_{2^s}(h^{(l)})) \leq (m-1)(2^s - 1), \quad (1)$$

$$W_{2^s}(h) = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{m-1}, \quad (2)$$

$$h = \delta_0 + \delta_1 2^s + \dots + \delta_{m-1} 2^{(m-1)s}, \quad (3)$$

$$0 \leq \delta_i < 2^s, \quad 0 \leq i < m.$$

Здесь $0 \leq \delta_i < 2^s, 0 \leq i < m$ – коэффициенты при разложении (3) показателя степени h элемента α ; $h^{(l)}$ – остаток $h2^l$ по модулю $(2^{ms} - 1)$.

Приведем описание класса низкоплотностных кодов проективной геометрии $PG(m, 2^s)$ над полем $GF(2^s)$. Пусть α – примитивный элемент поля $GF(2^{(m+1)s})$, являющийся расширением поля $GF(2^s)$. Рассмотрим элемент

$$\beta = \alpha^n, \quad n = \frac{2^{(m+1)s} - 1}{2^s - 1}.$$

Порядок элемента β равен $(2^s - 1)$, множество $\{0, 1, \beta, \dots, \beta^{2^s-2}\}$ представляет поле $GF(2^s)$. Рассмотрим множество элементов $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ и разбиение поля $GF(2^{(m+1)s})$ на непересекающиеся подмножества $(\alpha^i) = \{\alpha^i, \beta\alpha^i, \dots, \beta^{2^s-2}\alpha^i\}, 0 \leq i < n$. Геометрия $PG(m, 2^s)$ содержит n точек, эквивалентных элементам (α^i) в виде вектора с $(m+1)$ -компонентами поля $GF(2^s)$. Множество точек $(\eta_1\alpha^i + \eta_2\alpha^j)$ определяет линию, проходящую че-

рез линейно независимые точки $(\alpha^i), (\alpha^j)$. Здесь η_1, η_2 – элементы поля $GF(2^s)$, не равные нулю одновременно. Геометрия $PG(m, 2^s)$ содержит

$$J = \frac{(2^{(m+1)s} - 1)(2^{ms} - 1)}{(2^s + 1)(2^s - 1)^2}$$

линий из $2^s + 1$ точек. Пусть $H_{PG}(m, s)$ матрица над полем $GF(2)$, строки которой эквивалентны линиям геометрии $PG(m, 2^s)$. Матрица $H_{PG}(m, s)$ является проверочной матрицей низкоплотностного кода геометрии $PG(m, 2^s)$, она содержит J строк и n столбцов. Строки и столбцы $H_{PG}(m, s)$ имеют вес Хэмминга $J_N = 2^s + 1$ и $J_D = (2^{ms} - 1)/(2^s - 1)$ соответственно.

Низкоплотностные коды на основе геометрии $PG(m, 2^s)$ с проверочной матрицей $H_{PG}(m, s)$ являются циклическими и определяются порождающим многочленом $g_{PG}(x)$ [1]. Пусть α – примитивный элемент поля $GF(2^{(m+1)s})$, элемент α^h ($0 < h < 2^{(m+1)s} - 1, h$ кратно $2^s - 1$) является корнем $g_{PG}(x)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие [1]:

$$0 < \max_{0 \leq l < s} (W_{2^s}(h^{(l)})) \leq j(2^s - 1).$$

Здесь $0 \leq j \leq m-1, h^{(l)}$ – остаток деления $h2^l$ на $(2^{(m+1)s} - 1)$; вес $W_{2^s}(h^{(l)})$ определяется соотношениями (2), (3).

В табл. 1 приведены параметры n, k, d, J_N, J_D , а также степени примитивного элемента α для порождающих многочленов $g_{EG}(x)$ и $g_{PG}(x)$, полученные для ряда кодов $EG(m, 2^s)$ и $PG(m, 2^s)$. Коды-произведения на основе низкоплотностных кодов геометрий $EG(m, 2^s), PG(m, 2^s)$ с параметрами J_N и J_D входят в класс низкоплотностных кодов с параметрами J_N и $2J_D$ [1]. В табл. 2 приведены

Таблица 2. Параметры кодов-произведений на основе низкоплотных кодов геометрий $EG(m, 2^s)$ и $PG(m, 2^s)$

Составляющий код	N	K	D_{\min}	J_N	J_D	R
$EG(2, 2^2)$	225	49	25	4	8	0.22
$EG(2, 2^3)$	3969	1369	81	8	16	0.34
$PG(3, 2^2)$	441	121	36	5	10	0.27
$PG(3, 2^3)$	5329	2025	100	9	18	0.38

параметры N, K, D_{\min}, J_N, J_D для кодов-произведений на основе рассматриваемых низкоплотных кодов.

Далее рассмотрим наиболее эффективные алгоритмы итеративного посимвольного приема низкоплотных кодов – алгоритм ВР (belief propagation) и алгоритм АРР (a’posteriori probability) и их модификации [2, 4, 16].

Обозначим $H = (h_{li}; 0 \leq l < n - k; 0 \leq i < n)$ проверочную матрицу низкоплотного кода (n, k) с кодовыми словами $\vec{B} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$. Пусть $\vec{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ – дискретная реализация с отсчетами $y_i = s_i + n_i$ с выхода демодулятора сигналов. Здесь s_i – сигнальные составляющие, соответствующие сигналам с двоичной фазовой манипуляцией (ФМ2), n_i – помеховые составляющие, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Введем обозначение $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ – “жесткие” решения: $x_i = 0$ при условии $y_i \geq 0$ и $x_i = 1$ в противном случае.

Низкоплотные коды конечных геометрий обладают свойством организации ортогональных проверочных соотношений для символов b_i кодовых слов \vec{B} [1, 4]. Пусть $N(m) = (i : h_{mi} = 1)$ – множество номеров кодовых символов объемом $J_N(m)$, образующих m -е проверочное соотношение; $N(m)/l$ – множество $N(m)$ без l -го символа; $D(l) = (m : h_{ml} = 1)$ – множество проверочных ортогональных соотношений для кодового символа b_l объемом $J_D(l)$; $D(l)/m$ – множество ортогональных соотношений $D(l)$ без m -й проверки. Для рассматриваемых низкоплотных кодов выполняются условия $J_N(m) = J_N, J_D(l) = J_D$.

3. АЛГОРИТМ ИТЕРАТИВНОГО ПРИЕМА ВР

Итерация алгоритма ВР включает следующие шаги обработки \vec{Y} [1, 11, 12].

Инициализация. Устанавливаются начальные значения величин $z_{mi} = y_i, m \in J_D(i); i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Шаг 1. Вычисляются “жесткие” решения

$$\sigma_{mi} = \begin{cases} 1, & z_{mi} > 0, \\ 0, & z_{mi} \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для каждой ортогональной проверки m вычисляются величины σ_m, L_{mi}

$$\sigma_m = \sum_{i \in N(m)} \sigma_{mi}, \quad (5)$$

$$L_{mi} = (-1)^{\sigma_m \oplus \sigma_{mi} \oplus 1} \min_{i' \in N(m)/i} (|z_{mi'}|). \quad (6)$$

Операция сложения \oplus в (5), (6) осуществляется в поле $GF(2)$.

Шаг 2. На основе L_{mi} вычисляются величины z_{mi}

$$z_{mi} = y_i + \sum_{m' \in D(i)/m} L_{m'i}. \quad (7)$$

Шаг 3. При невыполнении требуемого числа итераций выполняется шаг 1 следующей итерации, иначе принимается решение относительно кодовых символов b_i с использованием величин z_i

$$z_i = y_i + \sum_{m \in D(i)} L_{mi}. \quad (8)$$

Принимается решение $b_i = 0$, если $z_i \geq 0$, иначе $b_i = 1$.

Алгоритм ВР осуществляет параллельное использование величин L_{ml} для вычисления z_{ml} при реализации (7), т.е. на шаге 1 вычисляется множество $\{L_{ml}\}$ и после этого выполняется шаг 2. Модификация этого алгоритма (m-ВР) заключается в последовательном использовании величин L_{ml} при вычислении z_{ml} , т.е. шаг 2 выполняется после определения очередного значения $L_{ml}, l = 0, 1, \dots, n - 1$. При этом не требуется память для множества $\{L_{ml}\}$, что упрощает реализацию алгоритма m-ВР по отношению к ВР.

При реализации итерации алгоритмов ВР и m-ВР объем требуемых вычислительных операций

определяется вычислением (4)–(8) и оценивается соотношением $B_{BP} \cong 4J_D J_N n$. Объем требуемой памяти для алгоритма BP равен $\Pi_{BP} \cong 3J_D J_N n$, для алгоритма m-BP равен $\Pi_{mBP} \cong 2J_D J_N n$.

4. АЛГОРИТМ ИТЕРАТИВНОГО ПРИЕМА APP

При применении алгоритма APP вычисляются ошибки e_i ($e_i = 0, 1$) для кодовых символов b_i , оценка \hat{b}_i задается соотношением [11]

$$\hat{b}_i = x_i \oplus e_i. \tag{9}$$

Алгоритм APP включает следующие шаги обработки \bar{Y} [4, 11].

Инициализация. Полагается $L_i = y_i$. На основе “жестких” решений \bar{x} вычисляются величины $A_j^{(i)}$ (сложение осуществляется в поле $GF(2)$)

$$A_j^{(i)} = \sum_{l: h_{ij}=1} x_l. \tag{10}$$

Шаг 1. Вычисляются величины $w_j^{(i)}$

$$w_j^{(i)} = \left[\prod_{l' \in N(j)/i} \text{sign}(L_{l'}) \right] \min_{l' \in N(j)/i} (|L_{l'}|). \tag{11}$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, J_N(m)$ – номер ортогональной проверки относительно b_i .

Шаг 2. На основе $A_j^{(i)}, w_j^{(i)}$ вычисляются величины E_i

$$E_i = \sum_{j=1}^{J_N(m)} (1 - 2A_j^{(i)})w_j^{(i)}. \tag{12}$$

Шаг 3. С использованием E_i вычисляются величины

$$L_i = y_i + E_i. \tag{13}$$

Шаг 4. Если не выполняется условие на остановку работы алгоритма, то осуществляется следующая итерация, начиная с шага 1. В противном случае вычисляется оценка значения $L(e_i | \{A_j^{(i)}\}, \bar{Y})$ ошибки e_i

$$L(e_i | \{A_j^{(i)}\}, \bar{Y}) = E_i + 2|y_i|. \tag{14}$$

При условии $L(e_i | \{A_j^{(i)}\}, \bar{Y}) \geq 0$ полагается $e_i = 0$, в противном случае $e_i = 1$. Оценка кодового символа \hat{b}_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) вычисляется с использованием соотношения (9).

Алгоритм APP осуществляет параллельное использование величин E_i для вычисления L_i , т.е. на шаге 2 вычисляется множество $\{E_i\}$ и после этого реализуется шаг 3. Модификация этого алгорит-

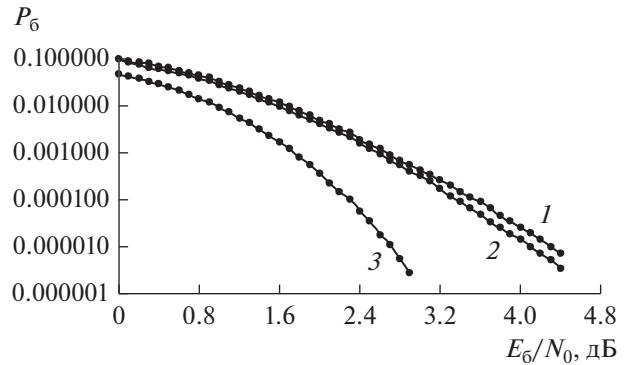


Рис. 1. Вероятности P_6 приема сигналов ФМ2, соответствующих коду-произведению на основе EG-кода (15,7): 1 – алгоритм итеративного приема BP (20 итераций); 2 – алгоритм итеративного приема m-BP (20 итераций); 3 – граница случайного кодирования.

ма (m-APP) заключается в реализации последовательного использования величин E_i при вычислении L_i , т.е. шаг 3 реализуется после вычисления очередного значения $E_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$, не требуя вычисления множества $\{E_i\}$. В этом случае не требуется памяти для хранения множества $\{E_i\}$, что упрощает сложность реализации алгоритма m-APP по отношению к алгоритму APP.

При реализации итерации алгоритмов APP и m-APP объем требуемых вычислительных операций определяется вычислением (10)–(14) и оценивается выражением $B_{APP} \cong 2J_D J_N n$, объем требуемой памяти для алгоритма APP равен $\Pi_{APP} \cong 2nJ_D$, для алгоритма m-APP $\Pi_{mAPP} \cong nJ_D$.

Таким образом, сравнивая приведенные выше значения B_{BP} и B_{APP} , делаем вывод, что относительно требуемого объема вычислительных операций алгоритм APP (m-APP) более эффективен (в два раза) алгоритма BP (m-BP). Относительно требуемого объема памяти алгоритм m-APP является наиболее эффективным, при его реализации требуется в $\Pi_{mBP}/\Pi_{mAPP} \cong 2J_N$ раз меньше памяти по сравнению с алгоритмом m-BP.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 1–5 приведены результаты моделирования алгоритмов BP, m-BP, APP и m-APP для ряда кодов-произведений на основе низкоплотностных EG- и PG-кодов, параметры которых приведены в табл. 2. Кривые на рисунках соответствуют зависимостям вероятности ошибки на бит P_6 от отношения E_6/N_0 для сигналов ФМ2 при наличии АБГШ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь E_6 – энергия сигналов на 1 бит.

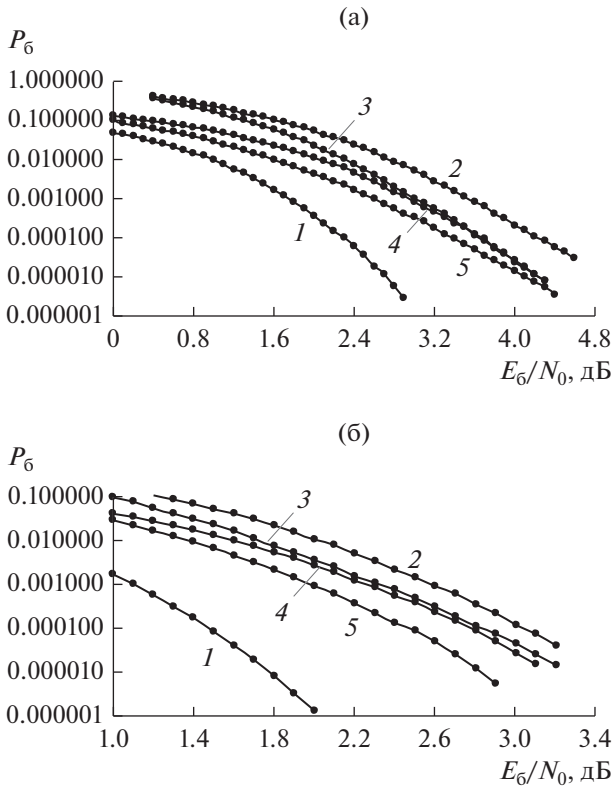


Рис. 2. Вероятности P_6 приема сигналов ФМ2, соответствующих коду-произведению на основе EG-кода (15,7) (а) и PG-кода (21,11) (б): 1 – граница случайного кодирования; 2 – алгоритм m-APP (пять итераций); 3 – алгоритм m-APP (20 итераций); 4 – алгоритм m-BP (пять итераций); 5 – алгоритм m-BP (20 итераций).

При моделировании производилась интервальная оценка P_6 путем вычисления частности x/u , где x – число ошибочных символов в последовательности переданных символов u . Требуемый объем u определялся размером доверительного интервала $[0.5P_6, 1.5P_6]$, вероятностью $P_6 = 10^{-5}$, доверительной вероятностью $P_{\text{дов}} = 0.95$ [17].

На рис. 1 приведены значения P_6 для кода-произведения на основе EG-кода (15,7) ($N = 225$, $K = 25$, $D_{\text{мин}} = 49$, кодовая скорость $R = 0.22$) для алгоритмов приема ВР и m-ВР. Видно, что применение алгоритма m-ВР определяет энергетиче-

Таблица 3. Значения P_6 для кода-произведения на основе EG-кода (15,7) ($E_6/N_0 = 4.1$ дБ)

Количество итераций	m-ВР	m-APP
20	10^{-5}	3×10^{-5}
5	3×10^{-5}	3×10^{-4}

ский выигрыш до 0.1 дБ по отношению к алгоритму приема ВР. Энергетический выигрыш достигал значений до 0.1...0.2 дБ при использовании алгоритма m-ВР по отношению к алгоритму ВР и алгоритма m-APP по отношению к алгоритму APP также и для других кодов-произведений, параметры которых приведены в табл. 2.

На рис. 2а приведены вероятности ошибки P_6 при использовании алгоритмов m-ВР и m-APP для кода-произведения на основе EG-кода (15,7) при применении пяти итераций (кривая 2 для m-APP, кривая 4 для m-ВР) и 20 итераций (кривая 3 для m-APP, кривая 5 для m-ВР). Кривая 1 соответствует верхней границе P_6 случайного кодирования [1, 9], граница показывает существование кода с приведенными параметрами (N, K), $R = 0.22$ с вероятностными характеристиками, определяемыми соотношениями [18]

$$P_6 \leq \frac{D_{\text{мин}}}{N} \exp(-NE_r(R)), \tag{15}$$

$$E_r(R) = \max_{0 \leq \rho \leq 1} \max_Q (E_0(\rho, Q) - \rho R), \tag{16}$$

$$E_0(\rho, Q) = -Ln \left(\sum_{j=0}^1 \left[\sum_{k=0}^1 Q(k) (\text{Pr}(j|k))^{1/(1+\rho)} \right]^{(1+\rho)} \right). \tag{17}$$

Здесь $Q(0) = Q(1) = 0.5$, переходные вероятности $\text{Pr}(j|k)$ определяются вероятностями ошибки для дискретно-непрерывного канала АБГШ.

Видно, что увеличение числа итераций приводит к уменьшению вероятности P_6 при фиксированном значении $E_6/N_0 = 4.1$ дБ (табл. 3).

Таким образом, для этого кода-произведения алгоритм m-ВР является более эффективным по сравнению с алгоритмом m-APP – энергетический выигрыш для пяти итераций и $P_6 = 10^{-5}$ достигает 0.5 дБ. Для 20 итераций эти алгоритмы практически эквивалентны по помехоустойчивости. Выше отмечалось, что алгоритм m-APP в два раза эффективнее алгоритма m-ВР по требуемому числу вычислительных операций, также следует отметить, что он для данного кода-произведения в восемь раз эффективнее по требуемой памяти ($J_N = 4$). Кривая 5 для алгоритма m-ВР и кривая 3 для m-APP близки к границе P_6 случайного кодирования – для $P_6 = 10^{-5}$ различие не превышает 1.4 дБ.

На рис. 2б приведены вероятности P_6 для кода-произведения на основе PG-кода (21,11) ($N = 441$, $K = 121$, $D_{\text{мин}} = 36$, $R = 0.27$). Кривая 1 соответствует границе P_6 случайного кодирования для этого кода-произведения. Кривые 2 и 3 соответствуют применению алгоритма приема m-APP): для пяти итераций значение $P_6 = 10^{-5}$ до-

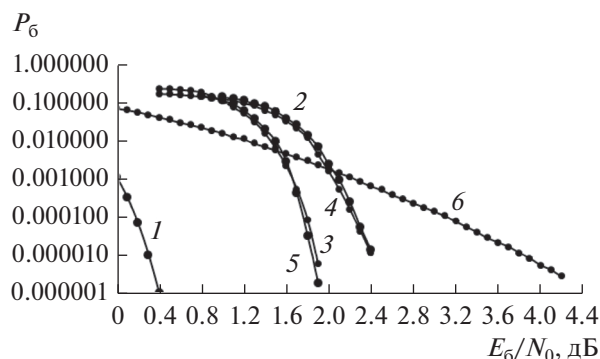


Рис. 3. Вероятности P_6 приема сигналов ФМ2, соответствующих коду-произведению на основе EG-кода (63,37): 1 – граница случайного кодирования; 2 – алгоритм m-APP (пять итераций); 3 – алгоритм m-APP (20 итераций); 4 – алгоритм m-BP (пять итераций); 5 – алгоритм m-BP (20 итераций); 6 – вероятность P_6 для сверточного кода с кодовой скоростью 1/3, алгоритм приема Витерби [18].

стигается при $E_6/N_0 = 3.3$ дБ, для 20 итераций при $E_6/N_0 = 3.2$ дБ. Кривые 4 и 5 соответствуют применению алгоритма m-BP: для пяти итераций значение $P_6 = 10^{-5}$ достигается при $E_6/N_0 = 3.1$ дБ, для 20 итераций при $E_6/N_0 = 2.8$ дБ. Таким образом, для $P_6 = 10^{-5}$ различие кривой 5 по отношению к кривой 1 для границы случайного кодирования не превышает 1 дБ. Следует отметить, что для рассматриваемого кода-произведения алгоритм m-APP по сравнению с m-BP в 10 раз эффективнее по требуемой памяти ($J_N = 5$).

На рис. 3 приведены вероятности P_6 для кода-произведения на основе EG кода (63,37) ($N = 3969$, $K = 1369$, $D_{\min} = 81$, $R = 0.34$). Кривая 1 соответствует границе случайного кодирования для этого кода-произведения. Кривые 2 и 3 соответствуют применению алгоритма приема m-APP: для 5 итераций значение $P_6 = 10^{-5}$ достигается при $E_6/N_0 = 2.3$ дБ, для 20 итераций при $E_6/N_0 = 1.9$ дБ. Кривые 4 и 5 соответствуют применению алгоритма m-BP, эти кривые практически совпадают с соответствующими кривыми 2 и 3 для m-APP. Для $P_6 = 10^{-5}$ различие наиболее эффективной вероятностной кривой 5 по отношению к кривой 1 границы случайного кодирования не превышает 1.6 дБ. Кривая 6 соответствует известному сверточному коду с эквивалентной кодовой скоростью $R = 1/3$ (длина кодового ограничения 7, алгоритм приема Витерби) [9]. Для $P_6 = 10^{-5}$ и реализации 20 итераций энергетический выигрыш кода-произведения по сравнению с этим сверточным кодом составляет 2.0 дБ. Для рассматриваемого кода-произведения алгоритм m-APP по отношению

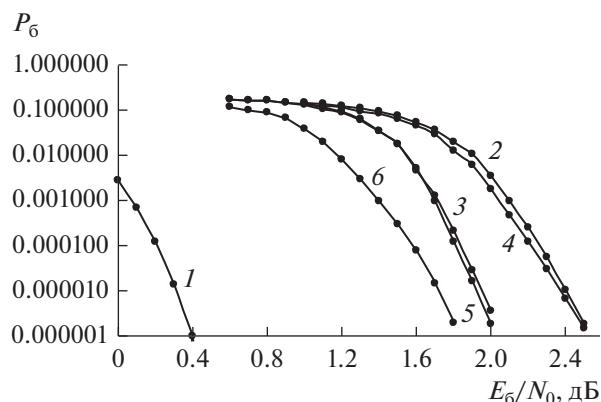


Рис. 4. Вероятности P_6 приема сигналов ФМ2, соответствующих коду-произведению на основе PG-кода (73,45): 1 – граница случайного кодирования; 2 – алгоритм m-APP (пять итераций); 3 – алгоритм m-APP (20 итераций); 4 – алгоритм m-BP (пять итераций); 5 – алгоритм m-BP (20 итераций); 6 – вероятность ошибки для низкоплотного кода AR4J с кодовой скоростью 1/2 [13].

к алгоритму m-BP в 16 раз эффективнее по требуемой памяти ($J_N = 8$).

На рис. 4 приведены вероятности P_6 для кода-произведения на основе PG кода (73,45) ($N = 5329$, $K = 2025$, $D_{\min} = 100$, $R = 0.38$). Кривая 1 соответствует границе случайного кодирования для этого кода-произведения. Кривые 2 и 3 соответствуют применению алгоритма приема m-APP: для пяти итераций значение $P_6 = 10^{-5}$ достигается при $E_6/N_0 = 2.4$ дБ, для 20 итераций при $E_6/N_0 = 1.95$ дБ (практически совпадает с вероятностными характеристиками кривой 6 для наиболее эффективного низкоплотного кода AR4J с кодовой скоростью 1/2 (параметры кода (4096.2048)) в составе класса помехоустойчивых кодов, рекомендованных для использования в спутниковых системах связи [13]). Кривые 4 и 5 соответствуют применению алгоритма m-BP, эти кривые практически совпадают с соответствующими кривыми 2 и 3 для m-APP. Вероятностные кривые 3 и 5 близки к теоретической границе 1 – для $P_6 = 10^{-5}$ различие не превышает 1.65 дБ. Для рассматриваемого кода-произведения алгоритм m-APP по сравнению с алгоритмом m-BP в 18 раз эффективнее по требуемой памяти ($J_N = 9$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, представлены результаты исследований вероятностных характеристик и сложности алгоритмов приема для сигналов ФМ2, соответствующих кодам-произведениям, особенностью которых является то, что они фор-

мируются на основе составляющих низкоплотных кодов и также являются низкоплотными кодами. Вследствие этого можно применить алгоритмы итеративного приема, разработанные для общего класса низкоплотных кодов, в частности, алгоритмы ВР, АРР и их модификации m-ВР и m-АРР. Приведены результирующие параметры рассматриваемых кодов-произведений (длительность кодовых слов, информационный объем, минимальный вес Хэмминга, кодовая скорость), формируемых с использованием ряда составляющих низкоплотных кодов на основе конечной Евклидовой и проективной геометрий.

Для ряда рассматриваемых кодов-произведений проведено моделирование алгоритмов итеративного приема. Показано, что алгоритм m-ВР (m-АРР) более эффективен по сравнению с алгоритмом ВР (АРР). Наиболее эффективным относительно вероятностных характеристик является алгоритм m-ВР, однако относительно требуемых при реализации объема вычислительных операций и объема памяти наиболее эффективен алгоритм m-АРР. Показано также, что для кодов-произведений из рассматриваемого ряда с кодовой скоростью $R > 0.3$ алгоритмы итеративного приема m-ВР и m-АРР практически эквивалентны.

Вероятностные кривые для алгоритма m-ВР и m-АРР (20 итераций) близки к вероятностным кривым верхней границы случайного кодирования. Энергетический выигрыш для кода-произведения с кодовой скоростью $1/3$ по сравнению со сверточным кодом с эквивалентной кодовой скоростью при $P_0 = 10^{-5}$ составляет 2.4 дБ.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976.
2. Li J., Lin S., Abdel-Chaffar K. et al. LDPC Code Designs, Constructions and Unification. Cambridge: Univ. Press. United Kingdom, 2017.
3. Pyndiah R.M. // IEEE Trans. 1998. V. Comm-46. № 8. P.1003.
4. Johnson S.J. Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes. Cambridge: Univ. Press, 2010.
5. Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные сети передачи. М.: Техносфера, 2005.
6. Назаров Л.Е., Головкин И.В. // Цифровая обработка сигналов. 2009. № 2. С. 2.
7. Волков Л.Н., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи. Базовые методы и характеристики. М.: Эко-Трендз, 2005.
8. Назаров Л.Е., Батанов В.В., Кузнецов О.О. // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 9. <http://jre.cplire.ru/jre/sep14/1/text.pdf>.
9. Zhou L., Wu K., Zhao R. et al. // Procedia Engineering. 2011. V. 15. P. 2538.
10. Назаров Л.Е., Шишкин П.В. // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информ. технологии. 2018. Т. 10. № 2. С. 323.
11. Назаров Л.Е., Шишкин П.В. // Информ. технологии. 2018. Т. 24. № 6. С. 427.
12. Назаров Л.Е., Шишкин П.В. // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 5. <http://jre.cplire.ru/jre/may18/1/text.pdf>.
13. Low-Density Parity Check Codes for Use in Near-Earth and Deep Space Application. Experimental Specification. CCSDS 131.1-O-2. 2007, Washington, NASA Headquarters.
14. Назаров Л.Е., Шишкин П.В. // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 910.
15. Liu Z., Pados D.A. // IEEE Trans. 2005. V. Comm-53. № 3. P. 415.
16. Sunil K., Jayaraj P., Soman K.P. // IOSR J. Comp. Engineering. 2012. V. 2. № 3. P. 12.
17. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М.: Гостехтеориздат, 1955.
18. Витерби А.Д., Омура Дж.К. Принципы цифровой связи и кодирования. М.: Радио и связь, 1982.